① Описание переменного эм поля в общем случае. ДУ второго порядка для эл и маг полей.

Если не учитывать временную и пространственную дисперсию: $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B}=\mu\vec{H}$ что дает ур.

Если среда не только стационарная, но и однородная, то $\varepsilon,\mu=\text{const}$.

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}\qquad\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}=\nabla\operatorname{div}\vec{E}-\Delta\vec{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=\operatorname{div}\frac{\vec{D}}{\varepsilon}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}\quad\Longrightarrow\quad\operatorname{div}\vec{E}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta\vec{E}-\nabla\left(\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}\right)-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-\frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}=0$$

$$\underbrace{\left\{\Delta\vec{E}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}+\frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho\right\}}$$ неоднородное волновое ур-е Даламбера для $\vec{E}$.

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}};\quad n=\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\Delta-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\square$$ – волновой оператор

$$\square\vec{E}=\frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}+\frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \nabla \operatorname{div}\vec{H} - \Delta\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = \operatorname{div}\frac{\vec{B}}{\mu} = 0$$

$$\Delta\vec{H} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j}$$

$$\Box\vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\vec{j}$$

$$\vec{i} = -\nabla\psi$$

Для описания поля достаточно 3 скалярных (или 1 векторной) ф-ций.

Вне источников $\Box f = 0$, $\Box = \Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$; $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$f(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$ [прямая и обратная волны]

2 Описание переменного ЭМ поля с помощью скалярного и векторного потенциалов. Градиентная инвариантность. Усл-е калибровки Лоренца.

Среды однородные и недиспергирующие

$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$; $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}$ [$\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$]

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{A} \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\vec{A}\right)=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\vec{A}\right)=\frac{1}{\mu}\left(\nabla\mathrm{div}\vec{A}-\Delta\vec{A}\right)$$

$$\Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+\nabla\mathrm{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi$$

I $$\boxed{\Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+\nabla\left(\mathrm{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}$$

$$\mathrm{div}\vec{E}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\mathrm{div}\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\mathrm{div}\,\nabla=\Delta$$

$$\boxed{\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{A}}$$ вычтем $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$;

II $$\boxed{\Delta\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}$$

$\vec{A}_н=\vec{A}_с-\nabla\psi$, н-новый; с-старый

3 $\vec{B}=\mathrm{rot}\vec{A}_с=\mathrm{rot}\vec{A}_н$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi_c - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_c}{\partial t} = -\nabla\varphi_н - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_н}{\partial t}$$

$$-\nabla\varphi_н - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(A_c - \nabla\psi) = -\nabla\varphi_c - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_c}{\partial t}$$

$$\nabla\varphi_н - \nabla\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \nabla\varphi_c$$

$$\varphi_н = \varphi_c + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Покажем, что всегда за счет выбора A и φ, можно: $div\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ – это усл-е калибровки Лоренца.

Пусть выбрали старые потенциалы, которые не обеспечивают условий:

$$div\vec{A}_c + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \neq 0$$

$$0 = div\vec{A}_н + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_н}{\partial t} = \underset{div\nabla=\Delta}{div}(\vec{A}_c - \nabla\psi) + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_c + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

$$\Delta\psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = div\vec{A}_c + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi_c}{\partial t}$$

I: $\Box\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$

II: $\Box\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$

$div\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$; $\qquad \varphi = -\frac{c}{\varepsilon\mu}\int div\vec{A}\,dt$

Дополнительно: Джексон стр 205-209.

③ Волновые ур-я для потенциалов. Вектор Герца. Магнитные потенциалы.

$$\operatorname{div}\vec{B}=0 \Rightarrow \vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A};\quad \vec{H}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0$$

$$\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\underbrace{\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}\right)}_{\frac{1}{\mu}(\nabla\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\vec{A})}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)+\frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\boxed{\Delta\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}+\nabla\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\operatorname{div}\left(-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

$$\operatorname{div}\nabla=\Delta$$

$$\boxed{\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A}}\;\Big|\;-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

$\vec{\Pi}$ - векторный потенциал Герца

$$\vec{A}=\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t};\quad \varphi=-\operatorname{div}\vec{\Pi}$$

Б Соотв-ет выполнению усл. калибровки Лоренца

$$\square\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$$

$$\square\vec{\Pi} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\int\vec{j}\,dt\,; \quad \vec{j} = \frac{\partial\vec{P}^{ст}}{\partial t}$$

сторонняя поляризация — дипольный момент на единицу объема

$$\square\vec{\Pi} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{P}^{ст}$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\Pi}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \nabla\operatorname{div}\vec{\Pi} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2}$$

$\vec{A} = \vec{A}^e \to \vec{A}^m$

$\varphi = \varphi^e \to \varphi^m$

$\vec{j} = \vec{j}^e \to \vec{j}^m$

$\rho = \rho^e \to \rho^m$

$\vec{E} = \vec{E}^e \to \vec{H}^m$

$\vec{H} = \vec{H}^e \to -\vec{E}^m$

$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}^e \to \vec{\Pi}^m$

$\vec{P}^{ст}, (\varepsilon, \mu) \to \vec{M}^{ст}, (\mu, \varepsilon)$

вид $\square$ не меняется

$$\operatorname{div}\vec{A}^m + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi^m}{\partial t} = 0$$

$$\square\vec{A}^m = -\frac{4\pi\varepsilon}{c}\vec{j}^m$$

$$\square\varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu}\rho^m$$

$$\square\vec{\Pi}^m = -\frac{4\pi}{\mu}\vec{M}^{ст}$$

$\vec{B}^e = \operatorname{rot}\vec{A}^e \Rightarrow \vec{D}^m = -\operatorname{rot}\vec{A}^m$ $(\vec{B}^e \to -\vec{D}^m,\ \vec{D}^m = \varepsilon\vec{E}^m)$

$\vec{E}^e = -\nabla\varphi^e - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^e}{\partial t} \Rightarrow \vec{H}^m = -\nabla\varphi^m - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^m}{\partial t}$ $(\vec{B}^m = \mu\vec{H}^m)$

$\vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^m$

$\vec{H} = \vec{H}^e + \vec{H}^m$

4. Гармонические процессы. Комплексная запись полей и ур-ий Максвелла. Комплексная диэл-ая проницаемость. Связь компл. полей с потенциалами

$f(t)$ - гармонич. во времени (монохроматический), если $f(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, при этом $A,\omega,\varphi \neq A(t), \omega(t), \varphi(t)$.

$\omega = 2\pi\nu$, $\nu = \frac{1}{T}$, T - min время через которое процесс повторяется во времени

$$f(t)=\int_0^\infty [a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]\,d\omega = \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega t+\varphi(\omega))\,d\omega$$

$$A(\omega)=\sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) \leftrightarrow \vec{E}(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) \leftrightarrow \vec{H}(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0(\vec{r})\cos(\omega t+\varphi_E(\vec{r}))$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\vec{H}_0(\vec{r})\cos(\omega t+\varphi_H(\vec{r}))$$

$$\vec{E}(\vec{r},\omega)=\vec{E}_0(\vec{r})e^{i\varphi_E(\vec{r})}$$

$$\vec{H}(\vec{r},\omega)=\vec{H}_0(\vec{r})e^{i\varphi_H(\vec{r})}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\{\vec{E}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}\}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\{\vec{H}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}\}$$

$$\mathrm{rot}(\vec{E}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}) = -\frac{\mu}{c}\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{H}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}\}}_{i\omega\vec{H}(\vec{r},\omega)e^{i\omega t}}$$

$\frac{\omega}{c} = k_0$ — волновое число в свободном пр-ве.

$k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},\omega) = -ik_0\mu\vec{H}(\vec{r},\omega)\\
&\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},\omega) = ik_0\varepsilon\vec{E}(\vec{r},\omega) + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},\omega)\\
&\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},\omega) = 4\pi\rho(\vec{r},\omega)\\
&\operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},\omega) = 0.
\end{aligned}\right\}$$

если взять по ω, фиксированной по частоте колеб. поля, будут вопросы с дисперсией

Временная (частотная) дисперсия приводит к

$\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$, $\sigma = \sigma(\omega)$

$\operatorname{div}\vec{j}(\vec{r},\omega) + i\omega\rho(\vec{r},\omega) = 0$ — ур-е непр-ти.

$$\operatorname{rot}\vec{H} = ik_0\varepsilon\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} = ik_0\varepsilon\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\left(\sigma\vec{E} + \vec{j}^{\,ст}\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = ik_0\underbrace{\left(\varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)}_{\varepsilon_к}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,ст}$$

$$\varepsilon_к = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} = \varepsilon' - i\varepsilon''$$

$$\square\vec{E} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho \Longrightarrow$$

$$\square = \Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \to \Delta + \frac{\omega^2}{v^2} \;;\; v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}};\; \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = k_0\sqrt{\varepsilon\mu} = k$$

k — волновое число в среде $\Rightarrow \Delta + k^2$

$$\Longrightarrow \boxed{\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = \frac{4\pi\mu}{c^2}ik_0\vec{j} + \frac{4\pi}{\varepsilon}\nabla\rho}$$ неодн. ур-е Гельмгольца

$\square\vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\vec{j} \rightarrow \Delta\vec{H} + k^2\vec{H} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\,\vec{j}$

калибр. Лоренца: $\mathrm{div}\vec{A} + ik_0\varepsilon\mu\varphi = 0$

$$\varphi = \frac{i}{k_0\varepsilon\mu}\,\mathrm{div}\vec{A} \rightarrow (*)$$

Можно показать, что

$\Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec{j}$

$\Delta\varphi + k^2\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho$

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$\vec{E} = \underbrace{-\nabla\varphi - ik_0\vec{A}}_{-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}} \overset{(*)}{=} \frac{-i}{k_0\varepsilon\mu}\nabla\,\mathrm{div}\vec{A} - ik_0\vec{A} = \frac{-i}{k_0\varepsilon\mu}\left(\nabla\,\mathrm{div}\vec{A} + k^2\vec{A}\right)$

$\Delta\vec{\Pi} + k^2\vec{\Pi} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\vec{p}^{\,ст}$

$\vec{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\underbrace{\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t}}_{i\omega\vec{\Pi}} \rightarrow \vec{\Pi} = -\frac{i}{k_0\varepsilon\mu}\vec{A}$

Где $\square$, там нет дисперсии. Среда однородная.

5 Комплексная теорема Пойнтинга

$\varepsilon, \mu - Re$

$\vec{H}^* \cdot \big|\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}$

$- \quad \vec{E}\cdot\big|\ \mathrm{rot}\,\vec{H}^* = -ik_0\varepsilon\vec{E}^* + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,*}_{пр} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,*}_{ст}$

$\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}^*] = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,*}_{пр}\vec{E} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,*}_{ст}\vec{E} + ik_0\left(\varepsilon\overbrace{\vec{E}\vec{E}^*}^{|E|^2} - \mu\overbrace{\vec{H}\vec{H}^*}^{|H|^2}\right) \Big| \cdot \frac{c}{8\pi}$

$\vec{S}_k = \frac{c}{8\pi}[\vec{E},\vec{H}^*]$

$$Re\,\vec{S}_k = \frac{c}{8\pi} Re\left[\vec{E},\vec{H}^*\right] = \overline{\vec{S}}^{\,T}$$

$$\boxed{div\,\vec{S}_k = -\frac{1}{2}\frac{|\vec{j}_{np}|^2}{\sigma} - \frac{1}{2}\vec{j}^{\,*}_{ст}\vec{E} + 2i\omega\,\frac{\varepsilon|\vec{E}|^2-\mu|\vec{H}|^2}{16\pi}}$$ комплекс. теорема Пойнтинга

$$\boxed{\oint\limits_S \vec{S}_k\,d\vec{S} = -\frac{1}{2}\int\limits_V \frac{|\vec{j}_{np}|^2}{\sigma}dV - \frac{1}{2}\int\limits_V \vec{j}^{\,*}_{ст}\vec{E}\,dV + 2i\omega\int\limits_V \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2-\mu|\vec{H}|^2}{16\pi}dV}$$ интегр. форме

$\mu_k = \mu' - i\mu''$; $\mu'' \geq 0$; $\mu' \gtrless 0$

$$\mu \to \mu' - i\mu'':\quad 2i\omega\frac{\varepsilon|\vec{E}|^2-\mu|\vec{H}|^2}{16\pi} \to 2\omega\frac{\mu''|\vec{H}|^2}{16\pi} + 2i\omega\frac{\overset{\varepsilon'}{\varepsilon}|\vec{E}|^2-\mu'|\vec{H}|^2}{16\pi}$$

$$Re:\ \underbrace{\oint\limits_S \overline{\vec{S}}^{\,T} d\vec{S}}_{\overline{\Pi}^T} = \underbrace{-\frac{1}{2}\int\limits_V \frac{|\vec{j}_{np}|^2}{\sigma}dV}_{\overline{Q}^T} + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)Re\int\limits_V \vec{j}^{\,*}_{ст}\vec{E}\,dV}_{\overline{A^{ст}}^T}$$

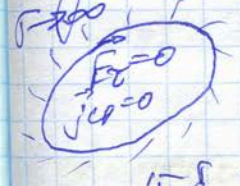
$$\overline{\Pi}^T + \overline{Q}^T = \overline{A^{ст}}^T$$

Процесс монохроматический, амплитуда поля пост.

$\overline{W}^T = const$

$$Im:\ Im\oint\limits_S \vec{S}_k\,d\vec{S} = -\frac{1}{2}Im\int\limits_V \vec{j}^{\,*}_{ст}\vec{E}\,dV + 2\omega\int\limits_V \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2-\mu|\vec{H}|^2}{16\pi}dV$$

Пусть есть V, огранич-ый идеально проводящей средой



$$\overline{W}^\varepsilon = \int\limits_V \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2}{16\pi}dV;\quad \overline{W}^m = \int\limits_V \frac{\mu|\vec{H}|^2}{16\pi}dV$$

$$S:\ \vec{S}_k\cdot\vec{n} = \frac{c}{8\pi}\left[\vec{E},\vec{H}^*\right]\vec{n}\Big|_S = \frac{c}{8\pi}\left[\overset{0}{\vec{E}_\tau},\vec{H}^*_\tau\right]\vec{n}\Big|_S = 0$$

$0 = 2\omega(\overline{W}^\varepsilon - \overline{W}^m)$; $\omega \neq 0 \Rightarrow \overline{W}^\varepsilon = \overline{W}^m$ - неявный учет того, что потери и внешние источники отсутствуют. Идеальный

6) Теорема единственности решения ур-ий Максвелла для гармонических полей.

Надо доказывать заново, т.к. нет нач. условий.

Решение ур-ий Максвелла для гармонических полей внутри области, ограниченной замкнутой пов-тью S единственно, если:

1) в V: $\vec{j}^{\,ст}$

2) на S: либо $\vec{E}_\tau$, либо $\vec{H}_\tau$

3) в V: $\sigma \neq 0$

ε, μ - Re, все потери в σ.

$\vec{E}_1, \vec{H}_1$ $\quad \vec{E}_2, \vec{H}_2$ $\quad \vec{E}_3 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2$, $\vec{H}_3 = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$

1) $\vec{j}_3^{\,ст} = 0$

2) на S: либо $\vec{E}_{3\tau} = 0$, либо $\vec{H}_{3\tau} = 0$

3) в V: $\sigma \neq 0$

Применим комплексную теорему Пойнтинга в реальной записи для поля 3:

$$\oint_S \vec{S}_3 \, d\vec{S} = 0 = -\frac{1}{2} \int_V \frac{|\vec{j}_{3пр}|^2}{\sigma} dV + 0 \leftarrow \vec{j}^{\,3ст}$$

$d\vec{S} = \vec{n}\, dS$

$$\frac{c}{8\pi} Re[\vec{E}_3, \vec{H}_3^*]\vec{n}|_S = \frac{c}{8\pi} Re[\vec{E}_{3\tau}, \vec{H}_{3\tau}^*]\vec{n}|_S = 0$$

$\vec{j}_{3пр} = \sigma \vec{E}_3$

$$\int\limits_V \sigma |\vec{E}_3|^2 dV = 0 \Rightarrow E_3 = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}_3 = -i\frac{\omega}{c}\vec{B}_3 \quad \omega \neq 0 \Rightarrow B_3 = 0$$

$$\vec{B}_3 = \mu \vec{H}_3 \Rightarrow \vec{H}_3 = 0 \; (\mu \neq 0)$$

$$\mu_k = \mu' - i\mu'' \qquad \sigma|\vec{E}_3|^2$$

$$0 = -\frac{1}{2}\int\limits_V \frac{|\vec{j}_{3np}|^2}{\sigma} dV - 2\omega \int\limits_V \frac{\mu''|\vec{H}_3|^2}{16\pi} dV \Rightarrow \vec{E}_3, \vec{H}_3 = 0$$

Не возникает разностное поле. Для него $j^* = 0$, т.е. нет источников, возбуждающих и поддерживающих; нет среднего по времени потока, т.е. поле не может пропадать в виде энергии. Свободные незатухающие колебания невозможны, т.к. по условию есть потери.

Если $E_\tau = \eta_S[\vec{H}, \vec{n}]|_S$ задать на пов-ти вместо 2) и $\mathrm{Re}\ \eta_S > 0$, то можно док-ать.

$\frac{E_\tau}{H_\tau} = \eta_S$ - характер. импеданс пов-ти.

Расписать $\vec{S}$, будут слагаемые как от ?

7 Квазистационарные процессы в проводящих средах. Распределение переменных полей и

токов в проводящем полупр-ве. Скин-эффект.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$, $T \gg \tau_м$ - максвелловское время релаксации заряда

$\rho(\vec{r}, t)$ - ?

$\rho(\vec{r}, 0) = \rho_0(\vec{r})$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underbrace{\vec{j}}_{=\sigma \vec{E}} = 0$ считаем среду однородной, т.е. $\sigma = const$

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho = 0$

$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-\frac{4\pi\sigma t}{\varepsilon}}$, $\boxed{\tau_м = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}}$

Для хорошо проводящей среды $T \gg \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$

$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) e^{-t/\tau_м}$

Это не диффузия заряда, а релаксация. Нет $\Delta\rho$

4 $T \gg \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ => $\varepsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$ - условие хорошего проводника

$\varepsilon_к = \varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \approx -i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$

$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{см} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пр}$

$\operatorname{rot} \vec{H} = ik_0\left(\varepsilon - \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\vec{E}$

$|\vec{j}_{см}| \ll |\vec{j}_{пр}|$

Все три неравенства об одном и том же.

$\operatorname{rot}\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}$

$\operatorname{rot}\vec{H} = ik_0\varepsilon_к\vec{E}$, $\varepsilon_к \approx -i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$

$\operatorname{div}\vec{E} = 0$ $\quad$ $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$

$\operatorname{div}\vec{H} = 0$

В отсутствие сторонних источников.

$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -ik_0\mu\operatorname{rot}\vec{H}$

$\nabla\operatorname{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = ik_0\varepsilon_к\vec{E}$

$\Delta\vec{E} + k_0^2\varepsilon_к\mu\vec{E} = 0$

$\Delta\vec{H} + k_0^2\varepsilon_к\mu\vec{H} = 0$

$\varepsilon \ll 4\pi\sigma/\omega$

$\omega \ll 4\pi\sigma/\varepsilon$

$\vec{j}_{пр} = \sigma\vec{E}$ мгнов. во времени и локально в пр-ве.

$\Gamma \gg$ пуст проводимость в сред. σ св. пробега

$l_E \gg l_{св.пр.}$

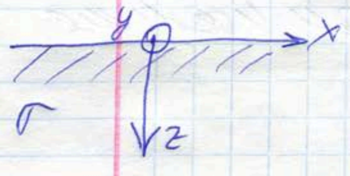
$L_E = \delta(\omega)$

$\delta(\omega) \gg l_{св.пр.}$

$\Delta\vec{E} + k_0^2\varepsilon_к\mu\vec{E} = 0$

$\tilde{k}^2 = k_0^2\varepsilon_к\mu \quad \tilde{k} = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{-\frac{i4\pi\sigma\mu}{\omega}} = \pm(1-i)\frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} = \pm\frac{1-i}{\delta}$

$\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $\boxed{\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}$ глубина проникновения эл. поля в проводник



$$\vec{j} = \vec{x}_0 j(z)$$
$$j(0) = j_0 = \text{const}$$
$$\Delta\vec{E} + \tilde{k}^2\vec{E} = 0$$
$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma}$$

$$\Delta\vec{j} + \tilde{k}^2\vec{j} = 0$$
$$\frac{d^2 j}{dz^2} + \tilde{k}^2 j = 0;\ \tilde{k} = \pm\frac{1-i}{\delta}$$
$$j(z) = A_1 e^{-i\tilde{k}z} + A_2 e^{i\tilde{k}z} \quad \tilde{k} = \frac{1-i}{\delta}$$
$$j(z) = A_1 e^{-i\frac{1-i}{\delta}z} + A_2 e^{i\frac{1-i}{\delta}z} = A_1 e^{-\frac{z}{\delta}+i\frac{z}{\delta}} + A_2 e^{\frac{z}{\delta}+i\frac{z}{\delta}}$$
$$z \to +\infty \quad A_2 = 0$$
$$j(0) = j_0 = A_1$$
$$j(z) = j_0 e^{-\frac{z}{\delta}-i\frac{z}{\delta}} = j_0 e^{-i\frac{1-i}{\delta}z}$$
$$E_x = \frac{j}{\sigma} = \underbrace{\frac{j_0}{\sigma}}_{E_0} e^{-\frac{z}{\delta}-i\frac{z}{\delta}}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}$$
$$\vec{H} = \frac{i}{k_0\mu}\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{i}{k_0\mu}[\nabla, E_x\vec{x}_0] = \frac{i}{k_0\mu}[\nabla E_x, \vec{x}_0] = \frac{i}{k_0\mu}\frac{\partial}{\partial z}E_0 e^{-i\frac{1-i}{\delta}z} \times$$
$$\times[\vec{z}_0, \vec{x}_0] = \vec{y}_0 \underbrace{\frac{1-i}{k_0\mu\delta}E_0}_{H_0} e^{-\frac{z}{\delta}-i\frac{z}{\delta}}$$

$$\boxed{H_0 = \frac{1-i}{k_0\mu\delta}E_0}$$

$$j_0 = |j_0|e^{i\varphi}$$

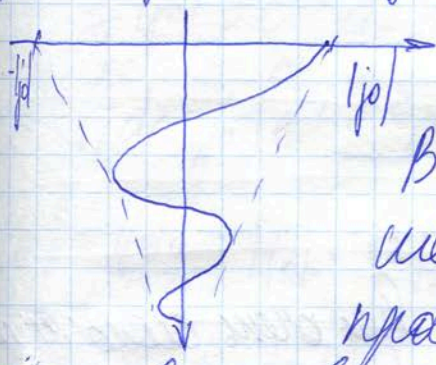
15

$j(z,t) = Re\{j(z)e^{i\omega t}\} = Re\{|j_0|e^{i\varphi}e^{-\frac{z}{\delta}-i\frac{z}{\delta}}e^{i\omega t}\} =$
$= |j_0|e^{-z/\delta}\cos(\omega t - \frac{z}{\delta}+\varphi)$

Мгновенный снимок (зав-ть от координат)

$\varphi=0,\ t=0$

$j(z,0)=|j_0|e^{-z/\delta}\cos\frac{z}{\delta}$

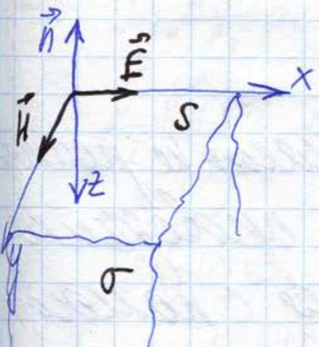


$\delta=\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}},\ \delta\sim\frac{1}{\sqrt{\omega}}$

В узком смысле - явление уменьшения проникн-ния поля в проводник с $\uparrow\omega$.

$\sigma\to\infty$: $\delta\to 0$ - в ид. пр-ник поле не проникает.

Граничное условие Леонтовича. Энергетические соотношения при скин-эффекте.



$\frac{1-i}{c\,\delta}$

$E_x(0)=E_0$

$H_y(0)=H_0=\frac{1-i}{k_0\mu\delta}E_0$

$\frac{E_x(0)}{H_y(0)}=\eta_S=\frac{k_0\mu\delta}{1-i}=\frac{\frac{\omega}{c}\mu\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}}{\sqrt{2}\sqrt{-i}}=\sqrt{\frac{\mu}{-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}}$

$\vec E_\tau=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}}[\vec n,\vec H]|_S=\eta_S[\vec n,\vec H]|_S$

импеданс скин-эф-та

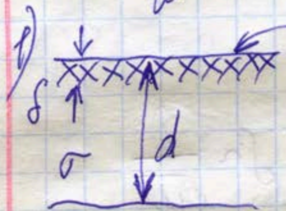
$\vec\zeta_{ск}=\frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}}$

$E_\tau = \frac{c}{4\pi} \zeta_{cn} [\vec{n}, \vec{H}]|_S$

$\zeta_S = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_k}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{4\pi\sigma}}(1+i)$;

$\sigma \to \infty,\ \zeta_S \to 0 \Rightarrow E_\tau = 0$

1)

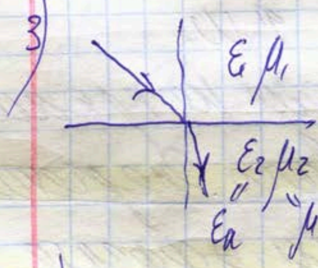


$\delta \ll d$

2)

$\delta \ll L_\tau$

3)



$\varepsilon_2\mu_2 \gg \varepsilon_1\mu_1$

$|\varepsilon_k|\mu \gg \varepsilon_1\mu_1$

При очень скользящем падении, когда уточняют гранич. условия

4)

$\delta \ll R_{кр}$

Значение прибл. усл. - позволяет не рассматривать поле внутри хорошего проводника, а учитывать наличие этого поля с помощью гран усл. на его поверхности.

17 Энергетические соотношения:

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma}\,dz$$

Мощность эл. потерь на ед. S проводника

$\underset{1}{dx}\,\underset{1}{dy}\,dz$

$$\vec{j} = \vec{j}_0\, e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}, \quad \left|e^{-i\frac{z}{\delta}}\right| = 1$$

$$Q = \frac{1}{2\sigma}|j_0|^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}}\,dz = \frac{\delta}{4\sigma}|j_0|^2$$

$$I = \int_0^\infty j\,dz = j_0 \int_0^\infty e^{-i\frac{1-i}{\delta}z}\,dz = \frac{j_0\delta}{1+i}$$

$$|I| = \frac{|j_0|\delta}{\sqrt{2}}; \quad |j_0| = \frac{\sqrt{2}}{\delta}|I|$$

$$\bar{Q} = \boxed{Q = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sigma\delta}|I|^2}$$

$$Q = \frac{1}{2}R_{ск}|I|^2, \quad R_{ск} = \frac{1}{\sigma\delta}$$

$$W^м = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mu|\vec{H}|^2}{8\pi}\,dz; \quad W^e = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon|\vec{E}|^2}{8\pi}\,dz; \quad W^m \gg W^e, \quad \varepsilon \ll \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

$$W^m = \frac{\mu}{16\pi}\int_0^\infty \left|\frac{1-i}{k_0\mu\delta}\overset{j_0/\sigma}{E_0}\, e^{-\frac{z}{\delta} - i\frac{z}{\delta}}\right|^2 dz = \frac{\mu}{16\pi}\,\frac{2}{k_0^2\mu^2\delta^2}\,\frac{|j_0|^2}{\sigma^2}\int_0^\infty e^{-\frac{2z}{\delta}}\,dz =$$

$$\left\langle |j_0| = \frac{\sqrt{2}}{\delta}|I| \right\rangle = \frac{1}{2c^2}\underbrace{2\pi\mu\delta}_{L_{ск}}\frac{|I|^2}{2}$$

$$W^м = \frac{1}{2c^2}L_{ск}\frac{|I|^2}{2}$$

$$Z_{ск} = \frac{4\pi}{c}\eta_s = \frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}} = \frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}(1+i) = \overbrace{\frac{1}{c}\sqrt{8\pi\sigma\mu\omega}\,\frac{1}{\sigma}}^{=\frac{1}{\sigma\delta} = R_{ск}} +$$

$$+ i\frac{\omega}{c^2}\underbrace{\sqrt{\frac{2\mu\pi}{\sigma\omega}}\,c} - R_{cn} + \frac{i\omega L_{cn}}{c^2}$$

$$= 2\delta\pi\mu \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}} = 2\pi\mu\delta = L_{cn}$$

$$Z_{cn} = \frac{4\pi}{c}\frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{E_x(0)}{\frac{c}{4\pi}H_y(0)} = \frac{E_x(0)\cdot 1}{I\cdot 1} = U$$

$$\frac{c}{4\pi}H_y(0) = I$$ проверить

9 Квазистационарные процессы в квазилинейных цепях с сосредоточенными параметрами. Возможность пренебрежения запаздыванием передачи взаимодействия и выделения зоны квазистатики.

$T \gg \tau_{зап}$

l

$\tau_{зап} \sim \frac{l}{v}$, $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

l - характерные параметры

$$\frac{2\pi}{\omega} \gg \frac{l}{v} \Rightarrow \frac{\omega}{v}l \ll 2\pi$$

$$\frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = k_0\sqrt{\varepsilon\mu} = k$$

$kl \ll 1$, $k - \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow l \ll \lambda$ - усл-е квазистационарности

поле успевает следить за источником

$I_0 e^{i\omega t}$ r $r \ll \lambda$

$$\vec H(r,t) = \vec H\left\{j\left(t-\frac{r}{v}\right)\right\} = k_0 e^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)} \to k_0 e^{i\omega t} \underbrace{e^{-\frac{i\omega}{v}r}}_{\approx 1}$$

$\frac{\omega}{v} r = kr \ll 1$ - зона квазистатики

$r \ll \lambda$

$e^{i\alpha} \simeq 1 \quad |\alpha| \ll \pi$

$H_\varphi = \left(\frac{2I_0}{cr}\right) e^{i\omega t}, \; r \ll \lambda$

Квазистационарность и влечёт квазистатичность

$\text{rot}\, \vec{H}_{квст} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

$\text{div}\, \vec{B}_{квст} = 0$

$\vec{H} = \vec{H}_{квст} + \vec{H}_{доб}$

$\text{rot}\, \vec{H}_{доб} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

$\vec{j} \to \vec{H}_{квст}, \vec{B}_{квст} \xrightarrow{\vec{B}/\vec{H}} \vec{E}, \vec{D} \xrightarrow{\vec{D}/\vec{E}} \vec{H}_{доб}, \vec{B}_{доб}$

$\text{rot}\, \vec{E} = -ik_0 \mu \vec{H}_{квст}$

$\frac{|\vec{E}|}{l} \sim k_0 \mu |\vec{H}_{квст}| \longrightarrow \boxed{|\vec{E}| \sim k_0 \mu l |\vec{H}_{квст}|}$

$\frac{|\vec{H}_{доб}|}{l} \sim k_0 \varepsilon |\vec{E}| \longrightarrow |\vec{H}_{доб}| \sim k_0 \varepsilon l |\vec{E}|$

$|\vec{H}_{доб}| \sim \underbrace{(k_0 \varepsilon l \cdot k_0 \mu l)}_{k^2 l^2} |\vec{H}_{квст}|$

$\frac{|\vec{H}_{доб}|}{|\vec{H}_{квст}|} \simeq (kl)^2 \ll 1$

$\frac{W^e}{W^m} \sim \frac{\varepsilon |\vec{E}|^2}{\mu |\vec{H}_{квст}|^2} \sim \frac{\varepsilon (k_0 \mu l)^2 |\vec{H}_{квст}|^2}{\mu |\vec{H}_{квст}|^2} = k_0^2 \varepsilon \mu l^2 \ll 1$

В области квазистатики W^e очень мала.

Энергия запасается в ...?

Катушка индукт. - сосредоточ. параметр

$\vec{j}\;l \ll \lambda$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{см}$$

в проводе

$I = I_0 e^{i\omega t}$

$l \ll \lambda$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \underbrace{\frac{4\pi}{c}\int \vec{j}_{см} dS}_{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}d\vec{S}}$$

L: $\vec{H} \approx \vec{H}_{квст}$

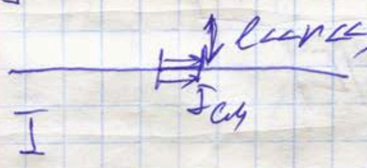
$$\oint_L \vec{H}_{квст} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$$

$$I + I_{см} \approx I$$

$$|I_{см}| \ll I, \quad I_{см} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}_{см} d\vec{S}$$

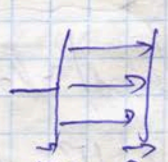
$$\oint_{L} \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_{см} \quad \Rightarrow I_{см} \approx I \;?$$

$$\oint_L \vec{H}_{квст} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I_{см}$$



$l \ll r \ll \lambda$

I, $I_{см}$



$\vec{E} \approx \vec{E}_{квст}$

$$\operatorname{div}\vec{D}_{квст} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_{квст} = 0$$

$$\rho \to \vec{E}_{квст}, \vec{D}_{квст} \xrightarrow{\vec{D}(t)} \vec{H}, \vec{B} \xrightarrow{B(t)} \vec{E}_{доб} = \vec{E}_{вихр}, \vec{D}_{доб} = \vec{D}_{вихр}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = i\omega\varepsilon \vec{E}_{квст}$$

$$\frac{|\vec H|}{l} \approx k_0 \varepsilon k |E_{\text{квст}}| \to |\vec H| \sim k_0 \varepsilon k\, l\, |E_{\text{квст}}|$$

$$\operatorname{rot} \vec E_{\text{вихр}} = -i k_0 \mu \vec H$$

$$\frac{|\vec E_{\text{вихр}}|}{l} = k_0 \mu |\vec H| \to \boxed{E_{\text{вихр}} \sim k_0 \mu l |\vec H|}$$

$$|\vec E_{\text{вихр}}| \sim \underbrace{k_0 \mu l \cdot k_0 \varepsilon l}_{(kl)^2} |E_{\text{квст}}|$$

$$\frac{|E_{\text{вихр}}|}{|E_{\text{квст}}|} \sim (kl)^2$$

$$\frac{W^m}{W^e} \sim \frac{\mu |\vec H|^2}{\varepsilon |\vec E_{\text{квст}}|^2} \sim \frac{\mu (k_0 \varepsilon l)^2 |\vec E_{\text{квст}}|^2}{\varepsilon |\vec E_{\text{квст}}|^2} = k_0^2 \varepsilon \mu l^2 = (kl)^2 \lll 1.$$

6) Законы Кирхгофа для цепей с переменными токами.

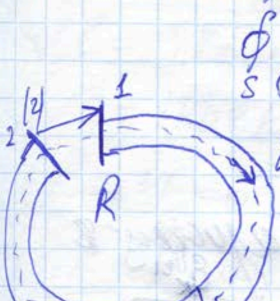
$r \ll$ скин-слоя

$$\operatorname{div} \Big| \operatorname{rot} \vec H = \frac{4\pi}{c} (\vec j + \vec j_{\text{см}})$$

$$\operatorname{div} (\vec j + \vec j_{\text{см}}) = 0$$

$$\oint (\vec j + \vec j_{\text{см}})\, d\vec S = 0$$

$$\oint_S \vec j\, d\vec S = \sum_k I_k = 0$$



$d\vec l_k$ $$\oint_{L_k} \vec E\, d\vec l_k = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_S \vec B\, d\vec S}_{\Phi_k}$$

$$\frac{\vec j}{\sigma} = \vec E + \vec E^{\text{ст}}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec j}{\sigma}\, d\vec l_k = \int_{(1)}^{(2)} \vec E\, d\vec l_k + \int_{(1)}^{(2)} \vec E_{\text{ст}}\, d\vec l_k$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l}_k = \oint_{L_k} \vec{E} d\vec{l}_k - \int_{(2)}^{(1)} \vec{E} d\vec{l}_k$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^{ст} d\vec{l}_k = \mathcal{E}_k^{ст}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l}_k = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t} + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l}_k}_{U_k \text{ (по внутр. области конденсатора)}} + \mathcal{E}_k^{ст}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l}_k = \int_{(1)}^{(2)} \frac{I_k}{\sigma S} dl_k = I_k \int_{(1)}^{(2)} \frac{dl_k}{\sigma S} = I_k R_k$$

Пои колеблется квазистационарность сенкорёжно.

$C_k = \frac{q_k}{V_k}$ – V_k отстает от измерения на обкладках в общем случае не верно

$V_k \approx \frac{q_k}{C_k}$ чем лучше квазистацион-ть, тем верней

$\dot{q}_k + I_k = 0 \rightarrow q_k = -\int I_k dt$

$$\boxed{V_k = -\frac{1}{C_k}\int I_k dt}$$

$$\Phi_k = \Phi_{kk} + \sum_{m\neq k} \Phi_{km}$$

$\left.\begin{array}{l}\Phi_{kk} = \frac{1}{c} L_{kk} I_k \\ \Phi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m\end{array}\right\}$ учитываем усл. квазистац-ти

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(L_{kk} I_k) + R_k I_k + \frac{1}{C_k}\int I_k dt = \mathcal{E}_k^{ст} + \underbrace{(-1)\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\sum_{m\neq k} \Phi_{km}}_{\mathcal{E}_k^{ind}}, \quad \Phi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m$$

$$\frac{1}{c^2}\sum_m L_{km}\dot{I}_m + R_k I_k + \frac{1}{C_k}\int I_k dt = \varepsilon_k^{ст}$$

$$\frac{1}{c^2}L\dot{I} + RI + \frac{1}{C}\int I dt = \varepsilon^{ст}$$

$$\varepsilon^{ст} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \quad I = I_0 e^{i\omega t}$$

$$\left(\frac{i\omega L}{c^2} + R + \frac{1}{i\omega C}\right) I_0 e^{i\omega t} = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$z I_0 = \varepsilon_0$$

$$z = R + i\omega\left(\frac{L}{c^2} - \frac{1}{\omega^2 C}\right)$$

$$\varepsilon_0 = 0, \; I_0 \neq 0$$

$$z = 0 \quad R = 0 \qquad \omega = \frac{c}{\sqrt{LC}}$$

11) Однородные плоские волны в непоглощающей изотропной среде. Дисперсионное соотношение. Поляризация волны, длина волны, фазовая скорость, характеристический импеданс, плотность потока энергии.

$$\text{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H} \rightarrow \text{div}\,\vec{B} = 0 \quad \mu = const \quad \text{div}\,\vec{H} = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = ik_0\varepsilon\vec{E} \rightarrow \text{div}\,\vec{D} = 0 \quad \varepsilon = const \quad \text{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\Delta\vec{E} + k^2\vec{E} = 0$$

$$\Delta\vec{H} + k^2\vec{H} = 0$$

$$k = \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k_0}\underbrace{\sqrt{\varepsilon\mu}}_{n} = \frac{\omega}{v} \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i\vec{k}\vec{r}} \qquad \vec{k} = const$$

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

$k_{x,y}=0 \quad k_z\neq 0$

$\vec{E}(z)=\vec{x}_0 \underbrace{E_0 e^{-ik_z z}}_{E_x(z)}$

$\frac{d E_x(z)}{dz^2}+k^2E_x(z)=0$

$(-k_z^2+k^2)\underset{\neq 0}{E_0} e^{-ikz}=0 \quad k_z=k$

$\vec{E}=\vec{x}_0 E_0 e^{-ikz}$

$\nabla e^{-i\vec{k}\vec{r}}=-i\vec{k} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$

$\vec{A}=\underset{\to const}{\vec{A}_0} e^{-i\vec{k}\vec{r}}$

$\operatorname{div}\vec{A}=(\nabla,\vec{A})=(\nabla,\vec{A}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}})=(\nabla e^{-i\vec{k}\vec{r}},\vec{A}_0)=(-i\vec{k},\vec{A})$

$\operatorname{rot}\vec{A}=[\nabla,\vec{A}]=\ldots[-i\vec{k},\vec{A}]$

$\operatorname{rot}\vec{E}=-ik_0\mu\vec{H}$

$\vec{H}=\frac{i}{k_0\mu}[\underset{\vec{k}=k\vec{z}_0}{\nabla},\vec{E}]=\frac{i}{k_0\mu}[-ik\vec{z}_0,E_0e^{-ikz}\vec{x}_0]=\underbrace{\frac{k}{k_0\mu}E_0e^{-ikz}}_{H_y(z)}\vec{y}_0$

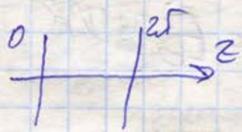
$\frac{k}{k_0\mu}=\frac{k_0\sqrt{\varepsilon\mu}}{k_0\mu}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}=\frac{1}{\eta},\ \eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ волновой импеданс среды

$H_y=\frac{1}{\eta}E_x\,|\cdot e^{i\omega t};\ E_0=|E_0|e^{i\varphi}$

$E_x(z,t)=|E_0|\cos(\omega t-kz+\varphi)$

25 $H_y(z,t)=\frac{1}{\eta}|E_0|\cos(\omega t-kz+\varphi)$

$\omega t-kz+\varphi=const$



Плоской монохром. эм волной называется эм-волна, фаза которой в каждый момент времени принимает одно значение на системе || плоскостей.

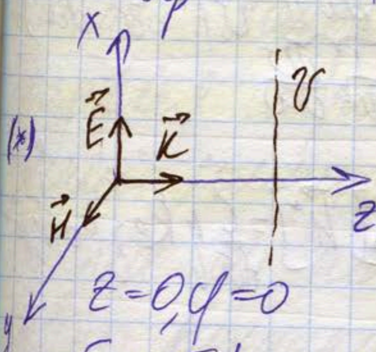
Однородная волна - пов-ть постоянной фазы является также пов-тью постоянной амплитуды. (Неоднородная в противном случае)

Фазовый фронт волновой фронт

$\frac{d}{dt}\Big|\ \omega t - kz + \varphi = const$

$\omega - k\underbrace{\dot z}_{v_{ф}} = 0 \qquad v_{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

(*)

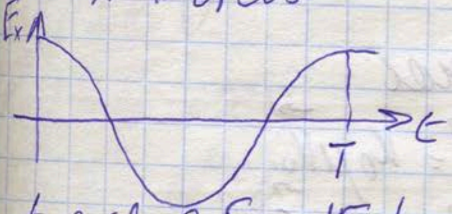


$(\vec{E}, \vec{H}, \vec{k})$

поляризация ТЕМ

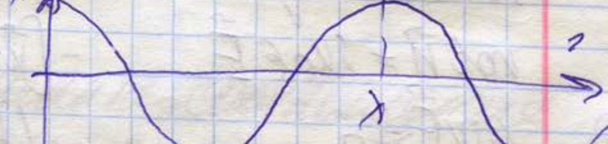
$z = 0, \varphi = 0$

$E_x = |E_0| \cos \omega t$



$\omega T = 2\pi \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$

$t = 0, \varphi = 0, E_x = |E_0| \cos kz$:



$k\lambda = 2\pi \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$

$k = \frac{\omega}{v}$, $\lambda = \frac{2\pi}{\omega} v = vT$

$\vec{E}_\perp = \eta_\perp [\underbrace{\vec{H}, \vec{n}}]$ поперечный характ. импеда...

$[\vec{H}_\perp, \vec{n}]$ попер. по отношению направо...

$\vec{n} = \vec{z}_0 : \vec{E}_\perp = \eta_\perp [\vec{H}, \vec{z}_0]$

$(*)$ $\vec{E} = \eta [\vec{H}, \vec{z}_0]$ $\quad \vec{E} = \vec{E}_\perp$

$\vec{H} = \vec{H}_\perp$

$\eta_\perp = \eta$ только в случае $\vec{n} = \vec{z}_0$ (напр-ние распр. волны) + волна однор. плоская

$v_{гр} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

$$\frac{1}{v_{гр}} = \frac{\partial k}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\Big(\overbrace{\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}}^{=\frac{\omega}{v}}\Big) = \frac{1}{v} + \omega \underbrace{\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{1}{v}}_{-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \omega}} = \frac{1}{v}\Big(1 - \frac{\omega}{v}\frac{\partial v}{\partial \omega}\Big)$$

$\frac{\partial v}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow v_{гр} = v$

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\eta[\vec{H}, \vec{z}_0], \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\eta \mathrm{Re}\{\vec{z}_0 (\vec{H}, \vec{H}^*) - \vec{H}\underbrace{(\vec{z}_0, \vec{H}^*)}_{=0}\} = \frac{c}{8\pi}\eta |\vec{H}|^2 \vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{\eta}|\vec{E}|^2 \vec{z}_0$$

Рассмотрим произвольное

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}$ $\qquad [\vec{k}, \vec{E}_0] = k_0 \mu \vec{H}_0$

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0\varepsilon\vec{E}$ $\qquad -[\vec{k}, \vec{H}_0] = k_0 \varepsilon \vec{E}_0$

27 $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\qquad (\vec{k}, \vec{E}_0) = (\vec{k}, \vec{H}_0) = 0.$

$\mathrm{div}\,\vec{H} = 0$

$\vec{H}_0 = \frac{1}{k_0\mu}[\vec{k}, \vec{E}_0]$, $\vec{k} = k_0\vec{n}$

$\underbrace{[\vec{k}, [\vec{k}, \vec{E}_0]]}_{} = k_0^2 \varepsilon\mu \vec{E}_0$

$= \vec{k}(\underset{0}{\vec{k}, \vec{E}_0}) - (\vec{k}, \vec{k})\vec{E}_0$

$\{(\vec{k}, \vec{k}) - k_0^2 \varepsilon\mu\}\vec{E}_0 = 0$

$\boxed{(\vec{k}, \vec{k}) = k_0^2 \varepsilon\mu}$ - дисперсионное уравнение для плоских эл волн в однородной среде

12 Неоднородные плоские волны в непоглощающей изотропной среде (волны с комплексным волновым вектором). Дисперсионное соотношение. Поляризация волн, длина волны, фазовая скорость, поперечные характеристический импеданс, плотность потока энергии

В среде без потерь неоднородные плоские волны возникают только в случае:

$-\vec{k}_1 \perp \vec{k}_2$

$\vec{k} = h\vec{z}_0 - i\varkappa\vec{x}_0$

$k_1^2 - k_2^2 = k_0^2 \varepsilon\mu$

$\boxed{h^2 - \varkappa^2 = k_0^2 \varepsilon\mu}$ дисперсионное соотношение для неоднородной пл. волны

$$e^{-i\vec{k}\vec{r}} = e^{-i(h\vec{z}_0 - i\varkappa\vec{x}_0)\cdot\vec{r}} = e^{-ihz-\varkappa x} = e^{-\varkappa x} e^{-ihz}$$

амплитуда поля бегучесть

$$|E_0|e^{i\varphi}\times e^{i\omega t} \sim e^{-\varkappa x}\cos(\omega t - hz + \varphi)$$

h играет роль компоненты k_z. Амплитуда зависит от координат.

Ур-е пов-ти постоянной фазы.

$\omega t - hz + \varphi = const$

$z = const$ это плоскости, поэтому волна плоская

Пов-ти постоянной амплитуды.

$x = const$ - волна неоднородная, т.к. пов-ти фазы $= const$ и амплитуды $= const$ не совпадают

$\omega t - hz + \varphi = const$

$\omega - h\dot{z} = 0$

$v_\varphi = \dfrac{\omega}{h}$

$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\varkappa x}\cdot e^{-ihz}$

$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{-\varkappa x}\cdot e^{-ihz}$

1 $\vec{H}_0 = H_0\vec{y}_0$

$$\vec{E}_0 = -\frac{1}{k_0\varepsilon}[\underbrace{\vec{k}}_{h\vec{z}_0 - i\varkappa\vec{x}_0}, \underbrace{\vec{H}_0}_{H_0\vec{y}_0}] \Rightarrow E_0 = \frac{H_0}{k_0\varepsilon}(h\vec{x}_0 + i\varkappa\vec{z}_0)$$

Это тип E = ТМ-поляризация

утверждаем, что есть продольная компонента $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ — поперечно-магнитный тип.

$\vec{H} = \vec{H}_\perp$ $(H_z = 0)$ поперечно-магнитный тип

$\vec{E}$ поляр. эллиптически в xz.

$\vec{E}_0 = E_0 \vec{y}$

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{k_0 \mu}[\underbrace{\vec{k}}_{h\vec{z}_0 - i\varkappa\vec{x}_0}, \underbrace{\vec{E}_0}_{E_0\vec{y}_0}] \Rightarrow \vec{H}_0 = -\frac{E_0}{k_0\mu}(h\vec{x}_0 + i\varkappa\vec{z}_0)$$

ТЕ: $\vec{E} = \vec{E}_\perp$ $(E_z = 0)$ Н-магнитный тип

$H_z \neq 0$, $E_z = 0$

Продольная компонента там, где она есть, будет сдвинута по фазе на $\frac{\pi}{2}$ относительно поперечных

$$v_\varphi = \frac{\omega}{h}, \quad h^2 - \varkappa^2 = k_0^2 \varepsilon \mu$$

фазовая скорость однородной плоской волны

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\underbrace{k_0^2 \varepsilon \mu}_{k^2} + \varkappa^2}} < \frac{\omega}{k} = v \equiv \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$v_\varphi < v$ — медленная волна (длина волны по z)

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{h} < \frac{2\pi}{k} = \lambda \text{ (однор. плоской)}$$

$$\vec{E}_\perp = \eta_\perp [\underbrace{\vec{H}}_{\vec{H}_\perp}, \vec{z}_0]$$ удобно для ТМ

поперечный характ. импеданс. Вводится для бегущей волны!

$$[\vec{E}_\perp, \vec{z}_0] = \eta_\perp[[\vec{H}, \vec{z}_0], \vec{z}_0] = \eta_\perp\{\vec{z}_0(\overset{H_z}{\vec{H}, \vec{z}_0}) - \vec{H}(\overset{1}{\vec{z}_0, \vec{z}_0})\}$$

$$\frac{1}{\eta_\perp}[\vec{E}, \vec{z}_0] = -(\vec{H} - H_z\vec{z}_0) = -H_\perp$$ (убили продольную компоненту)

$$\vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec{z}_0, \vec{E}]$$ - удобно для TE

TM:	TE:
$E_x = \eta_\perp^{(TM)} H_y$	$E_y = -\eta_\perp^{(TE)} H_x$
$\eta_\perp^{(TM)} = \frac{h}{k_0\varepsilon}$	$\eta_\perp^{(TE)} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k_0\mu}{h}$

TE: $\vec{S} = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[E_y\vec{y}_0, H_x^*\vec{x}_0 + H_z^*\vec{z}_0]$

$\mathrm{Re}(E_y$

Вклад в перенос энергии даёт поперечная компонента (в среднем по времени)

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi}\frac{h}{k_0\mu}|E_y|^2\vec{z}_0 = \{E_yE_y^* = |E_y|^2; \frac{h}{k_0\mu} = \frac{1}{\eta_\perp^{(TE)}}\} = \frac{c}{8\pi}\eta_\perp^{TE}|H_x|^2\vec{z}_0$$

13) Плоские волны в поглощающей изотропной среде. Выражение для комплексного волнового числа при наличии поглощения.

[31] $(\vec{k}, \vec{k}) = k_0^2\varepsilon\mu$

$\varepsilon \to \varepsilon_к = \varepsilon' - i\varepsilon''$

$\mu \to \mu_к = \mu' - i\mu''$

$\vec{k} \to \vec{k}' - i\vec{k}''$

$\varepsilon = \varepsilon_к \quad (\vec{k}, \vec{k}) = k_0^2 \varepsilon_к \mu$

$\vec{k}' \parallel \vec{k}''$ допуская потери, поэтому находится

$k'^2 - k''^2 = k_0^2 \varepsilon' \mu$

$-2k'k'' = -k_0^2 \varepsilon'' \mu$

$\vec{k}' \parallel \vec{k}'' \parallel \vec{z}_0 \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(k' - ik'')z} = \vec{E}_0 e^{-k''z} \cdot e^{-ik'z}$

Потери на нагрев среды

$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_к}} [\vec{H}, \vec{z}_0]$

$\vec{E}, \vec{H}$ не синфазны. Наличие потерь приводит к сдвигу фаз.

$\varepsilon'' = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$

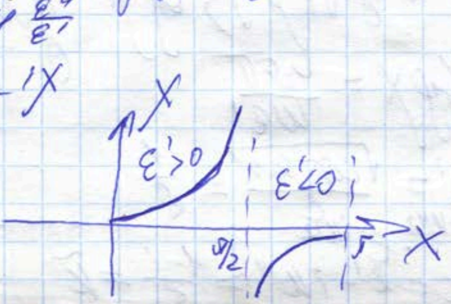
$2k'k'' = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{4\pi\sigma}{\omega} \mu = \frac{2}{\delta^2} \quad \left(\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}\right)$

Вводят угол потерь χ: $\operatorname{tg}\chi = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$

$\varepsilon_к = \varepsilon' - i\varepsilon'' = |\varepsilon_к| e^{-i\,\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}}$

$\chi = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \quad \varepsilon_к = |\varepsilon_к| e^{-i\chi}$

$\varepsilon'' > 0, \ \varepsilon' \gtrless 0$



$$2k'k'' = k_0^2\varepsilon'\mu\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

$$2k'k'' = k_0^2\varepsilon'\mu\,\mathrm{tg}\,\chi$$

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\mu\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\chi}+\frac{1}{2}\right]$$

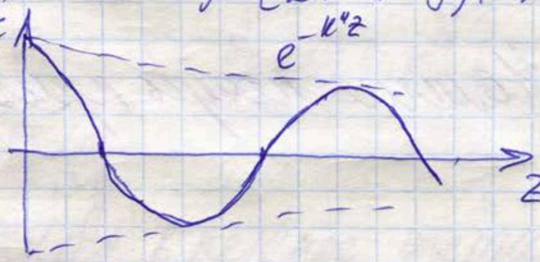
$$k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon'\mu\left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\chi}-\frac{1}{2}\right]$$

1) $\mathrm{tg}^2\chi = \left(\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)^2 \ll 1$

$\varepsilon' > 0$

$k' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu}$

$$k'' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\chi\right)-\frac{1}{2}\right\}^{1/2} = k'\frac{\mathrm{tg}\,\chi}{2} \approx k'\frac{\chi}{2}$$



$k'' \ll k'$

$e^{-k''z}\cdot e^{-ik'z}$

$L = 1/k''$ - масштаб спадания

2) $\mathrm{tg}^2\chi \gg 1$

$k'' \approx k'$

$k' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu}\sqrt{\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\chi}$ для определённости $\varepsilon' > 0$

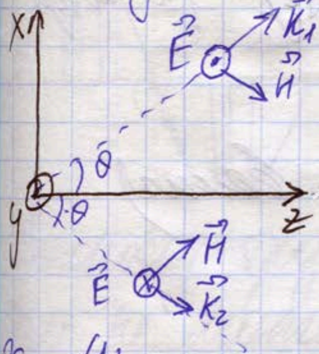
$\mathrm{tg}\,\chi = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon'}$

$k' = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}}{c} = \frac{1}{\delta}$

$e^{-k''z}\cdot e^{-ik'z}$

$k = k' - ik'' \approx \frac{1-i}{\delta} = \tilde{k}$

14. Неоднородная плоская волна как суперпозиция двух однородных плоских волн. Поляризация поля, длина волны, фазовая скорость, поперечный характеристический импеданс, плотность потока энергии.



$$k_z = k\cos\theta$$

$$k_x = k\sin\theta$$

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 e^{-ik_x x - ik_z z} + (-\vec{y}_0) E_0 e^{ik_x x - ik_z z} = \vec{y}_0 \underbrace{(-2iE_0)}_{E_{0\Sigma}} \sin(k_x x) e^{-ik_z z}$$

$$v_{ф} = \frac{\omega}{k_z}$$

Поверхность пост. фазы $z = const$ } неоднородная

Поверхность пост. ампл. $x = const$ } плоская волна

$\vec{E} = 0$, если $k_x x = \pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0\mu} \operatorname{rot}\vec{E} = \frac{i}{k_0\mu} \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \vec{x}_0 H_x + \vec{z}_0 H_z$$

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_y$$

$$H_x = -\underbrace{\left(\frac{k_z}{k_0\mu}\right)}_{=\frac{\cos\theta}{\eta}} E_{0\Sigma} \sin(k_x x) e^{-ik_z z}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$H_z = \underbrace{\left(\frac{ik_x}{k_0\mu}\right)}_{=\frac{\sin\theta}{\eta}} E_{0\Sigma} \cos(k_x x) e^{-ik_z z}$$

TE-поляризация

TE(H) → TM(E) достаточно:

$\vec{E} \to \vec{H}$ $\varepsilon \to \mu$

$\vec{H} \to -\vec{E}$ $\mu \to \varepsilon$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - k_x^2}} > \frac{\omega}{k} = v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$v_\varphi > v$ волна быстрая

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} > \frac{2\pi}{k} = \lambda \text{ (одн. плоская волна)}$$

$$\vec{E}_\perp = \eta_\perp[\vec{H}, \vec{z}_0]$$

$$\vec{H}_\perp = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec{z}_0, \vec{E}]$$

$$TE: \eta_\perp^{(TE)} = \frac{-E_y}{H_x} = \frac{k_0\mu}{k_z} = \frac{k_0\mu}{h}$$

формально совпадает с номин. волновым (векторо) $k_z = h$ - так принято / постоянная распр-ния

$$TM: \eta_\perp^{(TM)} = \frac{k_z}{k_0\varepsilon} = \frac{h}{k_0\varepsilon}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi}Re[\vec{E}, \vec{H}^*] \underset{TE}{=} \frac{c}{8\pi}Re[E_y\vec{y}_0, H_x^*\vec{x}_0 + H_z^*\vec{z}_0] \ominus$$

$Re(E_y H_z^*) = 0$ энергия определяется $\perp$ компонентой

$$\ominus \frac{c}{8\pi}Re(-E_y H_x^*)\vec{z}_0 = \frac{c}{8\pi}\frac{k_z}{k_0\mu}|E_{0\varepsilon}|^2 \sin^2(k_x x)\vec{z}_0$$

15 Конструирование поля в волноводе из и-

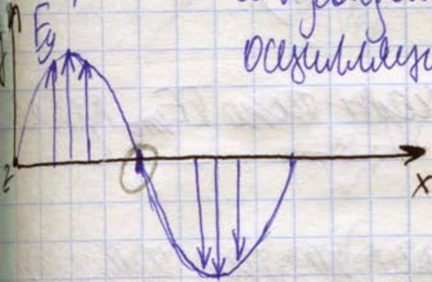
35 порядных плоских волн (на примере волн

(TE прямоугольного волновода).

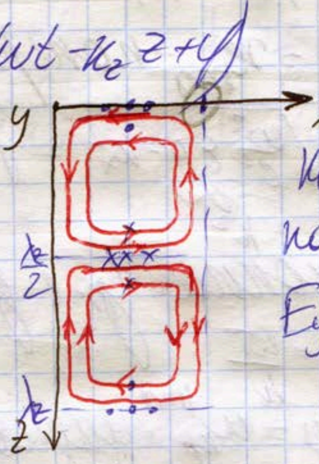
$E_{0\varepsilon} = |E_{0\varepsilon}| e^{i\varphi}$

$E_y(\vec{r},t) = |E_{0\varepsilon}| \sin(k_x x)\cdot\cos(\omega t - k_z z + \varphi)$

$t=0, \varphi=0$



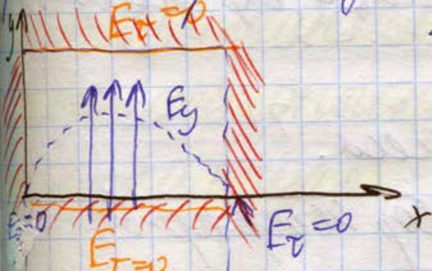
синусоидальная осцилляция



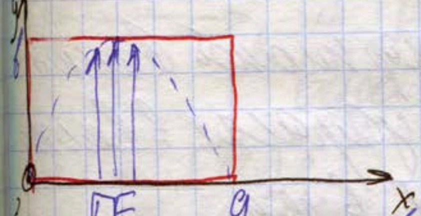
косинусоидальная

$E_y \sim H_x$

Волновод - труба, стенки которой проводники. Поле не может выбраться через бока. Рассматриваем прямоугольный волновод.



Заметаллизируем, гран. усл. останутся такими же. Получим поле, которое тоже решение.



TE_{10}

Получим собственную волну (собств. моду) волновода

TE_{m0} — кол-во вариаций по x — под

TE_{m0}, $m=1,2$

$k_x X = \pi m \to E_y = 0$

$k_x a = \pi m, \ m = 1, 2, \dots$

$k_x = \frac{\pi m}{a} = \varkappa_{m0}$ - поперечное волновое число

$$k_z = h = \sqrt{\underbrace{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu}_{k^2} - k_x^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}$$

Дисперсионное ур-е для моды типа TE_{m0} прям.

$\lambda_z = \lambda_в = \frac{2\pi}{h}$

$h = 0$: $\omega = \omega_{кр}^{(m0)}$ - индивид. для каждого импеданс

$\omega_{кр} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\varkappa$, $\varkappa = \frac{\pi m}{a}$

$\omega > \omega_{кр}$ для m моды данного типа h - Re - волна вдоль z

$\omega < \omega_{кр}$: h - Im по z не бегущая, а exp спадание (возрастание)...

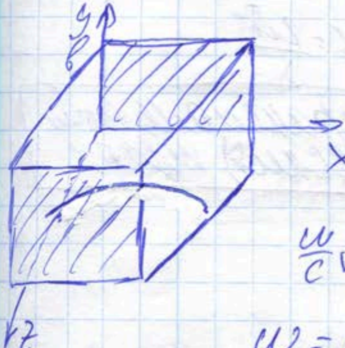
Моды не распростр-ющиеся. ?

$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{k}\Big|_{\omega = \omega_{кр},\ k = \varkappa} = \frac{2\pi}{\varkappa}$ в однор. неогр. пр-ве

$\omega > \omega_{кр}$: $\underset{\frac{2\pi}{k}}{\lambda} < \lambda_{кр}$ - длина однор. плоской волны мала, волна убиралась в волноводе и распр-сь в нем

В общем случае надо решать краевые задачи э/д.

Собственные моды резонатора аналогично



Между узлами: $\frac{\lambda_z}{2} = b = d$, $\lambda_z = \frac{2\pi}{h}$ $\Big\}$ $h = \frac{\pi l}{d}$

$$k^2 = \underbrace{k_x^2}_{æ^2} + \underbrace{k_z^2}_{h^2} = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{d}\right)^2$$

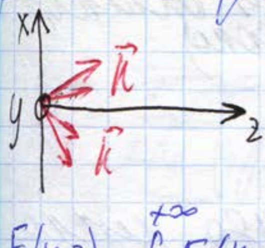
$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi l}{d}\right)^2}$$

Свободные колебания (без источника): $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$

Вынужденные: $\varepsilon(\omega_{mn})$, $\mu(\omega_{mn})$

9. Представление поля эл волнового пучка в виде суперпозиции однородных плоских волн. Квазиоптический пучок. Зона геометрической оптики. Зона Френеля и дифракционная зона.



$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \qquad k^2 = k_x^2 + k_z^2$$

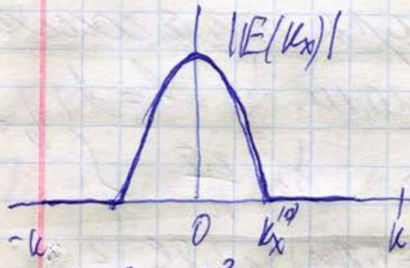
$$\vec E(x,z) = E(x,z)\,\vec z_0$$

Будем суммировать компоненты волн:

$$E(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{E(k_x)}_{\text{простр. спектр пучка}} e^{-ik_x x - i\sqrt{k^2-k_x^2}\,z}\, dk_x$$

Поле – суперпозиция

$$z=0:\ E(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(k,x)\, e^{-ik_x x}\, dk_x$$



$k_x^{(0)} \ll k$

$k_x^{(0)} \sim \frac{2\pi}{\lambda_\perp} \ll k = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\boxed{\lambda_\perp \gg \lambda}$ параксиальный (квазиоптический) пучок

$k x^2 \ll R^2$

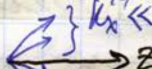
$\sqrt{1+\xi} = 1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{8} + \dots$

$k_z = \sqrt{k^2 - k_z^2} = k\sqrt{1-\frac{k_x^2}{k^2}} \sim k\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k_x^2}{k^2} - \frac{1}{8}\frac{k_x^4}{k^4} + \dots\right)$

Поле пучка.

$$E(x,z) = e^{-ikz}\int_{-k_x^{(0)}}^{k_x^{(0)}} E(k_x)\, e^{-ik_x x + i\left(\frac{k_x^2}{2k} + \frac{k_x^4}{8k^3} + \dots\right)z}\, dk_x$$

$$\int E(k_x)\, e^{-ik_x x + i\left(\frac{k_x^2}{2k} + \frac{k_x^4}{8k^3} + \dots\right)z}\, dk_x = E^{(0)}(x,z)$$



$k_x^{(0)} \ll k$ $E^{(0)}$ - медленно меняющаяся вдоль ф-я по масштабу λ. У нее и e^{-i} складывается квазиоптический пучок.

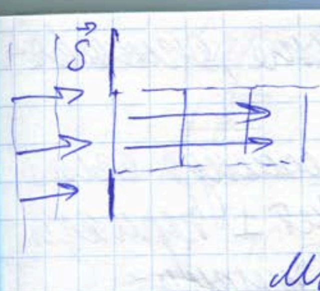
① $\boxed{\frac{k_x^2}{2k}|z| \ll \pi}$ зона геометрической оптики (прожекторная зона)

$z>0$, $e^{\dots} \approx 1$, $|z| \ll \pi$

$$E^{(0)}(x,z) \approx \int E(k_x)\, e^{-ik_x x}\, dk_x = E(x,0)$$

В каждом сечении z амплитуда пучка повторяет входную. Распространение без искажен

$k_x^{(0)} \sim \frac{2\pi}{\lambda_\perp}$ $\frac{4\pi^2}{\Lambda_\perp^2}\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{2\pi} z \ll \pi$ $\frac{\lambda z}{\Lambda_\perp^2} \ll 1$



Параметр Френеля: $p = \frac{\sqrt{\lambda z}}{\Lambda_\perp}$

$p^2 \ll 1$ $\quad \sqrt{\lambda z} \ll \Lambda_\perp$

На апертуре пучка укладывается много зон Френеля.

$\frac{k_x^4}{8k^3} z \ll \pi$

$\frac{(2\pi)^4}{\Lambda_\perp^4}\frac{1}{8}\frac{\lambda^3}{(2\pi)^3} z \ll \pi \to \frac{\lambda z}{\Lambda_\perp^2} \ll 4\left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2 \quad \gg 1$

$\boxed{p^2 \ll 4\left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2}$ дифракционная зона

$p \sim 1$ – зона Френеля

$p^2 \gg 1$ – зона Фраунгофера

$1 \ll p^4 \ll \left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2$

$\left.\begin{array}{l} \frac{\lambda z}{\Lambda_\perp^2} \ll 4\left(\frac{\Lambda_\perp}{\lambda}\right)^2 \\ z \ll k^3 \Lambda_\perp^4 = \frac{k\Lambda_\perp^2}{\left(\frac{1}{k\Lambda_\perp}\right)^2} \end{array}\right\}$ эквивалентно дифф. зоне

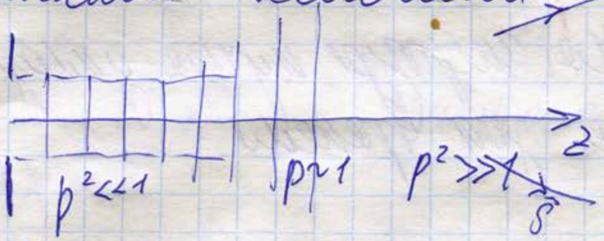
убедиться что можно получить

$\boxed{\theta_g = \frac{1}{k\Lambda_\perp}}$ дифракционная расходимость пучка

$$E^{(0)}(x,z) = \int E(k_x) e^{-ik_x x + i\frac{k_x^2}{2k}z} dk_x$$

$$D\underbrace{\frac{\partial^2 E^{(0)}(x,z)}{\partial x^2}}_{\int(-ik_x)^2\dots dk_x} = \underbrace{\frac{\partial E^{(0)}(x,z)}{\partial z}}_{\int\left(\frac{ik_x^2}{2k}\right)\dots dk_x}, \quad \boxed{D = -\frac{i}{2k} = \frac{1}{2ik}}$$

Это ур-е параболического типа, описывает медленные величины



цилиндр. волна нет ⊥ переноса энергии

Диффузия по координате x. Происходит поперечная диффузия энергии и пучка, называемая дифракцией Френеля

концепция 1: интерференция от вторичных источ.

концепция 2: дифракция как интерпретация дифракции.

17 Уравнение поперечной диффузии (параболическое ур-ие) для амплитуды волнового пучка и его решение.

$$D\frac{\partial^2 E^{(0)}(x,z)}{\partial x^2} = \frac{\partial E^{(0)}(x,z)}{\partial z}, \quad D = -\frac{i}{2k} = \frac{1}{2ik}$$

$$\vec E = \underbrace{\vec E(x,z)}_{E^{(0)}e^{-ikz}}\vec y_0 = \underbrace{E^{(0)}(x,z)\vec y_0}_{\vec E^{(0)}}e^{-ikz}$$

Расплыв в пр-ве в поперечном напр-ии

$$\boxed{41} \quad E^{(0)}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D z}}\int_{-\infty}^{+\infty} E^{(0)}(x',0)\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4Dz}}\,dx'$$

Решение (из ММФ):

$$E^{(0)}(x,z) = \sqrt{\frac{k}{-i2\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} E^{(0)}(x',0)\, e^{-\frac{ik(x-x')^2}{2z}}\, dx'$$ (для 2D пучка)

$$E_i(x,y,z) = \iint E_i(\overbrace{\vec{k}_\perp}^{k_x k_y})\, e^{-i\vec{k}_\perp\vec{r}_\perp - i\sqrt{k^2-k_\perp^2}\, z}\, \underbrace{dk_\perp}_{dk_x dk_y} =$$

$i = x, y, z$

$\vec{k}_\perp \vec{r}_\perp = k_x x + k_y y$

$k_\perp^{(0)} \ll k$

$$= e^{-ikz} \underbrace{\iint E_i(\vec{k}_\perp)\, e^{-i\vec{k}_\perp\vec{r}_\perp + \frac{ik_\perp^2}{2k} z}\, dk_\perp}_{E_i^{(0)}(x,y,z)},$$

$$\mathcal{D}\Delta_\perp \vec{E}^{(0)} = \frac{\partial \vec{E}^{(0)}}{\partial z}$$

поперечная часть Δ, сумма по x и y.

Поведение пучка в $l \ll \rho^2$, вывод?

12. Изотропные среды с временной дисперсией. Связь между индукцией и напряжённостью поля. Мощность джоулевых потерь в среде с временной дисперсией.

Простр. дисперсия не учитывается.

$$D_i(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\varepsilon}_{ij}(t-t')\, E_j(t',\vec{r})\, dt'$$

i-я компонента поля $\vec{D}$ определяется i-ой компонентой поля $\vec{E}$.

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(t-t') = \tilde{\varepsilon}(t-t')\,\delta_{ij}$$

$$\vec{D}(t) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\varepsilon}(t-t')\, \vec{E}(t')\, dt'$$

$\tau = t - t'$

$d\tau = -dt'$

$$\boxed{\vec{D}(t) = \int_{0}^{\infty} \tilde{\varepsilon}(\tau)\, \vec{E}(t-\tau)\, d\tau}$$

мат. ур-е для изотр. среды с простр. дисперсией.

Поле почти всегда представимо Фурье:

$$\vec{E}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\vec{E}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$\vec{D}(t)=\int_{0}^{\infty}\tilde{\varepsilon}(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(\omega)e^{i\omega(t-\tau)}d\omega\right)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{0}^{\infty}\tilde{\varepsilon}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right\}$$

$$\times E(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\vec{D}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{D}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\vec{D}(\omega)=\int_{0}^{\infty}\tilde{\varepsilon}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\,\vec{E}(\omega)=\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega)$$

$$\varepsilon(\omega)=\int_{0}^{\infty}\tilde{\varepsilon}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$\tilde{\varepsilon}(\tau)$ – ф-я влияния

част. случай: $\tilde{\varepsilon}(\tau)=\varepsilon\delta(\tau)\Rightarrow\varepsilon(\omega)-\varepsilon$

$\vec{E}(\vec{r})=\int\vec{E}(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{r}}d\vec{k}$ – простр. интеграл Фурье

$$D_i(\omega,\vec{k})=\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})E_j(\omega,\vec{k})$$

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)-i\varepsilon''(\omega)$$

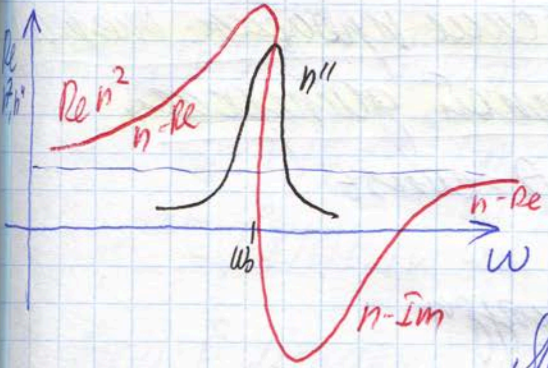
$$\varepsilon''=\frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega}$$

$\varepsilon'(\omega)\Leftrightarrow\varepsilon''(\omega)$ (существует однозначная связь)

Это связь выражается соот-ми Крамерса-Крони

Из них: среда с дисперсией – это всегда с

да с потерями, обратное верно ($\exists\,\varepsilon'\rightleftarrows\varepsilon''$)



$n = \sqrt{\varepsilon\mu} = n' - in''$

бегущая потери

Все пики потерями можно пренебречь ($\omega \neq \omega_0$) - область вне поглощ.

Потери $0 \Rightarrow n'^2 \to \pm\infty$

Волны n чисто Re - просто бегущие, n^2 Re

>0 - распр. волн

<0 - нераспр. (волновод)

$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\bar{j}_{\text{микр}}$

токи проводимости, поляриз., намагнич-ти

При усреднении не учит. токи пр-ти

$\vec{j}_{\text{микро}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\,\vec{M}$

Поляризация показывает потери, токи проводимости по сути в P.

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ сторонних токов нет, ток проводимости в $\vec{D}$.

$\mathrm{div}\,\vec{S}(t) = -\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}(t)\frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t)\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(t)\right)$

Зав-ть от координат тоже есть

$\vec{S}(t) = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}(t), \vec{H}(t)\right]$ $\quad \mathrm{div}\,\vec{S} = -q - \frac{\partial w}{\partial t}$

19 Квазимонохроматические процессы. Энергия поля в среде с временной дисперсией.

для таких полей $A=\mathrm{const}$

$\overline{w}^{T}=\mathrm{const}$

$\operatorname{div}\overline{\vec{S}}^{T}=-\overline{q}^{T}$ амплитуды

$\overline{\vec{S}}^{T}=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\check{\vec{E}},\check{\vec{H}}^{*}]$

$$\overline{q}^{T}=\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}(t)\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}+\vec{H}(t)\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}^{*}i\omega\underbrace{(\varepsilon'-i\varepsilon'')\vec{E}}_{\vec{D}}\right.$$

$$\left.+\vec{H}^{*}i\omega(\mu'-i\mu'')\vec{H}\right)=\frac{\omega}{8\pi}\left(\varepsilon''|\vec{E}|^{2}+\mu''|\vec{H}|^{2}\right)$$

$$\overline{q}^{T}=\frac{\omega}{8\pi}\left(\varepsilon''|\vec{E}|^{2}+\mu''|\vec{H}|^{2}\right)$$

Мы вне области поглощения

$\operatorname{div}\overline{\vec{S}}^{T}=-\frac{\partial\overline{w}^{T}}{\partial t}$

$\vec{E}(t)=\frac{1}{2}(\vec{E}_0(t)e^{i\omega t}+\text{к.с.})$ к.с.: $\vec{E}_0^{*}(t)e^{-i\omega t}$

медленно меняется во времени по T, который соответствует ω: $T=2\pi/\omega$

$\vec{H}(t)=\frac{1}{2}(\vec{H}_0(t)e^{i\omega t}+\text{к.с.})$

$\overline{\vec{S}}^{T}=\frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec{E}_0(t),\vec{H}_0^{*}(t)]$

$\operatorname{div}\vec{S}=\frac{-1}{4\pi}\left(\vec{E}(t)\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}+\vec{H}(t)\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$

$$\overline{\frac{dW}{dt}}^{T} = \frac{1}{4\pi}\overline{\left(\vec{E}(t)\frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t} + \vec{H}(t)\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)}^{T}$$

$\vec{D}_0(t)e^{i\omega t} \overset{?}{\leftarrow} \vec{E}_0(t)e^{i\omega t}$ (уже не монохр.)

$$\vec{D}_0(t)e^{i\omega t} = \int_0^\infty \tilde{\varepsilon}(\tau)\vec{E}_0(t-\tau)e^{i\omega(t-\tau)}d\tau \boxed{=}$$

Предпол: $\vec{E}_0$ медленно меняется по масштабе $|\tilde{\varepsilon}(\tau)|$

$$\vec{E}_0(t-\tau) = \vec{E}_0(t) + \frac{d\vec{E}_0(t)}{dt}(-\tau) + \dots$$

$$\boxed{=}\int_0^\infty \tilde{\varepsilon}(\tau)\left[\vec{E}_0(t) - \tau\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}\right]e^{-i\omega\tau}d\tau \cdot e^{i\omega t} = \underbrace{\int_0^\infty \tilde{\varepsilon}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}_{\varepsilon(\omega)}\vec{E}_0(t)e^{i\omega t} +$$

$$+\underbrace{\int_0^\infty (-\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}_{-i\frac{d\varepsilon}{d\omega}}\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t}$$

$$\vec{D}_0(t) = \varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t) - i\frac{d\varepsilon}{d\omega}\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}$$

$\frac{\partial \vec{D}_0(t)}{\partial t} = \varepsilon(\omega)\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} +$ второй ~~порядок~~ малости

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{D}_0(t)e^{i\omega t}\right) = i\omega\vec{D}_0(t)e^{i\omega t} + \frac{\partial \vec{D}_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t} = i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t)e^{i\omega t} +$$

$$+\omega\frac{d\varepsilon}{d\omega}\frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}(t)e^{i\omega t} + \varepsilon(\omega)\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t} = i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t)e^{i\omega t} +$$

$$+\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t}$$

бу *, т.к. область бу поглощения

$$\frac{1}{4\pi}\overline{\vec{E}(t)\frac{\partial \vec{D}(t)}{\partial t}}^{T} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\overline{\left(\vec{E}_0(t)e^{i\omega t} + \vec{E}_0^* e^{-i\omega t}\right)\left[i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E}_0(t)e^{i\omega t} +\right.}$$

$$\left. + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t}e^{i\omega t} + (-i\omega)\varepsilon^*(\omega)\vec{E}_0^* e^{-i\omega t} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial \vec{E}_0^*(t)}{\partial t}e^{-i\omega t}\right]\ominus$$

$$⊖\ \left\{\overline{e^{\pm i2\omega t}}^{T} = 0\right\} = \frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\overline{\left(\vec{E}_0^*(t)\frac{\partial \vec{E}_0(t)}{\partial t} + \vec{E}_0(t)\frac{\partial \vec{E}_0^*(t)}{\partial t}\right)}^{T} +$$

$$+ \text{члены } \overline{e^{\pm i2\omega t}}^{T} = \frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial|\vec{E}_0(t)|^2}{\partial t}$$

т.к. ф-ии медл. меняющ. эквивалентно просто слабые

$$\frac{\partial \overline{w}^{T}}{\partial t} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}\frac{\partial|\vec{E}_0(t)|^2}{\partial t} + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}\frac{\partial|\vec{H}_0(t)|^2}{\partial t}\right)$$

среда стационарная =>

$$\frac{\partial \overline{w}^{T}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left\{\frac{1}{16\pi}\left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}|\vec{E}_0(t)|^2 + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega}|\vec{H}_0(t)|^2\right]\right\}}_{\overline{w}^{T}}$$

20 Распространение импульсного сигнала в среде с временной дисперсией. Групповая скорость

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} = \vec{E}_0 e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v_{ф}}\right)}$$

$$v_{ф} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}$$

Сигнал: $\vec{E}(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{\tilde{E}}(\omega) e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v_{ф}(\omega)}\right)} d\omega$

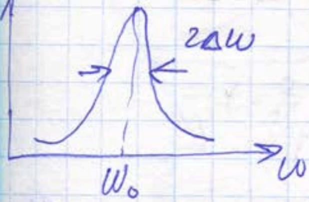
$z=0$: $\vec{E}(0,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

без дисперсии: $\frac{\partial v_{ф}}{\partial\omega} = 0 \Rightarrow \vec{E}(z,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\omega) e^{i\omega\left(t - \frac{z}{v_{ф}}\right)} d\omega = \vec{E}\left(0, t - \frac{z}{v_{ф}}\right)$

Реализация поля без изменений

Каждая гармоника распр-ся с $v_{ф}$ => весь спектр с ней же

Волновой пакет — это процесс с узким частотным спектром. Узкополосный (квазихроматический) сигнал около ω_0.



$2\Delta\omega \ll \omega_0$

частоты занимают узкий спектр

$$e^{i\omega\left(t-\frac{z}{v_\phi}\right)} = e^{i\omega t - ik(\omega)z}$$

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$$

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)^2 + \dots$$

$$\vec{E}(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{E}(\omega)\exp\left\{i\omega t - i\omega_0 t + i\omega_0 t - ik(\omega_0)z - i\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}(\omega-\omega_0)z - i\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)(\omega-\omega_0)^2 z + \dots\right\}$$

$$\frac{1}{3!}\left|\left(\frac{d^3k}{d\omega^3}\right)(\omega-\omega_0)^3_{max}z\right| \ll \pi$$

$\omega-\omega_0=\Omega$, $d\omega = d\Omega$

$\vec{E}(\omega) = \vec{E}(\omega_0+\Omega) \equiv \vec{E}_\Omega$

$t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0} z = \tau$; $\tau = \tau(t,z)$; $\tau(t,0)=t$

$$\vec{E}(z,t) = e^{i\omega_0 t - ik(\omega_0)z}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_\Omega e^{i\Omega\tau - i\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0}\Omega^2 z}\,d\Omega$$

$\vec{E}_0(z,\tau)$ — огибающая волнового пакета

если бы $\vec{E}$ было ∞ узким по спектру, $\vec{E}_0$

было бы const, т.е чем сигнал ближе к монохроматич., тем ближе огибающая волн. пакета к const.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0}\Omega^2_{max}z\Big| \ll \pi: \quad \vec{E}_0(z,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_\Omega e^{i\Omega\tau}d\Omega$$

$$\vec{E}_0(z,t)\big|_{z=0}=\vec{E}_0(0,t)$$

$$\vec{E}_0(z,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_\Omega e^{i\Omega\tau}d\Omega \longrightarrow \vec{E}_0(z,t)=\vec{E}_0(0,\tau)$$

$$\vec{E}_0(0,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_\Omega e^{i\omega t}d\Omega \nearrow \quad \tau=t \text{ при } z=0$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0(z,t)=\vec{E}_0\left(0,t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}z\right)$$

т.е. огибающая не меняет своей формы в сечении z по отношению к $z=0$, только приходит с запаздыванием

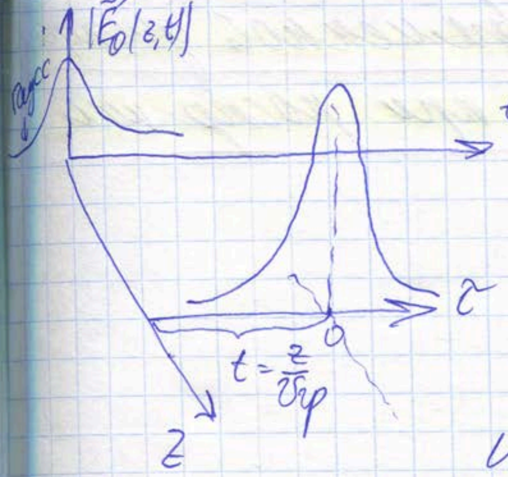
Скорость распр-я огибающей: →

$$t-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}z=\text{const}\ \Big|\frac{d}{dt}$$

$$1-\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}\dot{z}=0$$

$\dot{z}$ - скорость перемещения огибающей как единого целого

[49] → $v_{гр}=\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\omega=\omega_0}$ - она заполнена высокочастотным сигналом



Рассмотрим среду:

а) Квазимонохромат.

б) Среда в области прозрачности ?

Мы вне области поглощения, среда прозрачна

$Re\, n^2, n^4$ - графики

$k = k_0 n$ - быстро меняется, часто только первых членов в ряде недостаточно

в) $\left|\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega_0^2}\right)\Omega_{max}^2 z\right| \ll \pi$

Если а-в выполнены, то огибающая распр-ся без искажений. Только в такой области можно пользоваться понятием $v_{гр}$.

$\vec v_{гр} = \frac{d\omega}{d\vec k} = \left\{\frac{\partial\omega}{\partial k_x}, \frac{\partial\omega}{\partial k_y}, \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\right\} = \nabla_k \omega(\vec k)$

$v_{гр} \geq 0, |v_{гр}| < c$ - если нет, то что-то из а-в не выполняется

$v_{гр}$ - скорость с которой течет энергия

$\boxed{\vec S = \vec w \, \vec v_{гр}}$ можно док-ть через [illegible]

21) Диффузионное ур-е для огибающей

импульса в среде с временной дисперсией

Расплывание импульса при распр-нии

Рассмотрим случай, когда учитываются только квадратичные члены ряда Тейлора

$$\vec{E}_0(z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_\Omega\, e^{i\Omega\tau-i\frac{1}{2}\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0}z\Omega^2}\,d\Omega$$

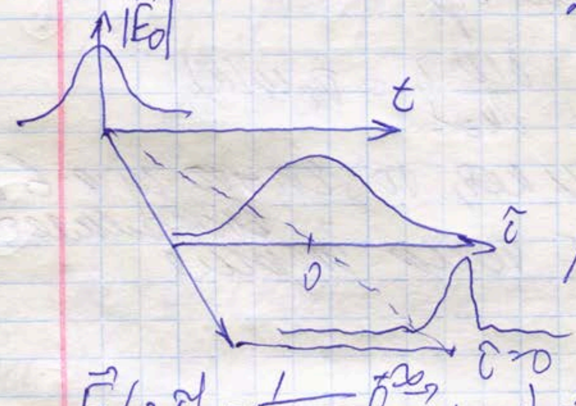
Проверим док-ся, что это огибающая подчиняется ур-нию:

$$\frac{\partial\vec{E}_0(z,\tau)}{\partial z}=D\,\frac{\partial^2\vec{E}_0(z,t)}{\partial\tau^2}$$

$$D=\frac{ik_0''}{2}\qquad k_\omega''=\left(\frac{d^2k}{d\omega_0^2}\right)\qquad \tau=t-\frac{z}{v_{gr}}$$

Это ур-е описывает диффузию амплитуды по τ во времени волнового пакета.

$$\int\left(-i\frac{1}{2}k_\omega''\Omega^2\right)\cdot d\Omega \quad ? \quad \frac{ik''}{2}\int(-\Omega^2)\cdot d\Omega$$



если знаем решение при $z=0$, то общее решение ДУ найдем

$$\vec{E}_0(z,\tau)=\frac{1}{\sqrt{4\pi Dz}}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_0(0,\tau')\,e^{-\frac{(\tau-\tau')^2}{2Dz}}\,d\tau'=\frac{1}{\sqrt{i2\pi k_\omega''z}}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{E}_0(0,\tau$$

$\times \exp\left(\frac{i(\tau'-\tau)^2}{2k''_{\omega}z}\right)d\tau'$

Пример: пусть имеет место огибающая:

$z=0$: $\vec{E}_0(0,t) = \vec{E}_0(0,\tau) = \vec{e}_0 e^{-\tau^2/t_0^2}$

$$\vec{E}_d(z,\tau) = \vec{e}_0 \frac{1}{\sqrt{i2\pi k'' z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau'^2/t_0^2 + i\frac{(\tau'-\tau)^2}{2k''_{\omega}z}} d\tau'$$

используя $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda\tau'^2}d\tau' = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda(\tau'-c)^2}d\tau'$, получим

$$\vec{E}_0(t,\tau) = \vec{e}_0 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{i2k''\omega z}{t_0^2}}} \exp\left[-\frac{(t-z/v_{rp})^2}{t_0^2\left(1+\frac{i2k''\omega z}{t_0^2}\right)}\right]$$

искажения огибающей

Без искажений требуем: $\left|\frac{2k''\omega z}{t_0^2}\right| \ll 1$

для гаусса: $\frac{1}{t_0} \sim \Omega_{max} \Rightarrow$

$\left|\left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0}\right| \Omega_{max}^2 z \ll 1$

Во что переходит огибающая при искажении?

$z \to$ „∞" используем интегр. представление + метод постоянной фазы

$$\vec{E}_d(z,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_{\Omega} e^{i(\Omega\tau - \frac{1}{2}k''_{\omega}z\Omega^2)} d\Omega$$

$\left(\Omega\tau - \frac{1}{2}k''_{\omega}z\Omega^2\right)'_{\Omega} = 0$ – скорость изменения фазы обнулилось

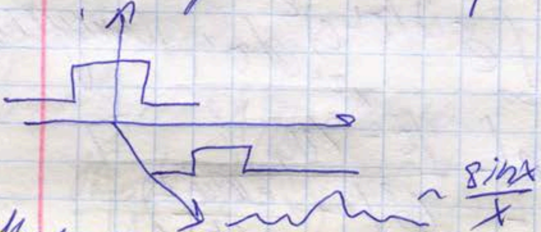
$\tau - k''_{\omega}z\Omega = 0 \Rightarrow \Omega_s = \frac{\tau}{k''_{\omega}z}$ – стационарн. точка

$$\vec E_0(z,\tau) = \vec E_\Omega\left(\Omega=\frac{\tau}{k_0'' z}\right) e^{i\left(-\Omega_s\tau - \frac{1}{2}k_0'' z\Omega_s^2\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{2}k_0'' z(\Omega-\Omega_s)^2} d\Omega =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{ik_0'' z}}\, \vec E_\Omega\left(\Omega-\frac{\tau}{k_0'' z}\right) e^{-i\frac{\tau^2}{2k_0'' z}}$$

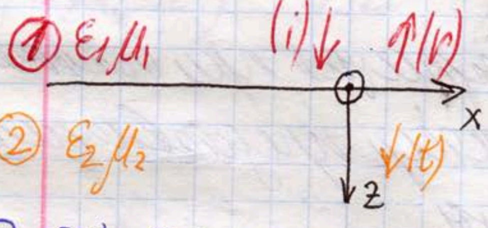
$$\sqrt{\frac{\pi}{i\frac{k_0'' z}{2}}}$$

Огибающая переходит в такую форму, которая повторяет спектр этой огибающей.



Отдельные частоты расходятся в пространстве.

22 Нормальное падение плоской волны на плоскую границу раздела двух сред. Выражения для коэффициентов отражения и прохождения.



$k_1 = k_0\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$; $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$

$k_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$; $\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$

(i) $\vec E^{(i)} = \vec E_0^{(i)} e^{-ik_1 z}$

$\vec H^{(i)} = \frac{1}{\eta_1}[\vec n^{(i)}, \vec E^{(i)}] = \frac{1}{\eta_1}[\vec z_0, \vec E_0^{(i)}] e^{-ik_1 z}$

(r) $\vec E^{r} = \underbrace{\Gamma \vec E_0^{(i)}}_{\vec E_0^{(r)}} e^{ik_1 z}$ Г - коэфф. отражения

$\vec{H}^{(r)} = \frac{1}{\eta_1}[\vec{n}^{(r)}, \vec{E}^{(r)}] = -\frac{\Gamma}{\eta_1}[\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(i)}] e^{-ik_1 z}$

(t) $\vec{E}^{(t)} = \underbrace{T\vec{E}_0^{(i)}}_{\vec{E}_0^{(t)}} e^{-ik_2 z}$ T - коэфф. прохождения

$\vec{H}^{(t)} = \frac{1}{\eta_2}[\vec{z}_0, \vec{E}^{(t)}] = \frac{T}{\eta_2}[\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(i)}] e^{-ik_2 z}$

$\left.\vec{E}_\tau^{(i)} + \vec{E}_\tau^{(r)} = \vec{E}_\tau^{(t)}\right|_{z=0}$ - должно вып-ся на границе раздела сред

$\left.\vec{H}_\tau^{(i)} + \vec{H}_\tau^{(r)} = \vec{H}_\tau^{(t)}\right|_{z=0}$

поля однор. плоских волн поперечные $\Rightarrow$ $\vec{E}, \vec{H}$ тангенциальны

$\vec{H}$ $\vec{E}$ $\vec{k}^{(i)}$ $\qquad e^{\mp ik_1 z}\Big|_{z=0} = 1$

$e^{-ik_2 z}\Big|_{z=0} = 1$

$\vec{E}_0^{(i)} + \Gamma\vec{E}_0^{(i)} = T\vec{E}_0^{(i)}$

$\frac{1}{\eta_1}[\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(i)}] - \frac{\Gamma}{\eta_1}[\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(i)}] = \frac{T}{\eta_2}[\vec{z}_0, \vec{E}_0^{(i)}]$

$(1+\Gamma-T)\vec{E}_0^{(i)} = 0$ должно вып-ся при $\forall \vec{E}_0^{(i)} \neq 0 \Rightarrow$

$1+\Gamma-T = 0$, т.е. можно „сократить" вектора, хотя этого делать и нельзя, но это означает именно такое: $1+\Gamma-T=0$.

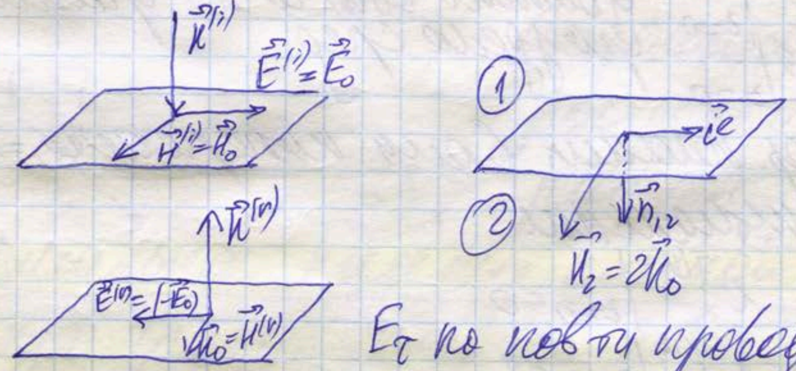
$\begin{cases} 1+\Gamma = T \\ \frac{1}{\eta_1} - \frac{\Gamma}{\eta_1} = \frac{T}{\eta_2} \end{cases}$ $\quad \boxed{\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}}$ $\quad \boxed{T = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}}$ в случае нормального падения волн а) $\Gamma = 0$

Реализуется режим согласования

$\eta_2 = \eta_1 \Rightarrow \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1}$ сложно подобрать среды

б) $\eta_2 = 0$ - режим короткого замыкания

$\Gamma = -1 = 1 \cdot e^{i\pi}$



E_τ на пов-ти проводника 0

$[\vec{n}_{12}, \underset{0}{\vec{H}_2} - \underset{2\vec{H}_0}{\vec{H}_1}] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}^e \rightarrow \vec{i}^e = \frac{c}{2\pi}[\vec{H}_0, \vec{n}_{12}]$

в) $\eta_2 = \infty$ $|\eta_2| >> |\eta_1|$ $\Gamma = 1$ - холостой ход

H и E меняются местами

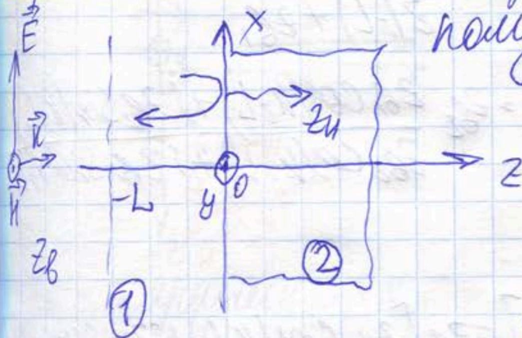
$Z_{1,2} = \frac{4\pi}{c}\eta_{1,2}$

$Z_2 = Z_н$, $Z_1 = Z_в$ (нагрузки и волновое)

Под волновым имп. понимается среда, из которой мы не конкретизировано

$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_н - Z_в}{Z_н + Z_в}$ $\quad T = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2Z_н}{Z_н + Z_в}$

23 Формула пересчета импеданса. Коэффициент отражения от плоскопараллельного слоя



полубесконечная одн. среда

$$\eta(-L) = \frac{E_x}{H_y}\Big|_{z=-L}$$

$$z(-L) = \frac{4\pi}{c}\eta(-L)$$

$$\eta(0) = \eta_2$$

$$z(0) = \frac{4\pi}{c}\eta_2 = z_н$$

Слева режим бегущей волны $\boxed{k_1 \equiv k}$

$$z(-L) = \frac{4\pi}{c}\eta(-L) = \frac{4\pi}{c}\,\frac{E_0 e^{-ikz} + \Gamma E_0 e^{ikz}}{\frac{E_0}{\eta} e^{-ikz} - \frac{\Gamma}{\eta_1} E_0 e^{ikz}}\Big|_{z=-L}$$

$$\frac{4\pi}{c}\eta_1 = z_1 \equiv z_в$$

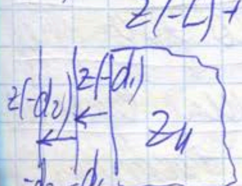
$$z(-L) = z_в\,\frac{e^{ikL} + \frac{z_н - z_в}{z_н + z_в} e^{-ikL}}{e^{ikL} - \frac{z_н - z_в}{z_н + z_в} e^{-ikL}}$$

$$e^{\pm ikL} = \cos(kL) \pm i\sin(kL)$$

$$z(-L) = z_в\,\frac{z_н\cos(kL) + i z_в\sin(kL)}{z_в\cos(kL) + i z_н\sin(kL)}$$ формула пересчета импеданса

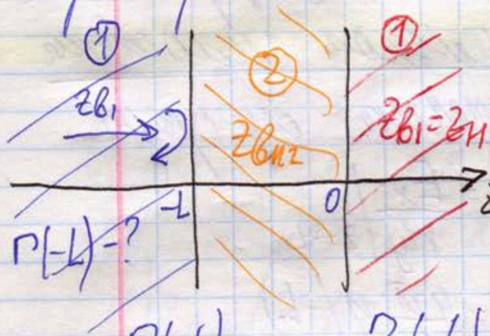
$$\Gamma = \Gamma(0);\quad \Gamma(-L) = \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}}\Big|_{z=-L} = \frac{\Gamma E_0 e^{ikz}}{E_0 e^{-ikz}}\Big|_{z=-L} = \Gamma e^{-2ikL}$$

$$\Gamma(-L) = \frac{z(-L) - z_в}{z(-L) + z_в}$$ — для левого наблюдателя, который считает границей $z=-L$



пересчитав и найти $z(-d)$, объявим его $z_н$ и т.д. пока дойдём до левой границы

Пример: плоская паралл. пластина



$$\Gamma(-L) = \frac{z(-L) - z_{в1}}{z(-L) + z_{в1}}$$

$$z(-L) = z_{в2}\,\frac{z_{в1}\cos(k_2 L) + i z_{в2}\sin(k_2 L)}{z_{в2}\cos(k_2 L) + i z_{в1}\sin(k_2 L)}$$

$\Gamma(-L) = 0 \Rightarrow z(-L) = z_{в1}$

$z_{в2}[z_{в1}\cos(k_2 L) + i z_{в2}\sin(k_2 L)] = z_{в1}[z_{в2}\cos(k_2 L) + i z_{в1}\sin(k_2 L)]$

$(z_{в2}^2 - z_{в1}^2)\sin(k_2 L) = 0$ — не будет отражения, если

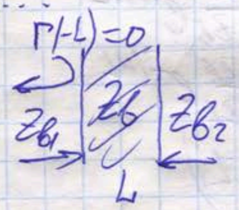
1) $z_{в2} = z_{в1}$, $L - \forall$

2) $z_{в1} \neq z_{в2}$ $\sin(k_2 L)$

$k_2 L = \pi n$, $n = 1, 2, \ldots$

$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$

$L = \frac{\lambda_2}{2} n$



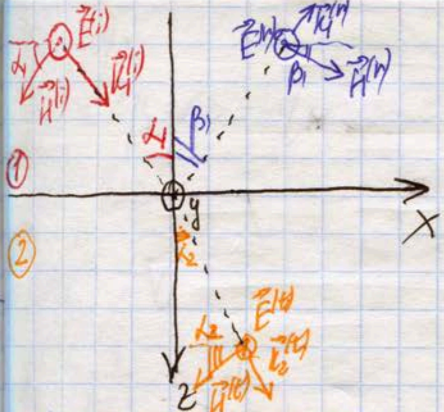
возможен режим согласования

$z_в = \sqrt{z_{в1} z_{в2}}$, $L = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} n$

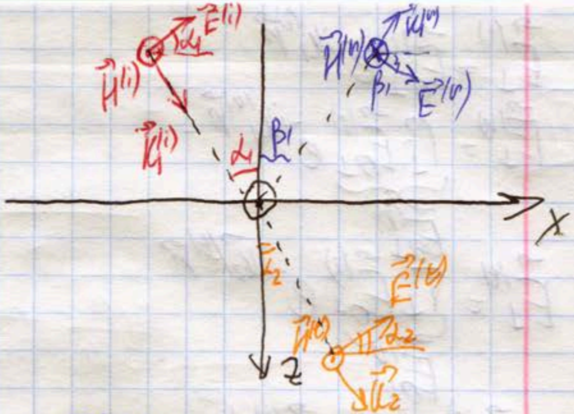
Решить

24-25 Законы отражения и преломления плоских волн на плоской границе раздела двух однородных сред (закон Снелля). Наклонное падение плоских волн на плоскую границу раздела двух сред.

Выражения коэфф. отр-ния и прох-ния через поперечные волн. импедансы (формулы Френеля)



TE(s) - поляризация, т.к.

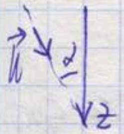


TM(p) - поляризация

$E^{(i)} \perp$ плоскости падения

$\vec E = \eta [\vec H, \vec n]$ $\quad \vec H = \frac{1}{\eta}[\vec n, \vec E]$ - неудобно

$\vec E_\perp = \eta_\perp [\vec H, \vec z_0]$ $\quad \vec H_\perp = \frac{1}{\eta_\perp}[\vec z_0, \vec E]$



$$\eta_\perp^{(TE)} = \frac{E_y}{(-H_x)} = \frac{\eta}{\cos\alpha}$$

$$\alpha = (\vec n, \vec z_0) \qquad \vec n = \frac{\vec k}{k}$$

$$\eta_\perp^{(TM)} = \frac{E_x}{H_y} = \eta\cos\alpha$$

(i) TE(s): $\eta_{\perp 1}^{(i)} = \eta_1/\cos\alpha_1$

TM(p) $\eta_{\perp 1}^{(i)} = \eta_1\cos\alpha_1$

(r) TE(s): $\eta_{\perp 1}^{(r)} = \frac{\eta_1}{\cos(\pi-\beta_1)} = \frac{-\eta_1}{\cos\beta_1}$

TM(p) = $\eta_{\perp 1}^{(r)} = \eta_1\cos(\pi-\beta_1) = -\eta_1\cos\beta_1$

(t) TE(s): $\eta_{\perp 2}^{(t)} = \eta_2/\cos\alpha_2$

TM(p): $\eta_{\perp 2}^{(t)} = \eta_2\cos\alpha_2$

$$\vec{E}_\perp^{(i)} = \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}}$$

$$\vec{E}_\perp^{(r)} = \underbrace{\Gamma_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)}}_{\vec{E}_{0\perp}^{(r)}} e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}}$$

$$\vec{E}_\perp^{(t)} = \underbrace{T_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)}}_{\vec{E}_{0\perp}^{(t)}} e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}}$$

$$\vec{E}_\tau^{(i)} + \vec{E}_\tau^{(r)} = \vec{E}_\tau^{(t)} \Big|_{z=0}$$

$$\vec{H}_\tau^{(i)} + \vec{H}_\tau^{(r)} = \vec{H}_\tau^{(t)} \Big|_{z=0}$$

$$\vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}} + \Gamma_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}} = T_\perp \vec{E}_{0\perp}^{(i)} e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}} \Big|_{z=0}$$

$$\frac{1}{\rho_{\perp 1}^{(i)}} [\vec{z}_0, \vec{E}_{0\perp}^{(i)}] e^{-i\vec{k}_1^{(i)}\vec{r}} \underset{!!!}{+} \frac{\Gamma_\perp}{\underset{\text{"-" } \text{пут}}{\eta_{\perp 1}^{(r)}}} [\vec{z}_0, \vec{E}_{0\perp}^{(i)}] e^{-i\vec{k}_1^{(r)}\vec{r}} = \frac{T_\perp}{\rho_{\perp 2}^{(t)}} [\vec{z}_0, \vec{E}_0] e^{-i\vec{k}_2^{(t)}\vec{r}} \Big|_{z=0}$$

Должно вып-ся при $\forall$ точках гр. раздела сред

$\vec{k}_1^{(i)}\vec{r} = \vec{k}_1^{(r)}\vec{r} = \vec{k}_2^{(t)}\vec{r} \Big|_{z=0}$ должны подреедвать

$k_{1x}^{(i)} x = k_{1x}^{(r)} x = k_{2x}^{(t)} x$!

$k_1 \sin\alpha_1 = k_1 \sin\beta_1 = k_2 \sin\alpha_2 \Rightarrow \sin\alpha_1 = \sin\beta_1 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1$

$k_{1,2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{1,2}\mu_{1,2}}$

$\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} \sin\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2} \sin\alpha_2$

$\boxed{\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} = \dfrac{n_2}{n_1}}$ показывает что τ-составляющая $\vec{k}$ не преобразуется

59 $\vec{k}_\tau = const$

$\eta^{(i)}_{\perp 1} = \eta_{\perp 1}$

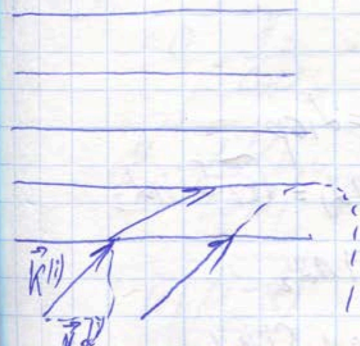
$\eta^{(r)}_{\perp 1} = \langle \beta_1 = \alpha_1 \rangle = -\eta_{\perp 1}$

$\eta^{(t)}_{\perp 2} = \eta_{\perp 2}$

$1 + \Gamma_\perp = T_\perp$

$\frac{1}{\eta_{\perp 1}} - \frac{\Gamma_\perp}{\eta_{\perp 1}} = \frac{T_\perp}{\eta_{\perp 2}}$

$\Gamma_\perp = \frac{\eta_{\perp 2} - \eta_{\perp 1}}{\eta_{\perp 2} + \eta_{\perp 1}}$; $T_\perp = \frac{2\eta_{\perp 2}}{\eta_{\perp 2} + \eta_{\perp 1}}$



похоже на физике в поле, если среда плавно неоднородная

„$\lambda \to 0$“ ($\lambda \ll L_n$)

Во всех локальных слоях $n^{(i)}_t$ непрерывно

Формулы Френеля:

TE: $\Gamma_\perp = \frac{E_y^{(r)}}{E_y^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(r)}}{E^{(i)}}\Big|_{z=0} = \Gamma = \left(\frac{\eta_2}{\cos\alpha_2} - \frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}\right) \Big/ \left(\frac{\eta_2}{\cos\alpha_2} + \frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}\right)$

отношение полных полей

$T_\perp = \frac{E_y^{(t)}}{E_y^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(t)}}{E^{(i)}}\Big|_{z=0} = T = \frac{2\eta_2}{\cos\alpha_2} \Big/ \left(\frac{\eta_2}{\cos\alpha_2} + \frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}\right)$

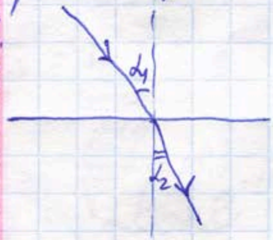
TM: $\Gamma_\parallel = \frac{E_x^{(r)}}{E_x^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(r)}\cos\beta_1}{E^{(i)}\cos\alpha_1} = \Gamma = \frac{\eta_2\cos\alpha_2 - \eta_1\cos\alpha_1}{\alpha_2\cos\alpha_2 + \eta_1\cos\alpha_1}$

$(\alpha_1 = \beta_1)$

$T_\parallel = \frac{E_x^{(t)}}{E_x^{(i)}}\Big|_{z=0} = \frac{E^{(t)}\cos\alpha_2}{E^{(i)}\cos\alpha_1} = 2\eta_2\cos\alpha_2 / (\eta_2\cos\alpha_2 + \eta_1\cos\alpha_1)$

26 Эффект Брюстера. Угол Брюстера

$\boxed{\text{ГУ}}$:



$r_\perp = 0 \; (r=0)$ - $\eta_2 \cos\alpha_2 = \eta_1 \cos\alpha_1$

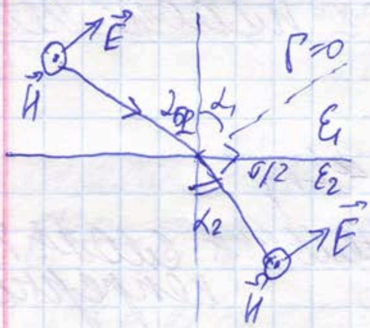
$$1 = \frac{\eta_2 \cos\alpha_2}{\eta_1 \cos\alpha_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1}} \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha_2}}{\cos\alpha_1} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_1}} \frac{1}{\cos\alpha_1} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2} \sin^2\alpha_1}$$

$$tg\,\alpha_1 = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1} - 1}}$$

$\mu_1 = \mu_2$: $tg\,\alpha_{1бр} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$ отраженная волна отсут.

$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$ - ?



<u>Док-во:</u> $\alpha_1 = \alpha_{1бр}$

$\mu_1 = \mu_2$: $\sqrt{\varepsilon_1} \sin\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2} \sin\alpha_2$

$\sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sin\alpha_2$

$\sin\alpha_1 = tg\,\alpha_1 \sin\alpha_2$

$\cos\alpha_1 = \sin\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$

Объяснение, что заряды в сред колеблются под действием $\vec{E}$, образуя диполи, излучающие вдоль себя, неверно.

$\frac{\text{диэл}}{\text{вак}}$ = эф Брюстера

в вакууме диполей нет ?

$\boxed{61}$ <u>Объяснение:</u> на границе есть связанные заряд, от волны, которая движется вдоль границы, создаёт свое поле, складывается с изначальной. Отраженную волну не создают E поля от тока (своб) и поля изнач = 0. Из-за разности фаз волны:

$$e^{i\omega t} \overset{?}{=} e^{i\frac{2\pi}{T}t} = e^{i2\pi\frac{t}{T}} = 1^{\frac{t}{T}}$$

$\frac{t}{T}$ может быть иррационально, т.е корней континуум, поле осциллирует от 1 до -1.

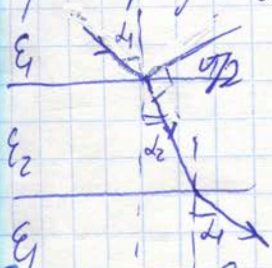
$\boxed{TE}$: $\Gamma_\perp \overset{?}{=} 0$ $\quad \frac{\eta_2}{\cos\alpha_2} = \frac{\eta_1}{\cos\alpha_1}$

$$1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\mu_1}{\mu_2}}\,\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}\,\frac{1}{\cos\alpha_1}\sqrt{1-\frac{\varepsilon_1\mu_1}{\varepsilon_2\mu_2}\sin^2\alpha_1}$$

$$tg\,\alpha_1 = \sqrt{\frac{\tilde\mu(\tilde\mu-\tilde\varepsilon)}{\tilde\varepsilon\tilde\mu-1}} \qquad \tilde\varepsilon = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},\ \tilde\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$\tilde\mu = 1$: $tg\,\alpha_1 = \sqrt{\frac{1-\tilde\varepsilon}{\tilde\varepsilon-1}} = \sqrt{-1}$, т.е угла Брюстера нет

Пример: $\mu_1 = \mu_2$



луч нигде не отражается

$\alpha_1 = \alpha_{1Бр}$ $\quad tg\,\alpha_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$

$tg\,\alpha_2 = tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right) = ctg\,\alpha_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$

9. Полное внутреннее отражение. Возникновение неоднородных плоских волн при полном отражении

$\varepsilon_1\mu_1 > \varepsilon_2\mu_2$

$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$ $\quad \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}} > 1 \Rightarrow \sin\alpha_2 > \sin\alpha_1$

$\alpha_1 = \alpha_1^* \qquad \alpha_2 = \pi/2$

$\sin\alpha_1^* = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}$

$\sin\alpha_2 > \sin\alpha_1$

$\alpha_2 > \alpha_1$

$\alpha_1 > \alpha_1^* \rightarrow \sin\alpha_2 > 1$

$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + iC$

$\sin\alpha_2 = \dfrac{e^{i\alpha_2} - e^{-i\alpha_2}}{2i}$

$\sin\alpha_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + i\tau\right) = \cos i\tau = \operatorname{ch}\tau > 1 \quad \tau > 0$

$\cos\alpha_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\tau\right) = -i\operatorname{sh}\tau$

$\boxed{TE}$

$E_y^{(t)} = E_0 e^{-ik_{2z}z - ik_{2x}x} =$

$= E_0 e^{-ik_2\cos\alpha_2 z - ik_2\sin\alpha_2 x} =$

$= E_0 e^{-ik(\operatorname{sh}\tau)z - ik_2(\operatorname{ch}\tau)x}$

по x - бегущ., по z - exp спадает

Это неоднородная плоская волна, которая описывается комплексн. волновым вектором, причем, его Re и Im части ортогональны.

63

Доп-но: $|\Gamma| = 1$, независимо от типа поляриз.

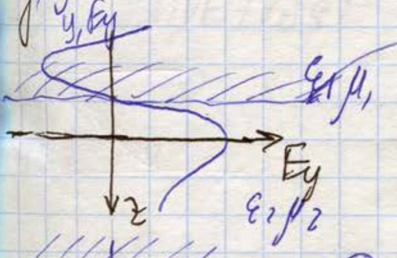
$$\Gamma=\Gamma_{\perp}=\begin{cases}\dfrac{\eta_1/\cos\alpha_2-\eta_2/\cos\alpha_1}{\eta_2/\cos\alpha_2+\eta_1/\cos\alpha_1} & (TE)\\[2ex] \dfrac{\eta_2\cos\alpha_2-\eta_1\cos\alpha_1}{\eta_2\cos\alpha_2+\eta_1\cos\alpha_1} & (TM)\end{cases}$$

Первые слагаемые мнимые, т.е. вида:

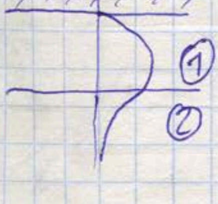
$\left|\dfrac{\alpha i-\beta}{\alpha i+\beta}\right|=\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=1$ вся энергия отражается назад

В данном случае в верхнем полупростр-ве неоднор. плоская волна, но она явл-ся суперпозицией волн с одинаковыми амплитудами (другой тип неоднородной волны)

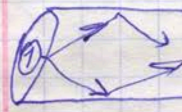
по z стоячая, по x бегущая
в нижней полуплоскости по z exp↓



$E_z=0$ можно заметаллизировать



можно сконструировать волновод, нарушив излучение будет в виде спадающего поля



Световод без утечки в боко

$$E_y^{(1)} = E_0 e^{-k_2(\text{sh}\,\tau)z - ik_2(\text{ch}\,\tau)x}$$

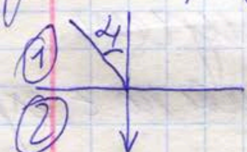
$$v_{\phi}^{(x)} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k_{x2}} = \frac{\omega}{k_2\,\text{ch}\,\tau} = \frac{v_2}{\text{ch}\,\tau} < v_2 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}$$

$$v_{\phi}^{(x)} = \frac{\omega}{k_{x1}} = \frac{\omega}{k_1\sin\alpha_1} = \frac{v_1}{\sin\alpha_1} > v_1 = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}$$

$$v_1 < v_{\phi}^{(x)} < v_2$$

Волна и быстрая, и медленная одновременно

24 Законы отражения и преломления плоских волн на плоской границе раздела двух однородных сред (закон Снелля)



$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}$$

$$\varepsilon_2 \approx -i\frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

$$|\varepsilon_2|\mu_2 \gg \mu_1\varepsilon_1$$

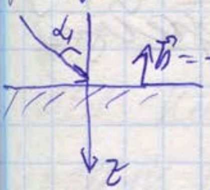
$$\sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}} \ll 1 \qquad \frac{|\sin\alpha_2|}{\sin\alpha_1} \ll 1$$

$$|\sin\alpha_2| \ll \sin\alpha_1 < 1$$

(2): $\vec{E}_\perp = \eta_{12}[\vec{H}, \vec{z}_0]$

$$\eta_{12} = \begin{cases} \eta_2/\cos\alpha_2 & TE \\ \eta_2\cos\alpha_2 & TM \end{cases}$$

$\eta_{12} \approx \eta_2$, т.к. 2 - хороший проводник



$\vec{E}_\perp = \eta_2 [\vec{n}, \vec{H}]\big|_S$ условие Леонтовича

т.е. когда внизу хороший проводник, усл-е выглядит как для норм падения.

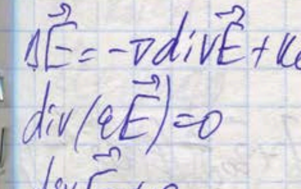
Уравнения, описывающие волны ТЕ-типа в плоскослоистой среде с плавно меняющимися параметрами. ВКБ приближение.

Не слоя, а континуальная ф-я

$\varepsilon(z)$, $\mu = 1$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0 \vec{H}$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0 \varepsilon \vec{E}$$
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\, \mathrm{rot}\,\vec{H}$$
$$\nabla \mathrm{div}\,\vec{E} - \Delta \vec{E} = -ik_0 \times (-ik_0 \varepsilon \vec{E})$$
$$\Delta \vec{E} = -\nabla \mathrm{div}\,\vec{E} + k_0^2 \varepsilon \vec{E} = 0$$
$$\mathrm{div}(\varepsilon \vec{E}) = 0$$
$$\mathrm{div}\,\vec{E} \neq 0$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0\, \mathrm{rot}(\varepsilon \vec{E})$$
$$\nabla \mathrm{div}\,\vec{H} - \Delta \vec{H} = -\Delta \vec{H}$$
$$(\mathrm{div}\,\vec{B} = 0,\ \mu = 1 \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{H} = 0)$$
$$\mathrm{rot}(\varepsilon \vec{E}) = \varepsilon\, \mathrm{rot}\,\vec{E} + [\nabla \varepsilon, \vec{E}] = -\varepsilon i k_0 \vec{H} + \left[\nabla \varepsilon, \frac{\mathrm{rot}\,\vec{H}}{ik_0 \varepsilon}\right]$$
$$\Delta \vec{H} + \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}, \mathrm{rot}\,\vec{H}\right] + k_0^2 \varepsilon \vec{H} = 0$$



$k_x = k_0 \sin\theta_0$

в каждом слое k_x одно и то же

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(z) e^{-ik_x x}, \quad \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(z) e^{-ik_x x}$$

При падении на плоскую границу раздела реализуется одна поляризация

$\underline{\underline{TE(s)}}$: $\vec{E}(\vec{r}) = E_y(\vec{r})\vec{y}_0$; H_x, H_z

$$E_y(\vec{r}) = E(z)e^{-ik_x x}$$

$\underline{\underline{TM(p)}}$: $\vec{H}(\vec{r}) = H_y(\vec{r})\vec{y}_0$, E_x, E_z

$$H_y(\vec{r}) = H(z)e^{-ik_x x}$$

$\underline{\underline{TE}}$ $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \longrightarrow -k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 E(z)}{\partial z^2} = \frac{d^2 E(z)}{dz^2}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \mathrm{div}(E_y(\vec{r})\vec{y}_0) = \frac{\partial}{\partial y}(E(z)e^{-ik_x x}) = 0$$

$$\frac{d^2 E(z)}{dz^2} + [k_0^2\varepsilon(z) - k_x^2]E(z) = 0$$

$$k_z^2(z) = k_0^2(\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0)$$

$$k_x = k_0\sin\theta_0$$

введем $\lambda_z(z) = \frac{2\pi}{k_z(z)}$

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0}\mathrm{rot}\vec{E} = \frac{i}{k_0}\left\{\vec{x}_0\left[-\frac{\partial}{\partial z}(E(z)e^{-ik_x x})\right] + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial x}(E(z)e^{-ik_x x})\right\}$$

$$H_y = H(z)e^{-ik_x x}$$

$$\left[\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}, \mathrm{rot}\vec{H}\right] = \left[\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz}\vec{z}_0, \vec{x}_0\left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{z}_0\frac{\partial H_y}{\partial x}\right] = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dz} \times$$

$$\times \frac{dH(z)}{dz}e^{-ik_x x}[\vec{z}_0, \vec{x}_0]$$

$$\frac{d^2H(z)}{dz^2} - \frac{1}{\varepsilon(z)}\frac{d\varepsilon(z)}{dz}\frac{d^2H(z)}{dz^2} + [k_0^2\varepsilon(z) - k_x]H(z) = 0$$

Для плоскослоистой среды независимо от порядка изменения ε от z.

Решается только численно.

$$\vec{E} = \frac{-i}{k_0\varepsilon}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{-i}{k_0\varepsilon}\left\{\vec{x}_0\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(H(z)e^{-ik_x x}\right)\right] + \vec{z}_0\frac{\partial}{\partial x}\left(H(z)e^{-ik_x x}\right)\right\}$$

Аналитически можно в случае плавно неоднородной среды

$\lambda_z(z) \ll L_z$ - чем вернее, тем ближе к однородн.

или так:

$$\underbrace{\left|\frac{dk_z(z)}{dz}\frac{1}{k_z}\right|}_{\sim \frac{1}{L_z}} \ll \underbrace{|k_z|}_{\left|\frac{2\pi}{\lambda_z}\right|}$$

$$\left|\frac{d}{dz}\frac{1}{k_z(z)}\right| \ll 1$$

Метод:

$$\frac{d^2E(z)}{dz^2} + k_0^2[\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0]E(z) = 0 \quad *$$

будем искать решение в виде:

$$E(z) = A(z)e^{-ik_0\psi(z)}$$

1) $\varepsilon(z) = \mathrm{const}$: $E(z) = Ae^{-ik_z z} = Ae^{-ik_0\left(\frac{k_z}{k_0}z\right)}$

$A = \mathrm{const}$ $\quad \psi(z) = \frac{k_z}{k_0}z \Rightarrow \psi'(z) = \mathrm{const}$

2) $\varepsilon(z) \neq const$

$\psi(z), A(z)$ медленно меняются на масштабе L_z

$$\psi'(z) \sim \frac{k_z(z)}{k_0}$$

$$E'(z) = A'(z)e^{-ik_0\psi(z)} + A(z)(-ik_0)\psi'(z)e^{-ik_0\psi}$$

$$E''(z) = A''(z)e^{-ik_0\psi(z)} - 2ik_0\psi'(z)A'(z)e^{-ik_0\psi(z)} -$$

$$- ik_0\psi''A(z)e^{-ik_0\psi} - k_0^2[\psi'(z)]^2Ae^{-ik_0\psi} \Rightarrow$$

$$A'' - [2ik_0\psi'A' + ik_0\psi''A] + k_0^2[\varepsilon(z) - \sin^2\theta - (\psi')^2]A = 0$$

$$\left|\frac{A''}{k_z^2}\right| \sim \frac{|A|}{k_z^2L_z^2} = \frac{|A|}{(k_zL_z)^2}$$ — т.е первое слагаемое 2 порядка малости

$$\left|\frac{2ik_0\psi'A'}{k_z^2}\right| \sim \left|\frac{k_0}{k_z^2}\underbrace{\frac{k_z}{k_0}}_{\psi'}\frac{A}{L_z}\right| = \frac{|A|}{|k_zL_z|}$$ перв. порядка

$$\left|\frac{k_0\psi''A}{k_z^2}\right| \sim \left|\frac{k_0\psi'}{L_z}\frac{A}{k_z^2}\right| \sim \frac{|A|}{|k_zL_z|}$$

$$\left|\frac{k_0^2[\varepsilon(z) - \sin^2\theta_0 - (\psi')^2]A}{k_z^2}\right| = \left|\frac{k_z^2 - k_0^2(\psi')^2}{k_z^2}A\right| = \left[1 - \frac{k_0^2}{k_z^2}(\psi')^2\right]|A|$$

нулевого порядка, слагаемые второй малости

$|k_zL_z| \gg 1 \Rightarrow \cancel{A''}$ - выкинули диффузию амплитуды поля поперёк лучей, т.е дифракцию $\Rightarrow$ преобр. геометр. оптики

$k_0^2[\varepsilon(z)-\sin^2\theta_0-(\psi')^2]A=0$, $A\neq 0$ (нетрив. реш.)

$(\psi')^2=\varepsilon(z)-\sin^2\theta_0$

$\psi'=\sqrt{\varepsilon(z)-\sin^2\theta_0}$

$$\psi(z)-\psi(z_0)=\pm\int_{z_0}^{z}\sqrt{\varepsilon(z')-\sin^2\theta_0}\,dz'$$

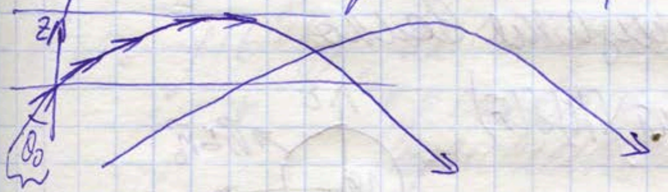
$2ik_0\psi'A'+ik_0\psi''A=0$

$\partial_z(\psi'A^2)=0 \Rightarrow \psi'A^2=c$ — ЗСЭ (вдоль какой-то трубки получаем энергия велич. постоянна)

$$E(z)=\frac{C_1}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)-\sin^2\theta_0}}e^{-ik_0\int_{z_0}^{z}\sqrt{\varepsilon(z')-\sin^2\theta_0}\,dz'}+$$

$$+\frac{C_2}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)-\sin^2\theta_0}}e^{ik_0\int_{z_0}^{z}\sqrt{\varepsilon(z')-\sin^2\theta_0}\,dz'}$$ — решение

распр-ние вверх по z ($\varepsilon\downarrow$ при $z\uparrow$)



если бегущая по x: $E(z)\cdot e^{-ik_x x}$

(29) Функция Грина неоднородного волнового уравнения при произвольной зависимости от времени.

-1- для среды без дисперсии

$\Box\psi = -4\pi\chi(t)\delta(\vec{r})$

$\psi = G(r,t)$

$\chi(t)$ – эволюция источника во времени

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\chi(t)\delta(\vec{r})$$

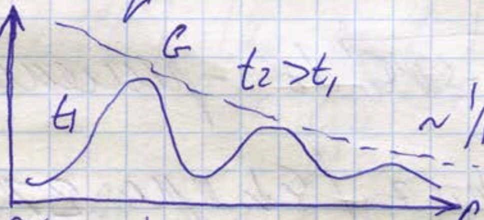
$r \neq 0: \ \delta(\vec{r}) = 0$

если $G(r,t) = \frac{U(r,t)}{r}$ $\quad r = |\vec{r}|$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

$U(r,t) = f\left(t - \frac{r}{v}\right) + \tilde{f}\left(t + \frac{r}{v}\right)$

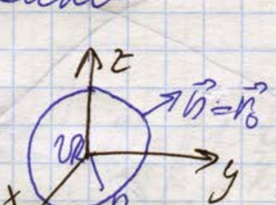
$G = \frac{f\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}$



расходящаяся сферическая волна

$\tilde{f}\left(t + \frac{r}{v}\right)$ – сходящаяся волна

$$\Delta G - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\chi(t)\delta(\vec{r})$$



$$\lim_{R\to 0}\int_{V_R} \dots \, dV$$

$$\int_{V_R} \Delta G \, dV = \int_{V_R} \operatorname{div}\nabla G \, dV = \oint_{S_R} \nabla G \, d\vec{S} = \oint_{S_R} \frac{\partial G}{\partial r} dS = \left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=R} 4\pi R^2$$

$d\vec{S} = \vec{r}_0 \, dS$

по сфере постоянного радиуса это const

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{f\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r} = -\frac{1}{r^2}f\left(t-\frac{r}{v}\right) - \frac{1}{vr}f'\left(t-\frac{r}{v}\right)$$

$$\int\limits_{V_R} \Delta G\, dV = -4\pi f\left(t-\frac{R}{v}\right) - 4\pi\frac{R}{v}f'\left(t-\frac{R}{v}\right)$$

$$\lim_{R\to 0}\int\limits_{V_R} \Delta G\, dV = -4\pi f(t)$$

$$\lim_{R\to 0}\int\limits_{V_R}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\, dV = \frac{1}{v^2}\lim_{R\to 0}\int\limits_0^R \frac{1}{r}f''\left(t-\frac{r}{v}\right)4\pi r^2\, dr$$ объем

$G = \frac{f\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}$ — предполагаем, что у f нет особенностей

$$\lim_{R\to 0}\int\limits_{V_R}(-4\pi)\chi(t)\delta(\vec r)\, dV = -4\pi\chi(t)$$

$-4\pi f(t) = -4\pi\chi(t) \Rightarrow f(t) = \chi(t)$

$G(\vec r, t) = \frac{\chi\left(t-\frac{r}{v}\right)}{r}$, $r = |\vec r|$

если повторить для $\vec r$

$G(\vec r, t) = \frac{\chi\left(t+\frac{r}{v}\right)}{r}$ — не имеет физ. смысла, т.к противоречит принципу причинности, т.е будущее поле определяет настоящее

$\Delta\psi = -4\pi\chi(t)\delta(\vec r - \vec r_1)$

$G(\vec r, \vec r_1, t) = \frac{\chi\left(t - \frac{|\vec r - \vec r_1|}{v}\right)}{|\vec r - \vec r_1|}$ общий вид ф-ии в среде бу дисперсии.

!!! → 30

$\Delta\psi_k + k^2\psi_k = -4\pi g(\vec r)e^{i\omega t} = 4\pi g_k$ неодн. ур-е Гельмгольца

$\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi g(\vec r)$ — этого реш достаточно

$$\int_V \Big[\underbrace{G(\vec r\,',\vec r_1)}_{\frac{e^{ik|\vec r\,'-\vec r_1|}}{|\vec r\,'-\vec r_1|}}\underbrace{\Delta_{r'}\psi(\vec r\,')}_{-4\pi g(\vec r\,')-k^2\psi(\vec r\,')} - \psi(\vec r\,')\underbrace{\Delta_{\vec r\,'}G(\vec r\,',\vec r_1)}_{-4\pi\delta(\vec r\,'-\vec r_1)-k^2G(\vec r\,',\vec r_1)}\Big]dV' =$$

?

$$= \oint_S \Big[G(\vec r\,',\vec r)\frac{\partial\psi(\vec r)}{\partial n} - \psi(\vec r\,')\frac{\partial G(\vec r\,',\vec r_1)}{\partial n}\Big]dS = \oint_S \psi(\vec r\,')\frac{\partial G(\vec r\,',\vec r_1)}{\partial n}$$

$$+\Big[G(\vec r\,',\vec r_1)\frac{\partial\psi(\vec r\,')}{\partial n}\Big]dS'$$

$$-4\pi\int_V \frac{g(\vec r\,')e^{-ik|\vec r-\vec r\,'|}}{|\vec r-\vec r\,'|} + \overbrace{4\pi\int_V \psi(\vec r\,')\,\delta(r-r_0)\,dV}^{\psi(\vec r)} =$$

$$= \oint_S \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|\vec r-\vec r\,'|}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ik|\vec r-\vec r\,'|}}{|\vec r-\vec r\,'|}\,dS' \Rightarrow R = |\vec r-\vec r\,'|$$

$$\Rightarrow \psi(\vec r) = \int_V g(\vec r\,')\frac{e^{-ikR}}{R}dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\Big[\frac{e^{ikR}}{2}\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ikR}}{R}\Big]dS$$

Чтобы решение $\exists$, $R\to\infty$: $\psi \sim \frac{e^{-ikR}}{R}$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} R\Big[\frac{\partial\psi}{\partial R} + ik\psi\Big] = 0$$

$\psi \sim e^{-ikR}$ — плоская волна

$\to R\to\infty$, тогда $\oint_S[\ldots]dS \to 0$

$$\psi(\vec r) = \int_V g(\vec r\,')\frac{e^{-ikR}}{R}dV$$

Можно сделать сх-ю волну (к источнику)

30 Функция Грина и общее решение неоднородного волнового ур-я при гармонической зависимости от времени. Представление векторного потенциала в виде интеграла по области источников. Усл. излучения

$\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$

$f(t) = Re\, f_k(t)$, $f_k(t) = e^{i\omega t}$

$\psi(\vec{r}, t) = Re\{\psi_k(\vec{r}, t)\}$

$\psi_k(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{i\omega t}$

$G(r, t) = Re\{G_k(\vec{r}, t)\}$

$G_k(\vec{r}, t) = G(r) e^{i\omega t}$

$\Delta G_k(r, t) + k^2 G_k(r, t) = -4\pi e^{i\omega t} \delta(\vec{r})$

$k = \frac{\omega}{v}$, $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$$G_k(r, t) = \frac{G_k\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r} = \frac{e^{i\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)}}{r} = \underbrace{\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)}_{= G(r)} e^{i\omega t}$$

$\Delta G(r) + k^2 G(r) = -4\pi \delta(\vec{r})$

$G(r) = \frac{e^{-ikr}}{r}$

$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}_1) + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}_1) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}_1|}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}$$

!!! $\to$ 29.

$$g(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r},\omega) e^{i\omega t} d\omega$$ (V)

$$\psi(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\vec{r},\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Пусть ф-л позволяет разложении в ряд Фурье:

$$\psi(\vec{r},\omega) = \int_V \frac{g(\vec{r}',\omega)}{R} e^{-i\omega k} dV'$$

$$\psi(\vec{r},t) = \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\vec{r}',\omega)}{R} e^{i\omega\left[t - \frac{R}{v(\omega)}\right]} d\omega\, dV'$$

$$k = \frac{\omega}{v(\omega)}; \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}$$

Пусть среда без дисперсии

$$\frac{dv}{d\omega} = 0: \psi(\vec{r},t) = \int_V \frac{1}{R}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\vec{r}',\omega) e^{i\omega\left(t - \frac{R}{v}\right)} d\omega\right\} dV' =$$

Замена переменных + (V)

$$= \int_V \frac{g\left(\vec{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV'$$

$$[g] = g\left(\vec{r}', t - \frac{R}{v}\right), \quad R = |\vec{r}' - \vec{r}|$$

Уже с излучением

$$\psi(\vec{r},t) = \int_V \frac{[g]}{R} dV'$$

29

31) Общее решение неоднор. волнового

75 ур-я при произвольной зависимости от

Представление потенциалов в виде $\int$ по области источников

$\psi \to A_{x,y,z}$; $g \to \frac{\mu}{c} j_{x,y,z}$

$\sim e^{i\omega t}$ $\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}$

A, j — зависят только от простр-ных координат

$$\lim_{R \to +\infty} R\left[\frac{\partial \vec{A}}{\partial R} + ik\vec{A}\right] = 0$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} e^{-ikR} dV'$$

Справедливо для однор. безгранич. изотр. среды. Но может обладать дисперсией

Для однор. ∞ среды, изотр. и без дисперсии:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{v}\right)}{R} dV' = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{[\vec{j}]}{R} dV$$

Для каждой гармоники справедливо ур-е Зоммерфельда — для всего поля справедливо

$\underline{1D}$: $\Delta\psi + k^2\psi = -4\pi\delta(x)$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \to \Delta G + k^2 G = -4\pi\delta(x)$$

$$G = Ae^{-ik(x)} = \begin{cases} Ae^{-ikx}, & k_x > 0 \\ Ae^{ikx}, & k_x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{d^2G}{dx^2}+k^2G\right)dx=\lim_{x\to0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}(-4\pi)\delta(x)\,dx$$

$$\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=0}-\left.\frac{dG}{dx}\right|_{x=-0}=-4\pi$$

$$-2ikA=-4\pi \to A=\frac{2\pi}{ik}$$

$$G(x)=\frac{2\pi}{ik}e^{ikx} \quad ?$$

2D: $\Delta_\perp G+k^2G=-4\pi\underbrace{\delta(x)\delta(y)}_{\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho)}$

$$\int\delta(x)\delta(y)\,dS_\perp=1$$

$$\int\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}\underbrace{dS}_{2\pi\rho d\rho}=1$$

$$G(\rho)=-i\pi H_0^{(2)}(k\rho)$$

$$H_m^{(1)}(\zeta)=J_m(\zeta)+iN_m(\zeta)$$

$$H_m^{(2)}(\zeta)=J_m(\zeta)-iN_m(\zeta)$$

$|\zeta|\to\infty$

$|\zeta|\gg m$

сх волна

$$H^{(1)}_{(2)}(\zeta)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\,e^{\pm i\left(\zeta-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$

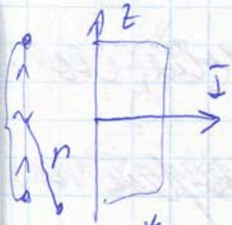
расх волна

$$H_0^{(2)}(k\rho)\Big|_{\rho\to\infty}\approx\frac{e^{-ik\rho}}{\sqrt{\rho}}$$

32) Элементарный эл. вибратор (диполь Герца)

Общее выражение для поля излучения.

$\boxed{77}$ Структура поля в квазистатич. и волн. зонах



$l \ll \lambda$ - излучатель элементарный

$l \ll r$ - усл. дальней зоны

$l \sim r$ - промежуточная зона

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{R} e^{-ikR}\, dV'$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}$$

$$\max r' = l \ll r$$

$R \approx r$ (работает только в знаменателе.)

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{cr}\int_V \vec{j}(\vec{r}') e^{-ikR}\, dV'$$

$$R = r\sqrt{1 - \frac{2r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}} = r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma\right) + \dots$$

$$e^{-ikR} \approx e^{-ikr + ikr'\cos\gamma}$$

$$|kr'\cos\gamma| \le kl = 2\pi\frac{l}{\lambda} \ll \pi$$

$$e^{-ikR} \approx e^{-ikr}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}')\, dV'$$ - дальняя зона

в статике: $\int_V \vec{j}\, dV = -\int_V \vec{r}\, \underbrace{\operatorname{div}\vec{j}}_{-\partial\rho/\partial t}\, dV$ - было в статике

$$\int \vec{j}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_V \vec{r}\rho\, dV}_{\text{дипольный момент системы}} = \frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{P}\, dV = \left\{\int_V \vec{j}\, dV = i\omega\vec{p}\right\} =$$

$\ominus \int \frac{\partial \vec P}{\partial t} dV \to \vec j = \frac{\partial \vec P}{\partial t}$, где $\vec P$ — поляризация, соответствующая току $\vec j$, т.е протекание перем. тока сопровожд. протеканием перем. заряда

$\frac{\omega}{c} = k_0$

$\vec A(\vec r) \simeq \mu i k_0 \vec p \frac{e^{-ikr}}{r}$

$\vec j = i\omega \vec P = i\omega \vec p\, \delta(\vec r)$

$\vec A = \frac{\mu}{c}\int \frac{\vec j(\vec r')}{R} e^{-ikR} dV'$

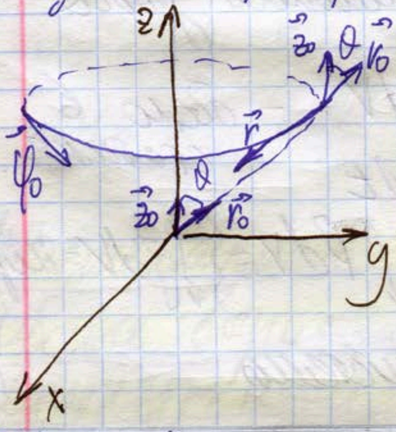
$R = |\vec r - \vec r'|$, $\vec j = i\omega \vec p\, \delta(\vec r')$

$\vec B = \mathrm{rot} \vec A = [\nabla, \mu i k_0 \vec p \frac{e^{-ikr}}{r}] \ominus$

$[\nabla, \vec p] = 0$ ($\vec p$ не зависит от координат)

пусть $\vec p = p \vec z_0$ (для определенности)

$\ominus \mu i k_0 [\nabla \frac{e^{-ikr}}{r}, p\vec z_0] = \mu i k_0 p \left(-ik - \frac{1}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}[\vec r_0, \vec z_0] \ominus$



$[\vec r_0, \vec z_0] = -\vec\varphi_0 \sin\theta$

$\ominus \vec\varphi_0 \mu p \sin\theta \left(\frac{ik_0}{r^2} - \frac{kk_0}{r}\right)\frac{e^{-ikr}}{r}$

$\vec B = B_\varphi \vec\varphi_0$

$B_\varphi = \mu H_\varphi$

$H_\varphi = \left(\frac{ik_0}{r^2} - \frac{kk_0}{r}\right) p \sin\theta \frac{e^{ikr}}{r}$ формулы для комплексных амплитуд в дальней зоне

$\mathrm{rot}\vec{H} = ik_0 \varepsilon \vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{=0}$ $r \gg d$ токов нет

$\vec{E} = -\frac{i}{k_0 \varepsilon} \mathrm{rot}\vec{H}$

$$\vec{E} = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{r}_0 & r\vec{\theta}_0 & r\sin\theta\vec{\varphi}_0 \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ 0 & 0 & r\sin\theta H_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r\sin\theta H_\varphi)}{\partial\theta}\vec{r}_0 - \frac{\partial}{\partial r} r^2\sin\theta H_\varphi \vec{\theta}_0\right)$$

$$E_r = -\frac{i}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta H_\varphi)$$

$$E_\theta = \frac{i}{k_0\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)$$

$E_r = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2}\right)e^{-ikr} p\cos\theta$ формулы для комплексных амплитуд

$E_\theta = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right)e^{-ikr} p\sin\theta$

$k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$

для Re $pe^{i\omega t - ikr} = pe^{i\omega(t - \frac{r}{v})}$, $k = \frac{\omega}{v}$

$i\omega pe^{i\omega t - ikr} = \frac{\partial}{\partial t} pe^{i\omega(t-\frac{r}{v})}$

$-\omega^2 pe^{i\omega t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} pe^{i\omega(t-\frac{r}{v})}$

$p(t) = \mathrm{Re}\{pe^{i\omega t}\}$

Обоз. $[p] = p\left(t-\frac{r}{v}\right) = Re\left\{pe^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}\right\}$

$[\dot{p}] = \frac{\partial}{\partial t}[p] = Re\left\{i\omega pe^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}\right\}$

$[\ddot{p}] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[p] = Re\left\{-\omega^2 pe^{i\omega\left(t-\frac{r}{v}\right)}\right\}$

$$E_r(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2[p]}{r^3} + \frac{2[\dot{p}]}{vr^2}\right)\cos\theta$$

$$E_\theta(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{vr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{v^2 r}\right)\sin\theta$$

$$H_\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\left(\frac{[\dot{p}]}{r^2} + \frac{[\ddot{p}]}{vr}\right)\sin\theta$$

Справедливо для парамет. завис. от t.
Для среды без дисперсии ф-лы справедливы для $\forall$ зависимости от времени.

Δ гармонические поля

квазистатика

$kr \ll 1$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad r \ll \lambda$

пренебрегение запаздыванием сигнала

$l \ll \lambda$, $l \ll r$, $l \ll r \ll \lambda$, $e^{-ikr} \approx 1$, $E_r: \frac{2}{r^3} \gg \frac{k}{r^2}$

$$E_r \approx \frac{2p\cos\theta}{\varepsilon r^3}$$

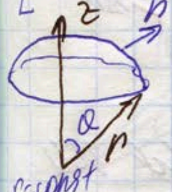
$$E_\theta \approx \frac{p\sin\theta}{\varepsilon r^3}$$

81 $$H_\varphi \approx \frac{ik_0 p\sin\theta}{r^2}$$

$rot\,\vec{H} = ik_0\varepsilon\vec{E}$

$rot\,\vec{H} \neq 0$ (в зоне квазист. поле не явл. локально потенц.)

$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = ik_0\varepsilon\int_S \vec{E}d\vec{S}$, $\quad d\vec{S} = \vec{r}_0 dS$



$\rho = r\sin\theta$

$$H_\varphi 2\pi\rho = ik_0\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta}\frac{2p\cos\theta'}{\varepsilon r^3}r^2\sin\theta'\underbrace{d\theta' d\varphi'}_{d\Omega'}$$

$\rho = r\sin\theta$

$$H_\varphi 2\pi r\sin\theta = ik_0\frac{p}{r}2\pi\underbrace{\int_0^{\theta}d(\sin^2\theta')}_{\sin^2\theta}$$

$$H_\varphi = \frac{ik_0 p\sin\theta}{r^2}$$

задача 6.14

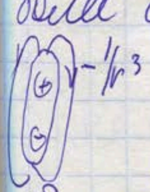
<u>волн. зона</u> (зона индукции $kr\sim 1$, $r\sim\lambda$)

$kr\gg 1$, $r\gg\lambda$, $l\ll\lambda\ll r$, $l\ll\lambda$, $l\ll r$

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &\approx -\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r}p\sin\theta \\ H_\varphi &\approx -k_0 k\frac{e^{-ikr}}{r}p\sin\theta = \frac{E_\theta}{\eta}\end{aligned}\right\}\ \text{расх. сфер. волны}$$

$$E_r \approx \frac{2ik}{\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r^2}p\cos\theta \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

более быстрый закон спадания $|E_r| \ll |E_\theta|$ кроме $\theta = 0, \pi$

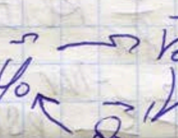


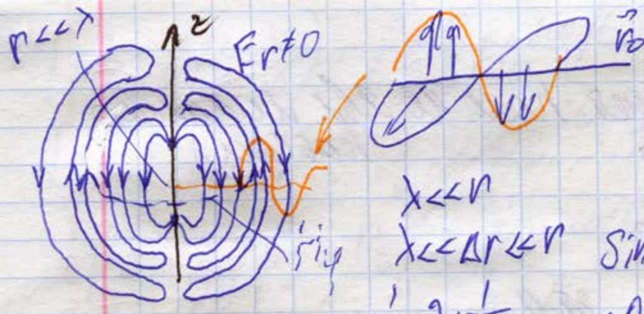
вблизи ист. $\sim 1/r^3$

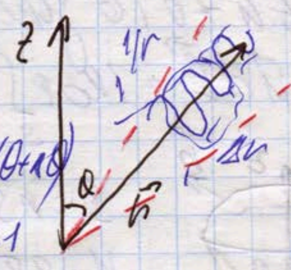
вдали $1/r$

$\vec{E} = E_\theta\vec{\theta}_0$, $\vec{H} = H_\varphi\vec{\varphi}_0$, $\vec{n} \equiv \vec{r}_0$

$\vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{n}]$





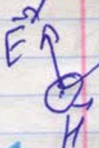


$\lambda << r$

$\lambda << \Delta r << r$ $\quad \sin\theta \approx \sin(\theta+\Delta\theta)$

$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r+\Delta r}$ $\quad \Delta\theta = \frac{\Delta r}{r} << 1$

Не будет заметного изменения поля ни по радиусу, ни по углу.



Выглядит как фрагмент бегущей плоской волны

33 Диаграмма напр-ти излучения по мощности. Сопр-ние излучения. Выражения для диаграммы напр-ти, полной мощности излучения и сопротивления излучения элем. эл вибратора

$$\vec S = \frac{c}{8\pi} Re[\underbrace{\vec E}_{E_\theta \vec\theta_0}, \underbrace{\vec H^*}_{H_\varphi^* \vec\varphi_0}]$$

$\frac{E_\theta}{H_\varphi} = \eta$; $H_\varphi = \frac{E_\theta}{\eta}$ среда без потерь

$$\vec S = \frac{c}{8\pi} Re\left(E_\theta \frac{E_\theta^*}{\eta}\right)\underbrace{[\vec\theta_0, \vec\varphi_0]}_{\vec r_0} = \underbrace{\frac{c}{8\pi\eta}|E_\theta|^2}_{S_r} \vec r_0$$

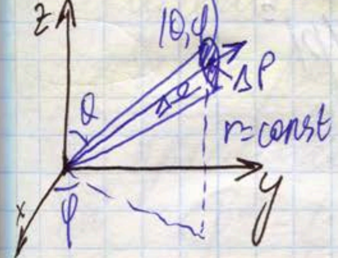
$\boxed{83}$ $\quad E_\theta = \frac{k^2}{\varepsilon}\frac{e^{-ikr}}{r} p\sin\theta$

$$S_n = \frac{c}{8\pi\eta}\frac{k^4|p|^2}{\varepsilon^2 r^2}\sin^2\theta = \langle k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}\rangle = \frac{c}{8\pi}\mu\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{k_0^4|p|^2}{r^2}\sin^2\theta$$

$max: \theta = \frac{\pi}{2}$

можно говорить о

$min: \theta = 0\,(\uparrow z), \pi\,(\downarrow z)$ напр-ти излучения



$$\Delta P = \lim_{r\to\infty}\int_{\Delta S} S_n \underbrace{dS}_{r^2 d\Omega} = \lim_{r\to\infty}\int_{\Delta S} S_n r^2 d\Omega$$

$$D = \lim_{\Delta\Omega\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta\Omega}$$

$$D = D(\theta,\varphi)$$

Диаграмма направленности излучения по мощности есть угловое распределение мощности излучаемой в единицу телесного угла (в смысле предела, а не буквально)

$$D = \lim_{\Delta\Omega\to 0}\frac{1}{\Delta\Omega}\left\{\lim_{r\to\infty}\underbrace{\int S_n r^2 d\Omega}_{(S_n r^2)\Delta\Omega}\right\} = \lim_{r\to\infty}\left[\underbrace{S_n(r,\theta,\varphi)}_{\sim 1/r^2} r^2\right]$$

на ∞ $D = D(\theta,\varphi)$

Бывает диагр. напр-ти по амплитуде (r-фикс)

Бывает по фазе

$$D = \frac{c^2}{8\pi}\frac{1}{\varepsilon^2\eta}k^4|p|^2\sin^2\theta$$

$$\frac{D}{D_{max}} = \sin^2\theta$$

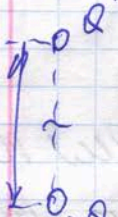
$$D^{(0)} = \frac{c}{8\pi}k_0^4|p|^2\sin^2\theta$$

Вдоль полярного направления нет мощности

$$P_\Sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D(\theta,\varphi)\underbrace{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{d\Omega}$$

$$P_\Sigma = \frac{c}{8\pi}\frac{1}{\varepsilon^2\eta}k^4|p|^2\, 2\pi\underbrace{\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta}_{4/3} = \frac{1}{3}\frac{c}{\varepsilon^2\eta}k^4|p|^2$$

$$P_\Sigma \sim \omega^4|p|^2$$



$$|p| = |Q|\, l$$

$$I + \dot{Q} = 0$$

$$I = -i\omega Q$$

$$|I| = \omega|Q|$$

$$|p| = \frac{|I|}{\omega}\, l$$

$k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$

$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$c\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{c}\frac{c^2}{\omega^2} = \frac{1}{c}k_0^{-2}$

$$P_\Sigma = \frac{1}{2}|I|^2\frac{1}{c}\frac{2}{3}\frac{\mu^2}{\eta}(k_0 l)^2 = \frac{1}{2}R_\Sigma|I|^2$$

$$R_\Sigma = \frac{1}{c}\frac{2}{3}\frac{\mu^2}{\eta}(k_0 l)^2$$

Сопротивление излучения есть величина, равная сопр-ию активной (омической) нагрузки, на которой при силе тока, равной силе тока в излучателе, выделяется мощность, равная излучаемой мощности.

$\boxed{85}$ вакуум: $R_\Sigma^{(0)} = \frac{1}{c}\frac{2}{3}(k_0 l)^2$ (СГС)

39) Элементарный магнитный диполь. Структура поля в волновой зоне, диаграмма направленности и полная мощность излучения. Сопротивление излучения кругового витка малых электрических размеров.

По применении принципа двойственности.

$\vec{p}^m = \frac{\mu}{c} I S \vec{n}$

$S = \pi a^2$

$\vec{p} = \vec{p}^e \to \vec{p}^m$

$\vec{E} \to \vec{H}$

$\vec{H} \to -\vec{E}$

$\varepsilon \to \mu, \mu \to \varepsilon, \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \to \frac{1}{\eta}$

$(I) \to E_\varphi = -\left(\frac{ik_0}{r^2} - \frac{k_0 k}{r}\right) e^{-ikr} p^m \sin\theta$

$H_r = \frac{1}{\mu}\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2ik}{r^2}\right) e^{-ikr} p^m \cos\theta$

$H_\theta = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{ik}{r^2} - \frac{k^2}{r}\right) e^{-ikr} p^m \sin\theta$

$a \ll \lambda, a \ll r$

$D^m = \frac{c}{8\pi} \frac{\eta}{\mu^2} k^4 |p^m|^2 \sin^2\theta$

$P_\Sigma^m = \frac{1}{3} c \frac{\eta}{\mu^2} k^4 |p^m|^2$

$$P_\Sigma = \frac{1}{3} c \frac{\varepsilon}{\mu^2} k^4 \frac{\mu^2}{c^2} |I|^2 (S a^2)^2 = \frac{1}{2}|I|^2 \underbrace{\frac{1}{c}\frac{2}{3}\eta S^2 (ka)^4}_{R_\Sigma}$$

$$R_\Sigma = \frac{1}{c}\frac{2}{3}\eta S^2 (ka)^4$$

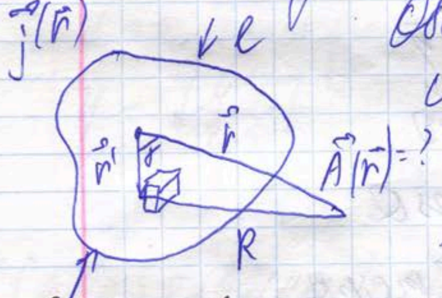
$$R_\Sigma^{m(0)} = \frac{1}{c}\frac{2}{3} S^2 (k_0 a)^4$$

Сравним диполь с рамкой при $a = l$, $kl \ll 1$

$R_\Sigma \sim (kl)^2 \gg R_\Sigma^{(m)}$

$ka \ll 1$ $\quad R_\Sigma^{m} \sim (ka)^4$

(35) Общее представление поля излучения произвольной системы заданных гармонических токов в дальней зоне. Вектор излучения



Общность в том, что l произвольно по отношению к λ.

$l \ll r$ - дальняя зона (недостаточно)

Дальняя зона произвольной системы заданных токов есть область пр-ва, где поля элементов $(\vec{E}, \vec{H})$ спадают по закону $\sim \frac{1}{r}$. Нужно

1) $r \gg l$ (для элементарного достаточно)

87 2) $\frac{\lambda r}{l} \gg 1$ (условие зоны Фраунгофера)

3) $kr \gg n \geq 1$ n - число вариаций токов

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,') \frac{e^{-ikR}}{R} dV'$$

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma} = r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{r'^2}{r^2}}$$

$R \approx r$ (1)

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu}{cr}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,') e^{-ikR} dV'$$

$$\sqrt{1+\xi} = 1 + \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{8}$$

$$R = r\left\{1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2} - \frac{1}{8}4\frac{r'^2}{r^2}\cos\gamma + \ldots\right\} \approx$$

$$\approx r\left[1 - \frac{r'}{r}\cos\gamma + \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}\sin^2\gamma\right]$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu}{cr}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,') e^{-ikr + ikr'\cos\gamma - ik\frac{r'^2}{2r}\sin\gamma} dV'$$

$$k\frac{1}{2}\frac{r'^2}{r}\sin^2\gamma \leq \frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{2}\frac{l^2}{r} = \pi\frac{l^2}{\lambda r} \ll 1 \quad \ll \pi$$

2) $\frac{\sqrt{\lambda r}}{l} \gg 1$ — в фазе x

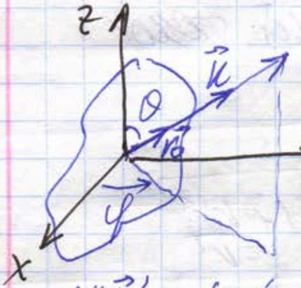
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,') e^{ikr'\cos\gamma} dV'$$

$$|kr'\cos\gamma| \leq \frac{2\pi}{\lambda} l \ll \pi$$

$$\frac{\sqrt{\lambda r}}{l} = \sqrt{\frac{\lambda}{l}\frac{r}{l}} \gg 1$$

$\vec{r}_0 \equiv \vec{n}$

$\vec{k} = k\vec{n} \equiv k\vec{r}_0$



$kr'\cos\gamma = \vec{k}\vec{r}'$, г.к. $\gamma = (\vec{k},\vec{r}')$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\vec{N}$$

$\vec{N} = \int \vec{j}(\vec{r}')e^{i\vec{k}\vec{r}'}dV'$ вектор излучения

$$e^{i\vec{k}\vec{r}'} = e^{ik_x x' + ik_y y' + ik_z z'}$$

$$dV' = dx'dy'dz'$$

$\vec{N}$ - пространственный Фурье-вектор по отношению $\vec{k}$

$$\vec{N} = \vec{N}(\vec{k}) = \vec{N}(k_x, k_y, k_z)$$

$\vec{k} \uparrow\uparrow \vec{r}_0$

$k_x = k\sin\theta\cos\varphi$

$k_y = k\sin\theta\sin\varphi$ $\quad$ $\vec{N} = \vec{N}(\theta,\varphi)$ зависит от точки наблюдения

$k_z = k\cos\theta$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\vec{N}(\theta,\varphi)$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \left[\nabla, \frac{\mu}{c}e^{-ikr}\cdot\frac{1}{r}N(\theta,\varphi)\right]$$

$e^{-ikr} = \cos kr - i\sin kr$: масштаб λ

$\frac{1}{r}$: масштаб r - характерный пространственный масштаб, по которому меняется ф-я

89 $kr \gg 1$ $\quad 2\pi\frac{r}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow r \gg h\lambda \geq \lambda$

$\vec{N}(\theta, \varphi)$: $r\frac{\pi}{n}$

$\Delta\theta\Delta\varphi \sim \frac{\pi}{n}$ $r\varphi\ \Delta\theta$

$r\frac{\pi}{n} \overset{?}{\gtrless} \lambda$

$\frac{r}{n} \gg \lambda$

$r \gg \lambda \ll r\frac{\pi}{N}$

Быстрее всего меняется e^{-ikr}, производная от неё будет самой большой

$$\vec{B} \overset{3)}{\simeq} [\underbrace{\nabla e^{-ikr}}_{-ik e^{-ikr}\vec{r_0}}, \frac{\mu}{c}\frac{1}{r}\vec{N}] = [-i\vec{k}, \underbrace{\frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\vec{N}}_{\vec{A}}]$$

$$\vec{B} = [\nabla, \vec{A}] \overset{3)}{\simeq} [-i\vec{k}, \vec{A}]$$

k - не вектор $\vec{k}$ плоской волны

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = ik_0\varepsilon E + \underbrace{\frac{4\pi}{c}\vec{j}}_{=0,\ \text{т.к. дальняя зона}}$$

$$\vec{E} = -\frac{i}{k_0\varepsilon}[\nabla, \vec{H}] \simeq -\frac{i}{k_0\varepsilon}[-i\vec{k}, \vec{H}]$$

$$\vec{k} = k\vec{n},\quad \vec{n} \equiv \vec{r_0},\quad k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\vec{E} = \frac{k}{k_0\varepsilon}[\vec{H}, \vec{n}] = \eta[\vec{H}, \vec{n}],\quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$ совпадает с результатом

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$|\vec{E}|, |\vec{H}| \sim |\vec{A}| \sim \frac{1}{r}$$

сновные характеристики направленности излучающей системы (диаграмма направленности, коэффициент направленного действия). Общее выражение для диаграммы напр-ти излучения произвольной системы гармонических токов.

$$\vec S = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec E,\vec H^*] = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\eta[\vec H,\vec n],\vec H^*] = \frac{c}{8\pi}\eta\,\mathrm{Re}\{\vec n\underbrace{(\vec H,\vec H^*)}_{|\vec H|^2} - \vec H\underbrace{(\vec n,\vec H^*)}_{0}\} = \frac{c}{8\pi}\eta|\vec H|^2\vec r_0 = S_r\vec r_0$$

$$D = \lim_{r\to\infty} S_r r^2 = \frac{c}{8\pi}\eta|\vec H|^2 r^2$$

$$\vec H = \frac{1}{\mu}[-ik\vec r_0,\vec A] = \frac{1}{\mu}\frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}(-ik)[\vec r_0,\vec N] = \{\vec N = N_r\vec r_0 + N_\theta\vec\theta_0 + N_\varphi\vec\varphi_0\} = \frac{1}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}(-ik)\{-\vec\theta_0 N_\varphi + \vec\varphi_0 N_\theta\}$$

$$|\vec H|^2 = \frac{1}{c^2}\frac{1}{r^2}k^2\{|N_\theta|^2 + |N_\varphi|^2\}$$

$$D(\theta,\varphi) = \frac{c}{8\pi}\eta|\vec H|^2 r^2 = \frac{\eta}{8\pi c}k^2\{|N_\theta(\theta,\varphi)|^2 + |N_\varphi(\theta,\varphi)|^2\}$$

$$D_{max} = D(\theta_{max},\varphi_{max})$$

$$f(\theta,\varphi) = \frac{D(\theta,\varphi)}{D_{max}}$$

31) Коэф-т направленного действия

$$P_\Sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} D(\theta,\varphi)\sin\theta \, d\theta$$

$$КНД = \frac{D_{max}}{\langle P_\Sigma / 4\pi \rangle}$$

$$КПД = \frac{P_\Sigma}{P_{подв}}$$

D = КНД · КПД (коэф. усиления)

$$D = \frac{D_{max}}{\langle P_{подв}/4\pi \rangle}$$

$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{\ell}$ $\ell \gg \lambda$ верно только для синфазных распределений тока

Все расчеты для заданных токов. В реальности мы задаем напряжение, а ток — какой получится