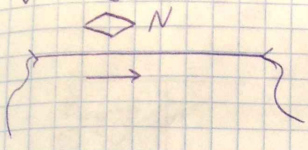
Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея

Эрстед 1820 г.

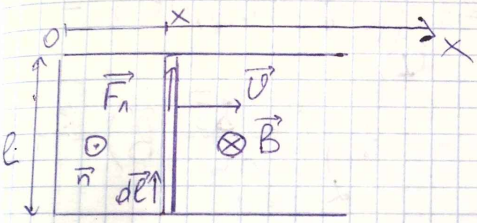


Фарадей 1831 г.

I тем больше, чем больше v, направление тока зависит от направления движения и полюса магнита

Случай движущихся проводников

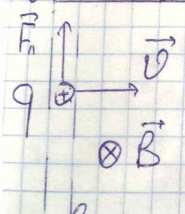
Станок Ампера



$\vec{B} = const$

$\vec{B} \neq \vec{B}(\vec{r})$

сила Лоренца является сторонней по отношению к кулоновской силе



$$\vec{F}_л = fq[\vec{v}, \vec{B}]$$

возникает индукционный ток

$$\mathcal{E} = \frac{A_{стор}}{q} \qquad A_{стор} = \int_{(l)} F_{л_l} dl = F_л \cdot l = fqvB \cdot l$$

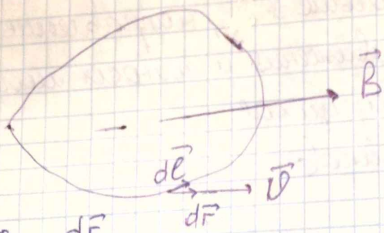
$$\mathcal{E} = fvB \cdot l = f\frac{dx}{dt} l \cdot B = f \cdot \frac{dS}{dt} B = -f\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$x \cdot l = S$$

$$d\Phi_B = (\vec{B}, d\vec{S})$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{инд.} = -f\,\frac{d\Phi_B}{dt}}$$



$$\vec{F}_л = fq[\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\vec{E}_{стор} = \frac{\vec{F}_л}{q} = f\cdot[\vec{v}, \vec{B}]$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\mathcal{E} = \int \vec{E}_{стор}\, d\vec{l} =$$

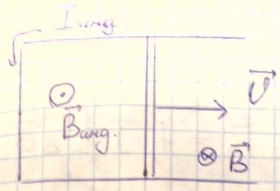
$$= f\cdot\int_{(L)} \left(\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{B}\right], d\vec{l}\right) =$$

$$= f\cdot\int_{L} \left(\left[d\vec{l}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right], \vec{B}\right) = -f\int_{L} \left(\frac{d(\delta\vec{S})}{dt}, \vec{B}\right) = -f\frac{d\Phi}{dt}$$

$$[d\vec{l}, d\vec{r}] = -\delta\vec{S}$$

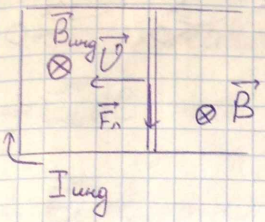
$$\int_{(L)} \delta\vec{S} = \vec{S}$$

Правило Ленца – направление индукцион-ного тока всегда такое, чтобы индукцион-ток своим магнитным полем препятствовал причине его возбуждающей.



$\Phi \uparrow$

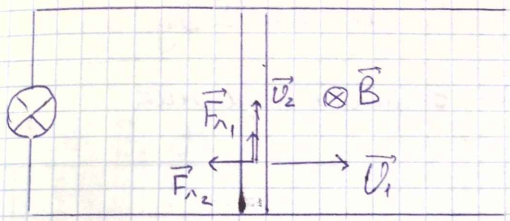
$\vec{B}_{инд} \uparrow\downarrow \vec{B}$



$\Phi \downarrow$

$\vec{B}_{инд} \uparrow\uparrow \vec{B}$

Энергетические соотношения динамомашины



$\vec{F}_л = fq\,[\vec{v}, \vec{B}]$

$\vec{F}_{л_1} \perp \vec{v}_1$

$\vec{v}_2 \uparrow\uparrow \vec{F}_{л_1}$

$\vec{F}_{л_2} \perp \vec{v}_2$

$\vec{F}_{л_2} \uparrow\downarrow \vec{v}_1$

$$\vec{F}_\Sigma = \vec{F}_{л_1} + \vec{F}_{л_2}$$

$$P = \frac{dA}{dt} = (\vec{F}_\Sigma, \vec{v}) = (\vec{F}_{л_1} + \vec{F}_{л_2}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) =$$

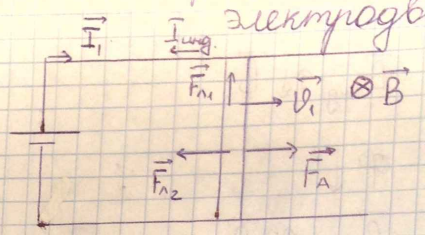
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$= \underbrace{\vec{F}_{л_1} \cdot \vec{v}_1}_{0} + \underbrace{\vec{F}_{л_2} \cdot \vec{v}_1}_{<0} + \underbrace{\vec{F}_{л_1} \cdot \vec{v}_2}_{>0} + \underbrace{\vec{F}_{л_2} \cdot \vec{v}_2}_{0} =$$

$$= \underbrace{f \cdot q\, v_1 B}_{F_{л_1}} \cdot v_2 - \underbrace{f q\, v_2 B}_{F_{л_2}} \cdot v_1 = 0$$

лампочка горит за счет работы по перемещению перемычки

Энергетические соотношения электродвигателя



$$\vec{F}_л = f \cdot I\,[\Delta\vec{l}, \vec{B}]$$

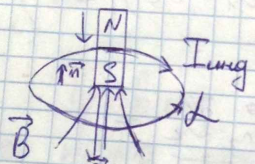
$$A_\Sigma = \underbrace{A_{F_A}}_{>0} + \underbrace{A_{F_{л2}}}_{<0} = 0$$

$\vec{F}_{л2} \perp \vec{v}_2$

$\vec{F}_{л2} \uparrow\downarrow \vec{F}_A$

	Динамомашина	Эл. / двигатель
первич. ($A>0$)	$\vec{F}_л$ за счет $\vec{v}_1$	$\vec{F}_A$ за счет внеш. $\mathcal{E}$
вторич. (нагр.) ($A<0$)	$F_{л2}$ за счет $\vec{v}_2$ (т.е. за счет $I_{инд}$)	$F_л$ за счет $I_{инд}$
что работает	Сила, двигающ. перемычку	внешний источник

Электро-магнитная индукция в неподвижных проводниках. Индукцион. электрич. поле



$$\vec{B} = \vec{B}(t')$$
$$\Downarrow$$
$$\Phi = \Phi(t')$$

$v \ll c \Rightarrow t = t'$

$$\mathcal{E}_{инд} = -f\,\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

$$\Phi = \int_{(S)} B_n\,dS \qquad \dot{\Phi} > 0$$

знак "-" показывает, что проводник с током пр[illegible]пятствует своим $\vec{B}_{инд}$ увеличению $\vec{B}$

$\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F}_л = 0$

$\vec{F}_{эл} = q' \cdot \vec{E}$

в этой с-ме есть электрич. поле, оно отличается от кулоновского поля.

Главное отличие: кулоновское поле не может поддерживать ток в цепи

$$\oint_L E_e^{кул.} dl = 0$$

$$\oint_{(L)} E_e^{инд} dl \neq 0$$

(индукцион. = вихревое)

линии поля $E^{инд}$ замкнуты

$$\mathcal{E}_{инд} = \oint_{(L)} E_e dl$$

$$\boxed{\oint_{(L)} E_e dl = -f \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} B_n dS}$$

Одно из ур-ний Максвелла.

Максвелл ввел понятия индукцион. поля

если есть в пространстве еще заряды, то вид ур-ния не изменится

$\vec{E}_\Sigma = \vec{E}^{кул} + \vec{E}^{инд}$ $\quad \oint_{(L)} E_{\Sigma e} dl = \oint_{(L)} E_e^{инд} dl + \underbrace{\oint_{(L)} E_e^{кул.} dl}_{=0}$

Для наличия индукц. поля проводники не нужны

При любом изменении магнитн. потока возникает $\mathcal{E}_{инд}$

Причины

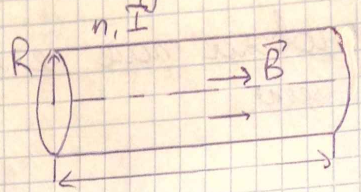
1. Подвижн. проводник – сила Лоренца
2. Неподвижн – индукцион. поле

Примеры проявления электро-магнитной индукции

① Связь $\vec{B}$ и $\vec{E}$

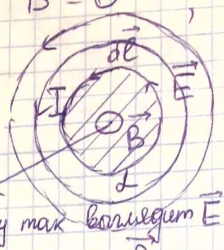
n, I, R, ℓ

$\ell \gg R$



$B = \beta 4\pi n I$, $(r < R)$

$B = 0$, $r \geq R$



$I = I(t) \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(t) \Rightarrow \Phi = \Phi(t)$

$\Rightarrow E \neq 0$ $\quad E(r) = ?$

почему так выглядит $\vec{E}$? линии $\vec{E}$ замкнуты, $\vec{E}$ охватывает $\vec{B}$

$\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$

$\vec{E} \parallel d\vec{\ell}$

$$\oint_L E_\ell d\ell = E_\ell \oint_L d\ell = E_\ell 2\pi r$$

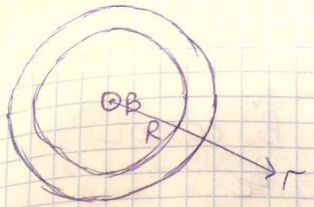
$B_n = B = const$ на S

1) $r < R$

$$\iint_{(S)} B_n dS = B \cdot \pi r^2 = \beta \cdot 4\pi n I \pi r^2$$

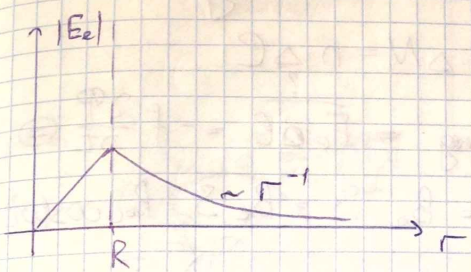
$$E_\ell \cdot 2\pi r = -f \beta \cdot 4\pi n \dot{I} \pi r^2$$

$$E_\ell = -f \beta \cdot 2\pi n \dot{I} r$$



$$E_e \cdot 2\pi r = -f\beta \cdot 4\pi n I \pi R^2$$

$$E_e = -f\beta \cdot 2\pi n \frac{R^2}{r}$$



вне соленоида поля $\vec{B}$ нет, но зато есть $\vec{E}$, связь нелокальна

② Измерение магнитного поля с помощью электромагнитной индукции

(возможно измерение <u>только</u> перемен. $\vec{B}$)

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$

$\vec{B}$ – однородно в пределах рамки

$\vec{B} = \vec{B}_0(\vec{r})\cos(\omega t)$

$\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}_0$

$$\Phi = \iint_{(S)} B_n \, dS = B_{0n}\cos(\omega t)\, S$$

$$\mathcal{E}_{инд} = -f\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \underbrace{f B_{0n}\omega S}_{\mathcal{E}_0} \sin(\omega t) =$$

$$= \mathcal{E}_0 \sin\omega t$$

Зная $\mathcal{E}_0$ и ω можно померить B_0

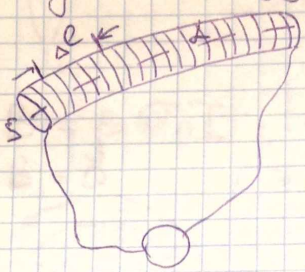
③ Измерение циркуляции поля $\vec{B}$ с помощью пояса Роговского

$$\oint_{(L)} B_e \, dl = ?$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t)$$

$$B_{on} = B_e$$

длинной узкий гибкий соленоид



$$\Delta N = n \cdot \Delta l$$

$$\Delta \mathcal{E}_{инд} = \overrightarrow{E_e \Delta l} = -f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \ominus$$

$$\Delta \Phi = B_n \cdot S = B_e S = B_{0e} \cos(\omega t) \cdot S$$

$$\ominus \; f \cdot B_{0e} \, \omega S \sin(\omega t) \, \Delta N = n \cdot \Delta l$$

$$\mathcal{E}_{инд} = \int d\mathcal{E}_{инд} = f \cdot B_{0e} \, \omega S \oint_{(L)} n \sin(\omega t) \, dl =$$

$$= f \cdot B_{0e} \cdot \omega S \cdot n \sin(\omega t) \cdot L =$$

$$= \underbrace{f \cdot \omega S n \oint_L B_{on} \, dl}_{\mathcal{E}_0} \sin(\omega t)$$

$$\mathcal{E}_{инд} \sim \int_L B_{on} \, dl$$

④ Токи Фуко

$$\vec{B} = \vec{B}(t) \Rightarrow \Phi = \Phi(t) \Rightarrow \mathcal{E}_{инд} \Rightarrow Q_{дж}$$

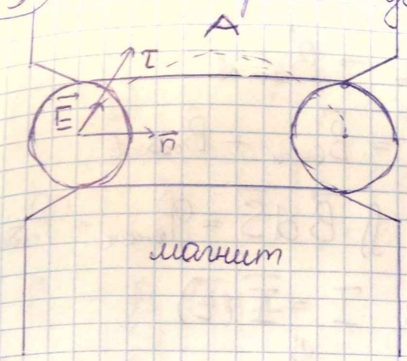
$$\Downarrow$$

$$I_{инд}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{F}_A$$

5) Бетатрон - устр-во для ускорения электронов



ускорение индукц. полем

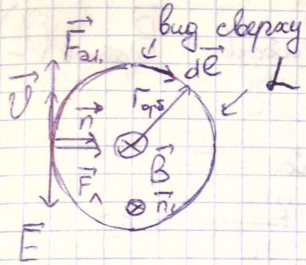
$$n: \frac{m\vartheta^2}{r_{орб}} = f q \vartheta B_{орб} \Rightarrow$$

$$m\vartheta = f q r_{орб} \cdot B_{орб}$$

$$q = |e|$$

$$\tau: \frac{d(m\vartheta)}{dt} = q E_{инд}$$

$q = -e$



$$\oint_{(L)} E_{инд} dl = -f \frac{\partial \Phi_B}{\partial t} =$$

$$= -f \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} B_{n_1} dS$$

$$E_{инд} e 2\pi r_{орб} = -f \frac{d\langle B_{n_1}\rangle}{dt} \cdot \pi r_{орб}^2$$

$$B_{n_1} = B$$

$$E_{инд} e = -E_{инд}$$

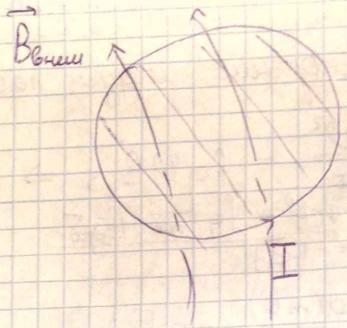
$$\frac{d(m\vartheta)}{dt} = q f \frac{d\langle B\rangle}{dt} \frac{r_{орб}}{2}$$

$$m\vartheta = q f \frac{\langle B\rangle}{2} \cdot r_{орб}$$

$$B_{орб} = \frac{\langle B\rangle}{2}$$ – бетатронное условие

условие постоянства радиуса равновесной орбиты в бетатроне

Самоиндукция. Индуктивность



$$I \to \vec{B}_{собств}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{внеш} + \vec{B}_{собств}$$

$$\Phi = \iint \vec{B}\, d\vec{S} = \Phi_{внеш} + \Phi_{собств}$$

Пусть $I = I(t)$

$$\Downarrow$$

$$\vec{B}_{собств} = \vec{B}_{собств}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\partial \Phi_{собств}} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0$$

$$\mathcal{E}_{инд} = -f\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\mathcal{E}_{с\text{-}инд} = -f\frac{\partial \Phi_{собств}}{\partial t}$$

$$\Phi_{собств} \sim B_{собств} \sim I$$

$$\Phi_{собств} = fLI \qquad f = \begin{cases} 1, & SI \\ \frac{1}{c}, & CGSM \end{cases}$$

L – индуктивность = коэффициент самоиндукции

L зависит от геометрии проводника и его разм[illegible]

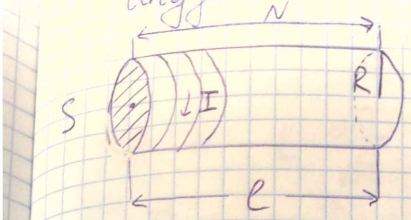
$$[L] = \begin{cases} Гн, & SI \\ см, & CGSM \end{cases}$$

$$[\Phi] = 1\,Вб = 1\,Тл \cdot 1\,м^2$$

$$1\,Тл = 10^4\,Гс$$

$$1\,Гн = 10^9\,см$$

Индуктивность длинного соленоида



$l \gg \sqrt{S}$

$n = \frac{N}{l}$

$L = ?$

$B = \beta \cdot 4\pi n I$

$\beta = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi}, & SI \\ \frac{1}{c}, & CGSM \end{cases}$

$\Phi_1 = B S$

$\Phi = \Phi_1 \cdot N$ – потокосцепление

$\Phi = \beta \cdot 4\pi n I \cdot S \cdot N = \beta \cdot 4\pi I S \frac{N^2}{l}$

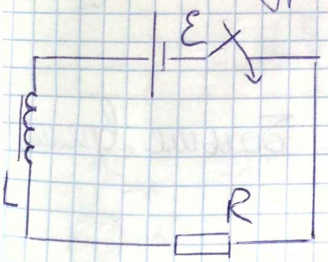
$\Phi = f L I \Rightarrow L = \frac{\Phi}{f I} = \frac{\beta}{f} 4\pi S \frac{N^2}{l}$

$L = \frac{\mu_0}{\cancel{4\pi}} \cdot \cancel{4\pi} S \frac{N^2}{l} = \mu_0 \cdot S \frac{N^2}{l}$

$l = 10$ см, $R = 1$ см, $n = 100 \frac{\text{вит}}{\text{см}}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$

$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{м}^2 \cdot \frac{10^6}{10^{-1} \text{м}} = 4 \cdot 10^{-3}$ (Гн)

Процесс установления в контуре с индуктивностью



$I(0) = 0$

$I(t) = ?$

в каждый момент времени будут справедливы пр-ла Кирхгофа и з-н Ома.

$IR = \mathcal{E}_\Sigma = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{с-инд}}$

SI: $\mathcal{E}_{\text{с-инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

$$\varphi = LI$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial (LI)}{\partial t} = L\frac{dI}{dt}$$

$$IR = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E} - IR}{L}$$

$$\int_0^{I(t)} \frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \int_0^t \frac{dt}{L}$$

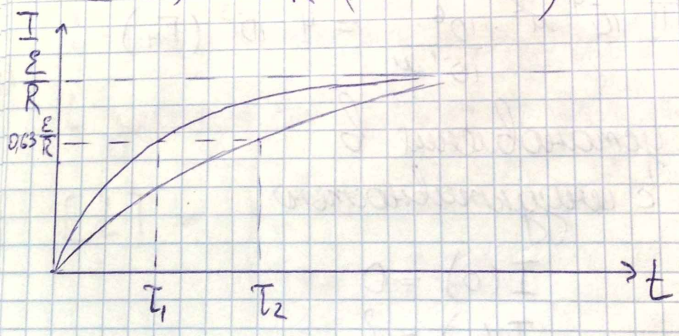
$$\frac{1}{R}\ln\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E} - IR} = \frac{t}{L}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t\frac{R}{L}}\right)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

τ - постоянная времени

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



$$\tau_1 = \frac{L_1}{R}$$

$$\tau_2 = \frac{L_2}{R}$$

$L_2 > L_1$

$\Downarrow$

$\tau_2 > \tau_1$

чем больше индуктивность, тем больше время установления

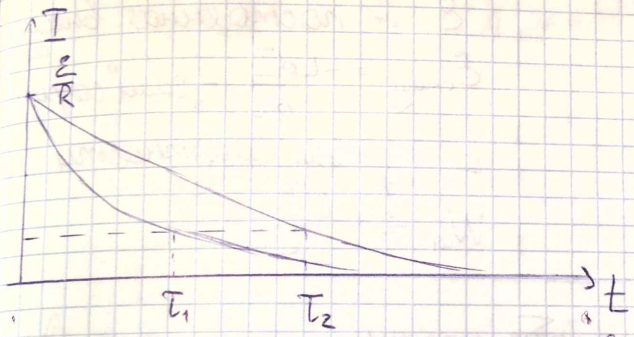
$K \uparrow$

$$I(t=0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

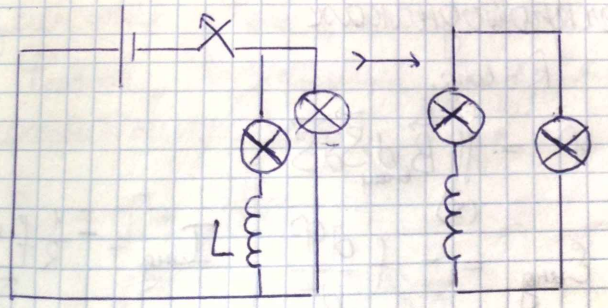
$$IR = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\int_{\frac{\mathcal{E}}{R}}^{I(t)} \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R\,dt}{L}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$



индуктивность затягивает время установления тока

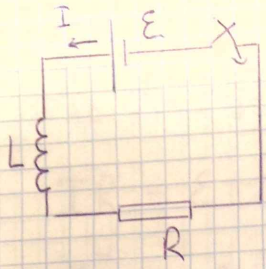


— экстраток размыкания

Электромеханические аналогии

$$\vec{F}_{сопр} = -h\vec{v}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - h\vec{v}$$



$$IR = \mathcal{E} - L\frac{dI}{dt}$$

Механика	Эл. / магн.
$\vec{v}(t)$	$I(t)$ – изменяющ. величина
$m\vec{a}$	$\mathcal{E}$ – постоянная внешняя сила
$-h\vec{v}$	$\mathcal{E}_{с\text{-}инд} = -L\frac{dI}{dt}$ – „сила" сопротивления
m	L – мера инертности
$\frac{mv^2}{2} = W_к$	$W_м \overset{?}{=} \frac{LI^2}{2}$

Некоторые особенности индукционных явлений в сверхпроводниках

R – сопр.

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{B}_{внеш}\, d\vec{S}$$

$$\mathcal{E}_{инд} = -f\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{инд} = I_{инд} \cdot R$$

$$I_{инд} = -\frac{1}{R} f \frac{d\Phi}{dt}$$

$R \to 0$ (при охлаждении проводника)

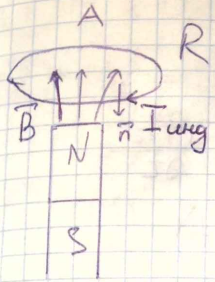
$$|I_{инд}| < \infty$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \Rightarrow \Phi = const$$

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{внеш} + \Phi_{собств} = const$$

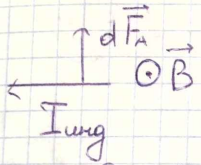
На сколько изменился $\Phi_{внеш}$ на столько же с против. знаком изменил $\Phi_{собств.}$

$$\Delta\Phi_{внеш} = -\Delta\Phi_{собств}$$ правило Ленца в граничн. условиях.



$$B = B(t) \Rightarrow I_{инд} \neq 0$$

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_{внеш} + \Phi_{собств}$$



$$d\vec{F}_A = f I_{инд} [d\vec{l}, \vec{B}]$$

· возникла сила противодействующая силе тяжести, если кольцо начнет падать, то изменится $\Phi_{внеш}$, но также возникнет изменится $\Phi_{собств.}$, возникшая сила Ампера будет противоположно направлена $F_{тяж}$

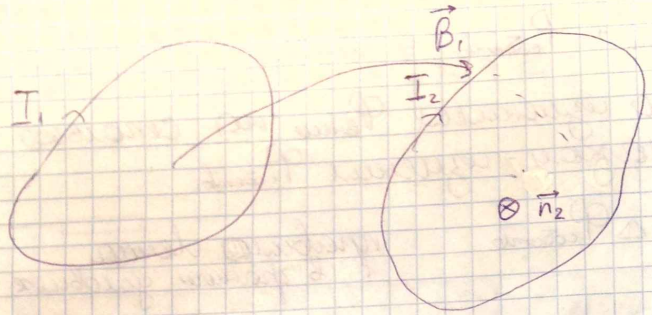
$$F_x = p_m \frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\vec{p}_m = f I \vec{S} = f I S \vec{n}$$

Для сверхпроводника F_A стремится вытолкнуть его из поля

$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$ $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{B}$ – для провод. с конечным R

для сверхпроводящ. $\vec{n} \downarrow\uparrow \vec{B}$ – положение равновесия



$I_1 \to \vec{B}_1 \to \Phi_{12}$

$I_1 = I_1(t) \Rightarrow \Phi_{12}(t) \Rightarrow \mathcal{E}_{инд_2} = -f \dfrac{\partial \Phi_{12}}{\partial t}$

$I_2 = I_2(t) \Rightarrow \vec{B}_2 = \vec{B}_2(t) \Rightarrow \Phi_{21} = \Phi_{21}(t)$

$\Downarrow$

$\mathcal{E}_{инд_1} = -f \dfrac{\partial \Phi_{21}}{\partial t}$

$\Phi_{12} \sim I_1$

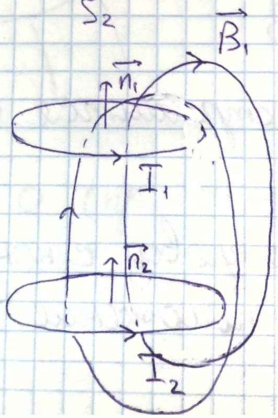
$\Phi_{12} = f M_{12} I_1$ $\quad$ M_{12} – коэффициент взаимоиндукции

$\Phi_{21} = f M_{21} I_2$

$[M] = [L] = \begin{cases} Гн \\ см \end{cases}$

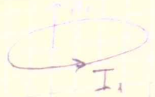
$\Phi_{12} = \iint\limits_{S_2} (\vec{B}_1, d\vec{S}_2) \gtrless 0$ $\quad$ $d\vec{S}_2 = dS \cdot \vec{n}_2$

$M \gtrless 0$

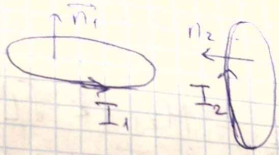


$M_{12} > 0$

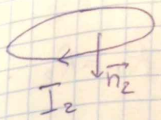
$M_{21} > 0$



$M_{12} < 0$



$M_{12} = M_{21} = 0$



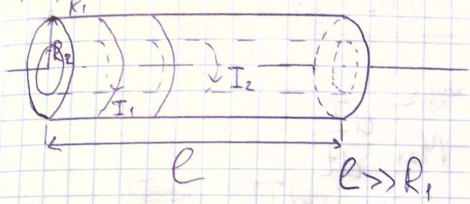
$M_{21} < 0$

1. $M \gtrless 0$ величина алгебраическая
2. $M_{12} = M_{21} = M$

теорема взаимности

3. $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$

R_1, N_1, R_1 $\quad n_1 = \frac{N_1}{l}$



$R_2 < R_1$

$N_2 \to n_2 = \frac{N_2}{l}$

$\beta = \frac{\mu_0}{4\pi} (SI)$

1) $B_1 = \beta 4\pi n_1 I_1$

$|\Phi_{12}| = B_1 \cdot S_2 \cdot N_2 =$

$= \underbrace{\beta \cdot 4\pi \frac{N_1 N_2}{l} S_2}_{= f|M_{12}|} I_1$

$|\Phi_{12}| = f|M_{12}| I_1$

$|M_{12}| = \frac{\beta}{f} \cdot 4\pi \frac{N_1 N_2}{l} \cdot S_2 =$

$= \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \cdot S_2$

2) $B_2 = \beta \cdot 4\pi n_2 I_2$

$|\Phi_{21}| = B_2 \cdot S_2 N_1 = \beta \cdot 4\pi \frac{N_1 N_2}{l} S_2 I_2 = f|M_{21}| I_2$

вне второго соленоида поле отсутствует

$|M_{21}| = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \cdot S_2$

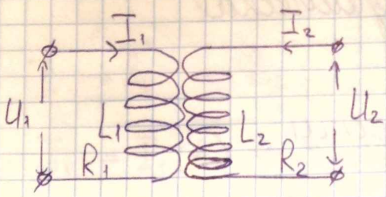
$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{l}, \quad L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 S_2}{l}$$

$$M_{12} = M_{21} < \sqrt{L_1 L_2}$$

равенство будет достигнуто, если $R_1 = R_2$

Св-во трансформатора



$$K_u = \left| \frac{U_1}{U_2} \right| = ?$$

$$I_1 R_1 = U_1 + \mathcal{E}_{1\,инд\,\Sigma} =$$
$$= U_1 + \mathcal{E}_{1\,с\text{-}инд} + \mathcal{E}_{инд\,21} =$$
$$= U_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{21} \frac{dI_2}{dt} \quad (1)$$

$$I_2 R_2 = U_2 \underbrace{- L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{12} \frac{dI_1}{dt}}_{\mathcal{E}_{2\,инд\,\Sigma}}$$

$$\begin{cases} U_1 = I_1 R_1 + L_1 \dfrac{dI_1}{dt} + M_{21} \dfrac{dI_2}{dt} \\ U_2 = I_2 R_2 + L_2 \dfrac{dI_2}{dt} + M_{12} \dfrac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

Пусть 1) $R_1, R_2 \to 0$

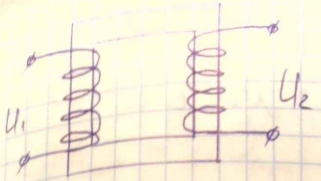
2) $I_2 = 0$ (холостой ход х х)

$$\Rightarrow \quad U_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

$$U_2 = M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

$$K_u = \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{|M_{12}|}{L_1} = \frac{N_2}{N_1} \frac{S_2}{S_1}$$

$$S_2 = S_1 \Rightarrow K_u = \frac{N_2}{N_1}$$



$$K_I = \frac{1}{K_u} = \frac{N_1}{N_2}$$

равенство остается приближ. справедливым, даже если $I_2 \neq 0$

Магнитная энергия

при размыкании ключа лампа вспыхивает

$$I = I(t) \Rightarrow \Phi = \Phi(t)$$

работу совершает сторон. вихрев. электрич. поле

$$\mathcal{E}_{инд} = \oint_{(L)} E_e \, dl \neq 0$$

$$\delta A = dq \, \mathcal{E}_{с\text{-}инд} = I \, dt \cdot \mathcal{E}_{с\text{-}инд} =$$

$$\mathcal{E}_{с\text{-}инд} = -f \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -f \frac{\partial (fLI)}{\partial t} =$$

$$= -f^2 L \frac{dI}{dt}$$

$$= -f^2 L I \cdot dI$$

$$\delta A = -dW_M \qquad dW_M = f^2 L I \cdot dI$$

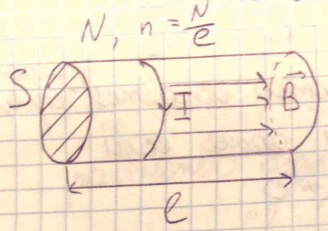
$$W_M = f^2 \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

$$W_M = \begin{cases} \dfrac{LI^2}{2}, & SI \\ \dfrac{LI^2}{2c^2}, & CGSM \end{cases}$$

справедливо для одиночного контура !!!

где локализована энергия? (в поле)

Локализация магнитной энергии



$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$W_M = \frac{L I^2}{2}$$

$$I = \frac{Bl}{\mu_0 N}, \quad L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$$

$$W_M = \frac{\mu_0 N^2 S B^2 l^2}{2 l \mu_0^2 N^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} Sl$$

V (объем)

$$w_M = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (SI)$$ – плотность магнитной энергии

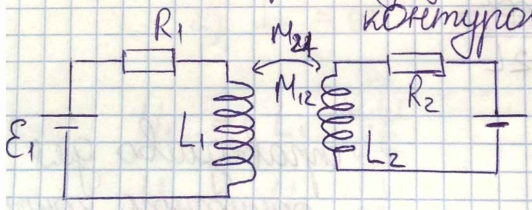
$$w_M = \frac{B^2}{8\pi} \quad (CGSM)$$

$$W_M = \iiint_{(V)} w_M \, dV$$

$$w = w_M + w_{эл} = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (SI)$$

$$\frac{B^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi} \quad (CGSM)$$

Энергия двух индуктивно связанных контуров



$$W_M = ?$$

$$W_M \overset{?}{=} \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2}$$

$$I_1 R_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{1\,инд\,\Sigma} = \mathcal{E}_1 \underbrace{- L_1 \frac{dI_1}{dt}}_{\mathcal{E}_{с\text{-}инд}} \underbrace{- M_{21} \frac{dI_2}{dt}}_{\mathcal{E}_{взаим.}} \Big| \cdot I_1 dt$$

+

$$I_2 R_2 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{2\,инд\,\Sigma} = \mathcal{E}_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{12} \frac{dI_1}{dt} \Big| \cdot I_2 dt$$

$$(I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2)\,dt = \overbrace{(I_1\mathcal{E}_1 + I_2\mathcal{E}_2)\,dt}^{đA_{ист}} - L_1 I_1\,dI_1 - L_2 I_2\,dI_2 - M_{21}\,dI_2 I_1 - M_{12}\,dI_1 I_2$$

$$đA_{ист} = đQ_{вт} + \underbrace{L_1 I_1\,dI_1 + L_2 I_2\,dI_2 + M_{21}\,dI_2 I_1 + M_{12}\,dI_1 I_2}_{dW_M}$$

$$đA_{ист} = đQ_{вт} + dW_M$$

$$dW_M = \underbrace{(L_1 I_1 + M_{12} I_2)}_{\frac{\partial W_M}{\partial I_1}}\,dI_1 + \underbrace{(L_2 I_2 + M_{21} I_1)}_{\frac{\partial W_M}{\partial I_2}}\,dI_2$$

$$\frac{\partial^2 W_M}{\partial I_1 \partial I_2} = \frac{\partial^2 W_M}{\partial I_2 \partial I_1}$$

$$\frac{\partial W_M}{\partial I_1} = L_1 I_1 + M_{12} I_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 W_M}{\partial I_1 \partial I_2} = M_{12}$$

$$\frac{\partial W_M}{\partial I_2} = L_2 I_2 + M_{21} I_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 W_M}{\partial I_2 \partial I_1} = M_{21}$$

$M_{12} = M_{21} \equiv M$ – док-во теоремы взаимности

$$dW_M = (L_1 I_1\,dI_1 + L_2 I_2\,dI_2 + \underbrace{M(I_1\,dI_2 + I_2\,dI_1)}_{dI_1 I_2})$$

$$\boxed{W_M = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2}$$

$M I_1 I_2$ – энергия взаимодействия

Обобщение электродинамики на случай быстропеременных (неквазистатич.) полей

Обобщение электродинамики на случай быстропеременн. (неквазистат.) полей

① $\oint\limits_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$ (нет магнитных зарядов)

② $\oint (\vec{E}, d\vec{S}) = k \cdot 4\pi q_{охват} = k \cdot 4\pi \iiint\limits_{(V)} \rho \, dV$

$\vec{E}_{т.з}(\vec{r}) = k \frac{q}{r^3} \vec{r}$ $\quad \vec{F}_{кул} \sim \frac{1}{r^3} \vec{r}$

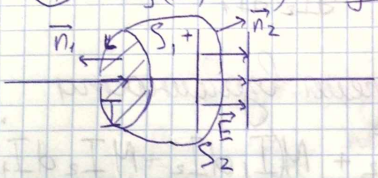
не справедливо для быстропеременн. полей: сила не успевает изменяться

③ $\oint\limits_{L} (\vec{E}_{инд}, d\vec{l}) = -f \iint\limits_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$

$\vec{E} = \vec{E}_{инд} + \vec{E}_{кул}$ $\quad \oint\limits_{(L)} \vec{E}_{кул} d\vec{l} = 0$

$\dot{\vec{B}} \to \vec{E}$

④ $\oint (\vec{B}, d\vec{l}) = \cancel{\beta \cdot 4\pi I_{охват} = \beta \cdot 4\pi \iint\limits_{(S)} \vec{j} \, d\vec{S}}$



$j_{n_2} = 0$

$j_{n_1} \neq 0$

S_1 – натянутая пленка

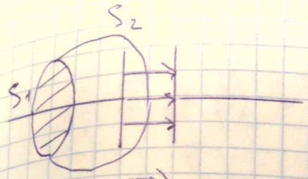
S_2 – шапка (незамкнут. пов-ть)

④ $\oint\limits_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \beta \cdot 4\pi \iint\limits_{S} \vec{j}_\Sigma dS = \beta \cdot 4\pi \iint\limits_{S} \left(\vec{j} + \frac{1}{k 4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) d\vec{S}$

$\dot{\vec{E}} \to \vec{B}$

С-ма ур-ний Максвелла в вакууме

Ток смещения



$$\oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = k \cdot 4\pi q$$

$$S = S_1 + S_2$$

$$\oint_{(S)} \dot{\vec{E}} d\vec{S} = k \cdot 4\pi \dot{q}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\oint \vec{j} d\vec{S}$$ (з-н сохранения электрич. заряда)

$$\oint_{(S)} \dot{\vec{E}} d\vec{S} = -k\, 4\pi \oint_{(S)} \vec{j} d\vec{S}$$

$$\oint_{(S)} \left(\dot{\vec{E}} + k \cdot 4\pi \vec{j}\right) d\vec{S} = 0$$

$$\oint_{(S)} \left(\vec{j} + \frac{1}{k\, 4\pi} \dot{\vec{E}}\right) d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\vec{j}_{см} = \frac{1}{k\, 4\pi} \dot{\vec{E}}}$$ (плотность тока смещения в вакууме)

$$k = \begin{cases} 1, & CGSE \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, & SI \end{cases}$$

$$\vec{j}_{\Sigma} = \vec{j} + \vec{j}_{см}$$ (линии полного тока всегда замкнуты)

между обкладками конденсатора есть ток смещения

$$\beta = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi}, & SI \\ \frac{1}{c}, & CGSE \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} 1, & SI \\ \frac{1}{c}, & CGSE \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, & SI \\ 1, & CGSE \end{cases}$$

$$\oiint (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$$

$$\oiint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \rho \, dV, & SI \\ 4\pi \iiint_{(V)} \rho \, dV, & CGSE \end{cases}$$

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = \begin{cases} -\iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, & SI \\ -\frac{1}{c} \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}, & CGSE \end{cases}$$

$$\oint (\vec{B}, d\vec{l}) = \begin{cases} \mu_0 \iint_S \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) d\vec{S}, & SI \\ \frac{4\pi}{c} \iint_S \left(\vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) d\vec{S}, & CGSE \end{cases}$$

$$\mu_0 \cdot \varepsilon_0 = \frac{1}{c}$$

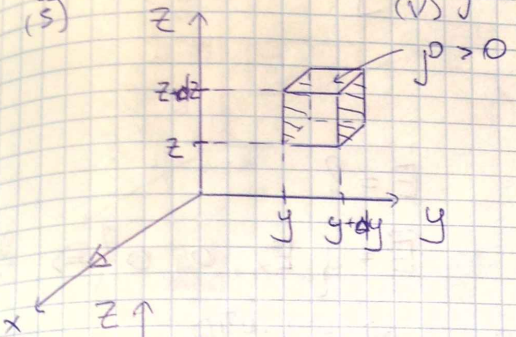
Электромагнитное поле состоит из $\vec{E}$ и $\vec{B}$

$$\begin{array}{ccc} \vec{E} & \rightleftarrows & \vec{B} \\ \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow \\ \rho & & \vec{j} \end{array}$$

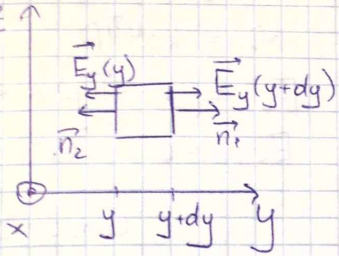
источники электромагнитного поля (заряды и токи)

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\oiint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = k \cdot 4\pi \iiint_{(V)} \rho \, dV$$



$$dV = dx\,dy\,dz$$



$$\Phi_{E_y} = E_y(y+dy)\,dx\,dz - E_y(y)\,dx\,dz = \frac{\partial E_y}{\partial y}\,dy\,dx\,dz$$

$$\Phi_{E_z} = \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}} \frac{\partial E_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

$$\Phi_{E_z} = E_z(z+dz)\,dx\,dy - E_z(z)\,dx\,dy = \frac{\partial E_z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

$$\Phi_{E_x} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$$

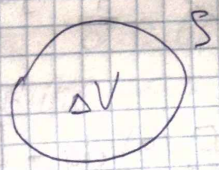
$$\Phi = \Phi_{E_x} + \Phi_{E_y} + \Phi_{E_z} = \underbrace{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)}_{\operatorname{div}\vec{E}} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$

дивергенция

$$= k \cdot 4\pi \rho \, dV$$

1) $\operatorname{div}\vec{E} = k \cdot 4\pi\rho$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$



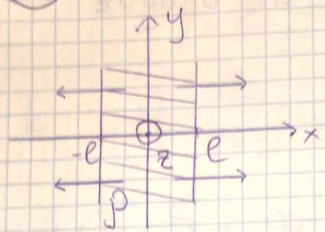
$$\Delta V \to 0 \Rightarrow \iiint_{(V)} \rho \, dV = \rho \cdot \Delta V$$

① Дано E

Найти источники поля (ρ)

$$\rho = \frac{1}{k\cdot 4\pi}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

②



$E = ?$

$\vec{E} = \{E_x, 0, 0\} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = k\cdot 4\pi\rho$

$E_x = k\cdot 4\pi\rho x + Const$

$E_x(x=0) = 0$

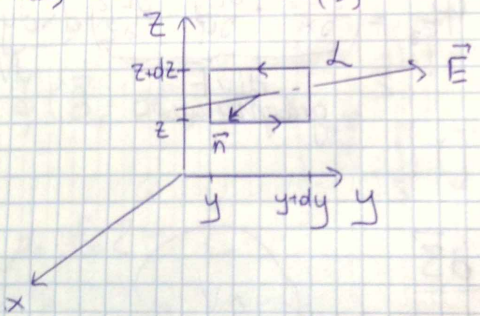
$\Downarrow$

$Const = 0$

$E_x = k\cdot 4\pi\rho x$

2) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

$$\oint_{(\alpha)} (\vec{E}, d\vec{l}) = -f \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$



В пл-ти zOy

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial B_x}{\partial t} dS$

$B_n = B_x$

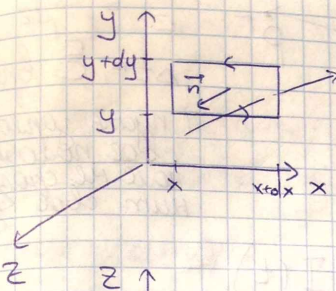
$$E_y(z)\,dy + E_z(y+dy)\,dz - E_y(z+dz)\,dy - E_z(y)\,dz =$$

$$= (E_z(y+dy) - E_z(y))\,dz + (E_y(z) - E_y(z+dz))\,dy =$$

$$= \frac{\partial E_z}{\partial y} dy\,dz - \frac{\partial E_y}{\partial z} dz\,dy = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) dz\,dy =$$

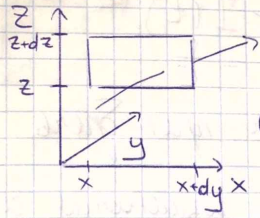
$= -f\dot{B}_x\,dydz$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -f\cdot\dot{B}_x \,|\cdot\vec{i}\ (1)$$



$\vec{E}$ $\quad B_n = B_z \quad \vec{E} = \{E_x, E_y\}$

$$(2)\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -f\cdot\dot{B}_z \,|\cdot\vec{k}$$



$\vec{E}$ $\quad B_n = -B_y \quad \vec{E} = \{E_x, E_z\}$

$$(3)\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -f\cdot\dot{B}_y \,|\cdot\vec{j}$$

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

ротор

3) $\text{rot}\vec{E} = -f\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \equiv -f\dot{\vec{B}}$

4) $\text{rot}\vec{B} = \beta\cdot 4\pi\left(\vec{j} + \vec{j}_{см}\right), \quad \vec{j}_{см} = \dfrac{1}{4k\pi}\dot{\vec{E}}$

$$\text{rot}\vec{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint(\vec{A}, d\vec{l})}{\Delta S}$$

интегральные ур-ния несут больше информации, чем дифференциальные

$E_\tau = 0$

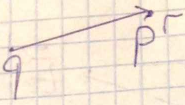
$\oint_L(\vec{E}, d\vec{l}) = 0$ (стат.)

Квазистационарный ток

(отказываемся от постоянного тока, но почти постоянный)

$\vec{E} \not\parallel \vec{B}$

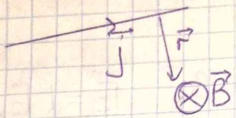
$\vec{\rho}$, $\vec{j}$



$E = \frac{kq}{r^2}$

$\Delta t = \frac{r}{c}$ время запаздывания

(пусть заряд изменил своё положение, но поле не сразу же изменит своё значение)

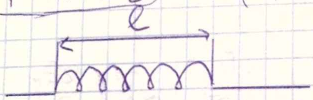


$B \sim I(t)$

$\Delta t = \frac{r}{c}$

этим временем хотим пренебречь

$T \gg \Delta t$ (T - период изменения силы тока)



$r \sim l$, $\lambda = cT$ | $l \ll \lambda$

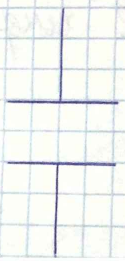
запаздыванием можно пренебречь, если выполнено усл., стоящие выше.

Это значит $I_1(t) = I_2(t)$

Справедливо в электротехнике

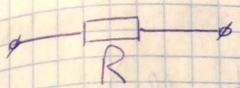
Несправедливо в оптике и для см-длин волн.

Рассматриваем процессы, происход. в электротехнике



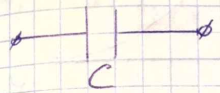
Понятие идеальных элементов

① Резистор



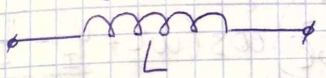
$\cancel{C}$, $\cancel{L}$ резистор идеальной, если у него есть только омические св-ва

② Конденсатор



$\cancel{R}$, $\cancel{L}$

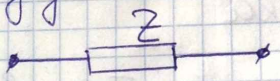
③ Катушка



$\cancel{R}$, $\cancel{C}$

Понятие двухполюсника

Любой из этих элементов, который подключен к двум клеммам источника



$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I)$

$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U)$

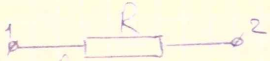
т.к. элементы линейные, то частота остается одной и той же

$R = \frac{U_0}{I_0}$ делит амплитудные значения

$$\boxed{\text{импеданс } Z = \frac{U_0}{I_0}}$$

– характеризует св-ва двухполюсника в цепи

1



запаздывания нет, тогда справедлив з-н Ома в каждый момент времени

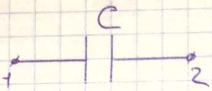
$$U(t) = R\,I(t)$$

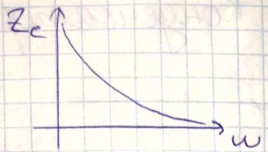
$$U_0 \cos(\omega t + \varphi_U) = R\,I_0 \cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$U_0 = R\,I_0 \qquad \underline{\varphi_U = \varphi_I}$$

$$Z_R = \frac{U_0}{I_0} = R$$

2





$$q(t) = \int I(t)\,dt \qquad C = \frac{q}{U} \rightarrow U(t) = \frac{q(t)}{C}$$

$$U(t) = \frac{1}{C}\int I(t)\,dt = \frac{I_0}{C}\int \cos(\omega t + \varphi_I)\,dt =$$

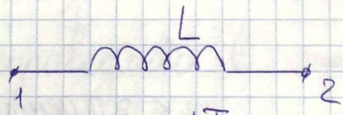
$$= \frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi_I) = \frac{I_0}{\omega C}\cos\left(\omega t + \underline{\varphi_I - \frac{\pi}{2}}\right)$$

$$U_0 = \frac{I_0}{\omega C} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi_U = \varphi_I - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_U - \varphi_I = -\frac{\pi}{2}$$

напряжение на $\frac{\pi}{2}$ отстает от тока

3



нельзя пренебречь $\mathcal{E}_{c\text{-}инд}$

$$\mathcal{E}_{c\text{-}инд} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$I\underbrace{R}_{\to 0} = U + \mathcal{E}_{c\text{-}инд} = U - L\frac{dI}{dt}$$

(з-н Ома для неодн. участка цепи)

$$U = L\frac{dI}{dt}$$

$$U_0 \cos(\omega t + \varphi_U) = L\frac{I\,d(\cos(\omega t + \varphi_I))}{dt} = -I\omega L \sin(\omega t + \varphi_I) =$$

$$= \underline{I_0\,\omega L}\cos\left(\omega t + \varphi_I + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi_U = \varphi_I + \frac{\pi}{2}$ напряжение на катушке на $\frac{\pi}{2}$ опережает значение тока

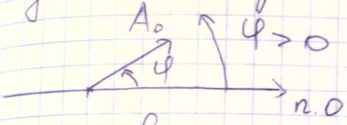
импеданс - аналог сопротивления для переменного тока

ток постоянный, если $\omega = 0$

① Метод векторных диаграмм (МВД)

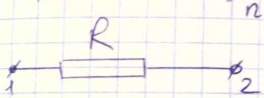
$S(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$

длина вектора пропорцион. амплитуде A_0



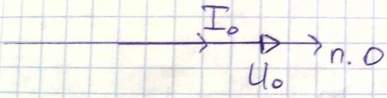
(иллюстрат. метод)

а)

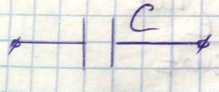


$\varphi_I = 0$

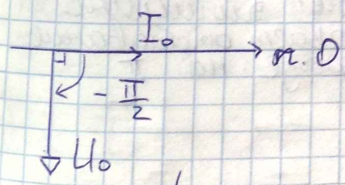
векторная диаграмма для резистора



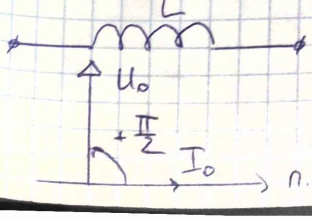
б)



$\varphi_I = 0$



в)



$\varphi_I = 0$

② Метод комплексных амплитуд (МКА)

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ – ф-ла Эйлера

$S(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$\downarrow$

$\hat{S}(t) = A_0[\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)] = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} =$

$= A_0 e^{i\varphi} \underline{e^{i\omega t}} = \hat{A} e^{i\omega t}$

$\hat{A} = A_0 e^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда

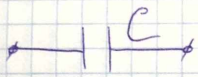
$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) \rightarrow \hat{I}(t) = \hat{I}_0 e^{i\omega t} = I_0 e^{i\varphi_I} e^{i\omega t}$

$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U) \longrightarrow \hat{U}(t) = \hat{U}_0 e^{i\omega t} = U_0 e^{i\varphi_U} e^{i\omega t}$

$\hat{Z} = \dfrac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0}$

а) 

$\hat{U} = R\hat{I} \rightarrow \hat{Z}_R = \dfrac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = R$

б) 

$\hat{U} = \dfrac{1}{C}\hat{q} = \dfrac{1}{C}\int \hat{I}\,dt = \dfrac{\hat{I}_0}{C}\dfrac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

$\hat{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C} = -\dfrac{i}{\omega C}$ комплексный импеданс показывает отставание по фазе на $\frac{\pi}{2}$

в) 

$\hat{I}\underbrace{R}_{=0} = \hat{U} - L\dfrac{d\hat{I}}{dt}$

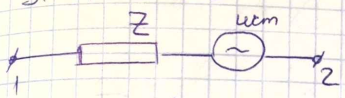
$\hat{U} = L\dfrac{d\hat{I}}{dt} = L\hat{I}_0(i\omega)e^{i\omega t}$

$\hat{\mathcal{E}}_L = i\omega L$ показывает опережение по фазе на $\frac{\pi}{2}$

Элемент	Обознач.	Z	Векторн. диагр.	$\hat{Z}$
Резистор	R	R	I_0, U_0, n.o	R
Конденсатор	C	$\frac{1}{\omega C}$	I_0, n.o, U_0	$-\frac{i}{\omega C}$
Катушка	L	ωL	U_0, I_0, n.o	$i\omega L$

Расчет цепей переменного тока

① З.-н Ома



1. $\mathcal{E}_{с.инд}$ в источнике не учитываем
2. пренебрегаем запаздыв.

$$\hat{I}\hat{Z} = \hat{\mathcal{E}} + \hat{U}_{12}$$

запись в комплексных перемен. будет учитывать нач. фазу.

$$\hat{S}_1(t) = \hat{A}_1 e^{i\omega t} = A_{10} e^{i\varphi_1} e^{i\omega t}$$

$$\hat{S}_2(t) = \hat{A}_2 e^{i\omega t} = A_{20} e^{i\varphi_2} e^{i\omega t}$$

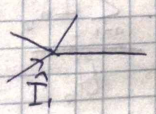
$$\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2 = \left(A_{10} e^{i\varphi_1} + A_{20} e^{i\varphi_2}\right) e^{i\omega t} =$$

$$= \underbrace{\left(\hat{A}_1 + \hat{A}_2\right)}_{\hat{A}} e^{i\omega t}$$

только в комплекс. можно записывать

$\hat{I}\hat{Z} = \hat{\mathcal{E}} + \hat{U}_{12}$ (с учетом фазы)

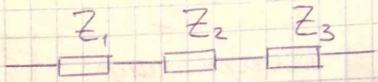
1) $\sum_{k=1}^{n} \hat{I}_k = 0$



2) $\sum_k \hat{I}_k \hat{Z}_k = \sum_n \hat{\mathcal{E}}_n$ (справедливо для замкнут. контуров пишем столько раз, сколько есть контур. охват. разное пространство).

Составные двухполюсники

1



$Z_{общ} \neq Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_N$ (это равенство не учитывает фазовые соотношения)

$Z_R = R$

$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$

$\hat{Z}_L = i\omega L$

$\hat{I}_1(t) = \hat{I}_2(t) = \hat{I}_3(t) = \ldots = \hat{I}_N(t) \equiv \hat{I}(t)$

$\hat{U}(t) = \hat{Z}_{общ}\hat{I}(t)$

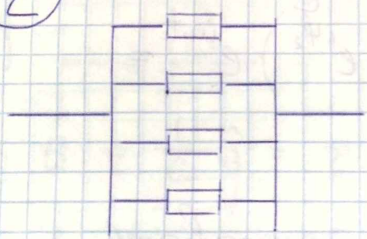
$\hat{U}_{общ} = \sum_{n=1}^{N} \hat{U}_n$

$\hat{Z}_{общ} = \frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = \frac{\hat{Z}_1\hat{I}_0 + \hat{Z}_2\hat{I}_0 + \ldots + \hat{Z}_N\hat{I}_0}{\hat{I}_0}$

$\hat{Z}_{общ} = \sum_{n=1}^{N} \hat{Z}_1$

$\hat{Z}_{общ} = Z e^{i\varphi}$

2



$\frac{1}{\hat{Z}_{общ}} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\hat{Z}_N}$

$\hat{U}_1(t) = \hat{U}_2(t) = \ldots = \hat{U}_N(t) = \hat{U}(t)$

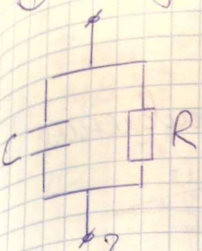
$\hat{I}_{общ}(t) = \hat{I}_1(t) + \hat{I}_2(t) + \ldots + \hat{I}_N(t)$

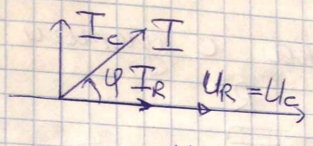
$\frac{1}{\hat{Z}_{общ}} = \frac{\hat{I}_{общ0}}{\hat{U}_0} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \hat{I}_{n0}}{\hat{U}_0} = \frac{1}{\hat{Z}_1} + \frac{1}{\hat{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\hat{Z}_N}$

Примеры

① Конденсатор с утечкой

1) МВД





$Z = ?$

$Z_R = R$

$Z_c = \frac{1}{\omega C}$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U}{\sqrt{I_R^2 + I_c^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{U^2}{R^2} + \frac{U^2}{Z_c^2}}}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z_c^2 + R^2}{Z_c^2 R^2}}} = \cancel{\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^2}}} =$$

$$= \frac{R}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{I_c}{I_R} = \frac{\frac{U}{Z_c}}{\frac{U}{Z_R}} = \frac{R}{Z_c} = \omega R C$$

2) МКА

$$\hat{I} = \hat{I}_R + \hat{I}_c = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_R} + \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_c} = \hat{U}\left(\frac{1}{R} + i\omega C\right)$$

$$\hat{Z}_c = \frac{1}{i\omega C}$$

$$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + i\omega C} = \frac{R}{1 + i\omega R C}$$

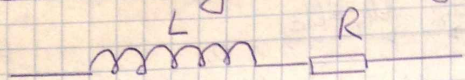
$$|\hat{Z}| = Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega R C)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im}\hat{Z}}{\operatorname{Re}\hat{Z}}$$

3) $\frac{1}{\hat{Z}_{общ}} = \frac{1}{\hat{Z}_R} + \frac{1}{\hat{Z}_C} = \frac{1}{R} + i\omega C =$

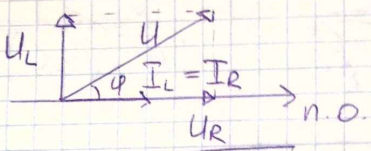
$= \frac{1 + i\omega RC}{R}$

2 Катушка с учетом сопротивления



$Z_{общ.} = ?$

1) МВД



$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = \sqrt{I^2R^2 + I^2(\omega L)^2}$

$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

$tg\,\varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega L}{R}$

2) МКА

$\hat{U} = \hat{U}_R + \hat{U}_L = \hat{I}R + \hat{I}(i\omega L)$

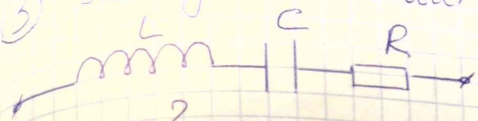
$\hat{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = R + (i\omega L)$

$Z = |\hat{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

$tg\,\varphi = \frac{Im\,\hat{Z}}{Re\,\hat{Z}} = \frac{\omega L}{R}$

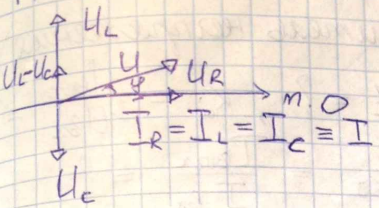
3) $\hat{Z} = \hat{Z}_R + \hat{Z}_L = R + i\omega L$

3) Последовательный контур



$Z_{общ} = ?$

1) МВД



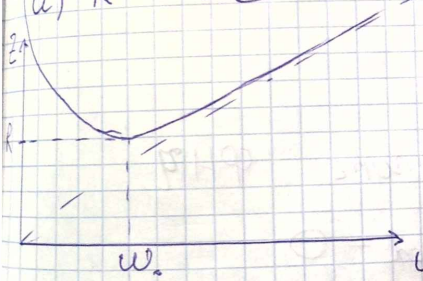
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{(IR)^2 + I^2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

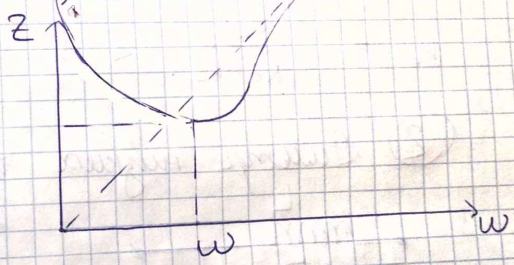
$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

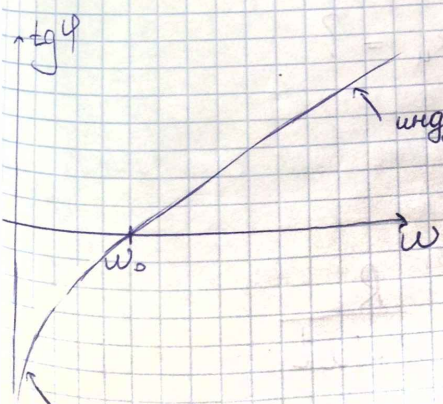
$$Z_{min} = R \quad \text{при} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

а) $R > \sqrt{\frac{L}{C}}$

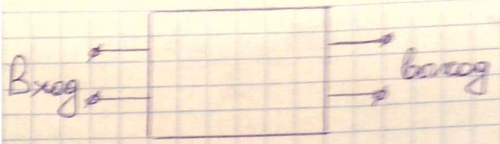


б) $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$

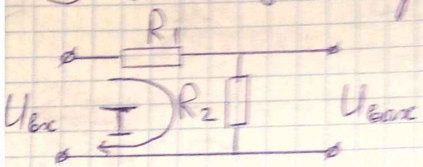




Электроника



① Потенциометр (делитель напряжения)



$Z = ?$, $k_u = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = ?$

$k_I = \frac{I_{вых}}{I_{вх}} = ?$

$k_u = ?$

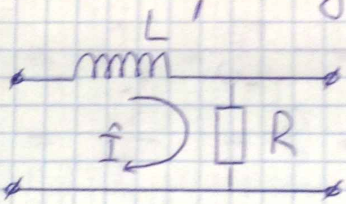
выход разомкнут $I_{вых} = 0$

$U_{вх} = I(R_1 + R_2)$

$U_{вых} = I \cdot R_2$

$k_u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$

② Фильтр низких частот ФН



$\hat{I}_{вых} = 0$

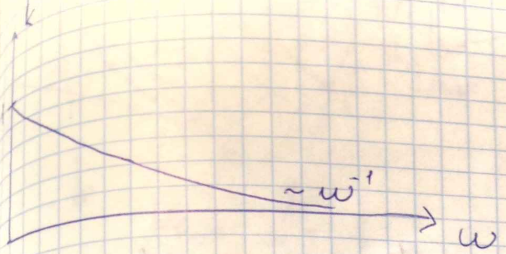
$k_u = ?$

$\hat{U}_{вх} = \hat{I}(\hat{Z}_L + R)$

$\hat{U}_{вых} = \hat{I} \cdot R$

$k_u = \frac{\hat{U}_{вых}}{\hat{U}_{вх}} = \frac{R}{R + \hat{Z}_L} = \frac{R}{R + i\omega L}$

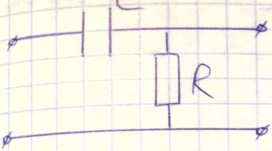
$$k_u \equiv |\hat{k}_u| = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$



$\omega L \gg R$

высокие частоты отсекаются

③ Дифференцир. цепочка для перемен. ~~тока~~ напряжения



$I_{вых} = 0$

$\hat{k}_u = ?$

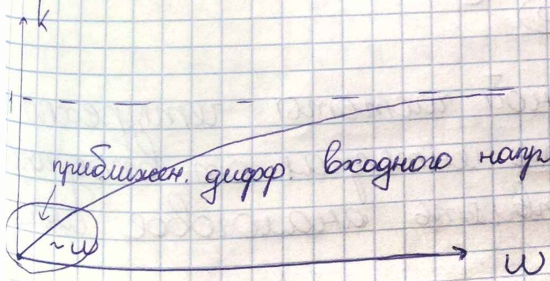
$$\hat{U}_{вх} = \hat{I}(R + \hat{Z}_c)$$

$$\hat{U}_{вых} = \hat{I} R$$

$$\hat{k}_u = \frac{\hat{U}_{вых}}{\hat{U}_{вх}} = \frac{R}{R+\hat{Z}_c} = \frac{R}{R+\frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega CR}{1+i\omega RC}$$

$$k_u \equiv |\hat{k}_u| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

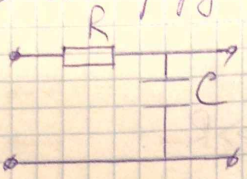
$(\omega RC)^2 \ll 1 \Rightarrow k_u \sim \omega RC$



$$\hat{U}_{вх} = \hat{U}_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{d\hat{U}_{вх}}{dt} = \hat{U}_0 \cdot (i\omega) e^{i\omega t}$$

(4) Интегрирующ. цепочка

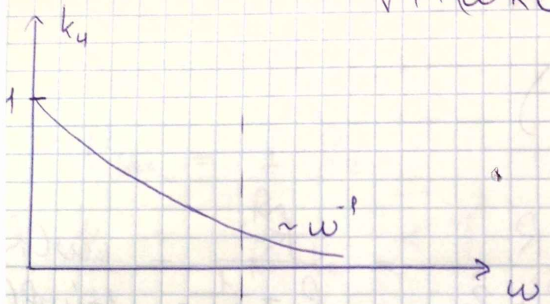


$$\hat{U}_{вх} = \hat{I}(R + \hat{Z}_c)$$

$$\hat{U}_{вых} = \hat{I}\hat{Z}_c$$

$$\hat{k}_u = \frac{\hat{Z}_c}{R + \hat{Z}_c} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 + i\omega CR}$$

$$k_u \equiv |\hat{k}_u| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

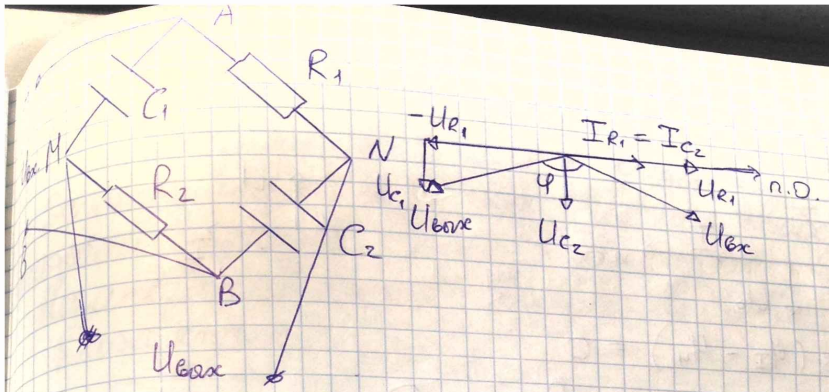


$$(\omega RC)^2 \gg 1$$

$$\hat{U}_{вх} = \hat{U}_0 e^{i\omega t}$$

$$\int \hat{U}_{вх}\, dt = \frac{\hat{U}_0}{i\omega} e^{i\omega t}$$

начиная с определенной частоты четырехполюсник может давать интеграл от входного напряж., т.е. осуществлять аналоговое интегрирование.



Фазовращатель

Работа и мощность в цепи переменного тока

$$dA = U(t)\,dq = U(t)I(t)dt \Rightarrow P(t) = \frac{dA}{dt}$$

$$dq = I(t)\,dt$$

$$P(t) = U(t)I(t)$$

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$P(t) = I_0 U_0 \cos(\omega t + \varphi_U)\cos(\omega t + \varphi_I)$$

$$\langle P(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T I_0 U_0 \cos(\omega t + \varphi_U)\cos(\omega t + \varphi_I)\,dt$$

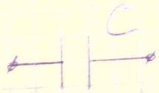
$$P(t) = \frac{1}{2} I_0 U_0 \left[\cos(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I) + \cos(\varphi_I - \varphi_U)\right]$$

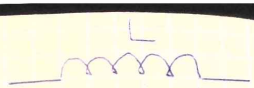
$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos(\varphi_I - \varphi_U)$$

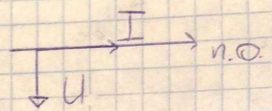
1

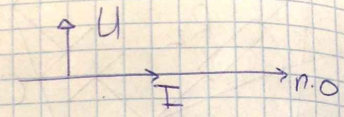
$$\langle P_R \rangle = \frac{1}{2} I_0 U_0 \qquad U_{эф} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad I_{эф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$\langle P_R \rangle = U_{эф} I_{эф} = I_{эф}^2 R = \frac{U_{эф}^2}{R}$$ активная нагрузка

(2) 

(3) 





$\cos(\varphi_I - \varphi_u) = 0$

$\langle P_C \rangle = \langle P_L \rangle = 0$

реактивные нагрузки

$\langle P \rangle \leq \langle P_R \rangle$

$|\cos(\varphi_I - \varphi_u)| \leq 1$

мощность падает при передачи от источника к потребителю

$\cos(\varphi_I - \varphi_u) < 0 \Rightarrow \langle P \rangle < 0$?

физически это значит, энергия закачивается в провод - это невозможно (если только там ещ источники, тогда это возможно).

$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \to \hat{U}(t) = U_0 [\cos(\omega t + \varphi_u) + i \sin(\omega$
$= U_0 e^{i\varphi_u} e^{i\omega t} = \hat{U}_0 e^{i\omega t}$

$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) \to \hat{I}(t_0) = \hat{I}_0 e^{i\omega t}$

$\langle P \rangle = \frac{1}{4}(\hat{I}_0 \hat{U}_0^* + \hat{I}_0^* \hat{U}_0)$

$\hat{I}_0^* = I_0 e^{-i\varphi_I}$ комплексно сопряженные

$\hat{U}_0^* = U_0 e^{-i\varphi_u}$

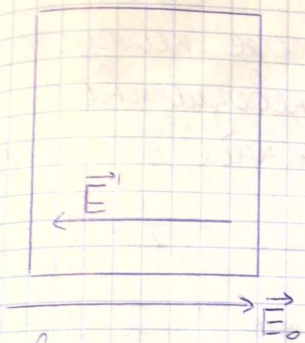
Электромагнитное поле и процессы в веществе

Электрические поля в веществе

Диэлектрики - это в-ва, где нет свободных носителей заряда.

Носители останутся связан. в в-ве.

Диэлектрик



$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

$|\vec{E}| < |\vec{E}_0|$

$q_{своб} = const$

заряд на обкладке конденсатора

$C = \frac{q}{\Delta\varphi}$

$\vec{E}'$ - собствен. поле.

$(\Delta\varphi)_{пуст} = \frac{q_{своб}}{C_0}$

$(\Delta\varphi)_{запол} = \frac{q_{своб}}{C}$

$\Rightarrow C > C_0$, т.к. $(\Delta\varphi_{пуст}) > (\Delta\varphi)_{запол}$

$\boxed{\varepsilon = \frac{C}{C_0}}$ диэлектрическая проницаемость

$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{C_0}$ - относит. диэл. проницаемость (SI)

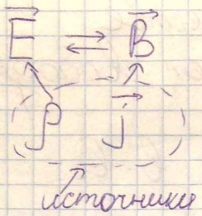
$\tilde{\varepsilon} = 1{,}006$ - воздух

5 - 7 - стекло

81 - вода

в статике ~~для постоянного~~

Макроскопическая (усредненное) поле в веществе



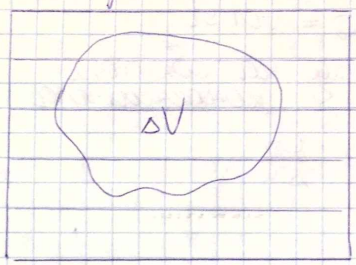
на микроуровне в веществе есть поля, т.к. заряды в в-ве постоянно движутся

$\rho(t)$

$\rho(t, \vec{r})$

описать поле каждого атома и молекулы задача почти невозможная

Макрополе - это усредненное от микрополя



$$\vec{E}_{макро} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{(\Delta V)} \vec{E}_{микро}\, dV$$

$$\vec{B}_{макро} = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{(\Delta V)} \vec{B}_{микро}\, dV$$

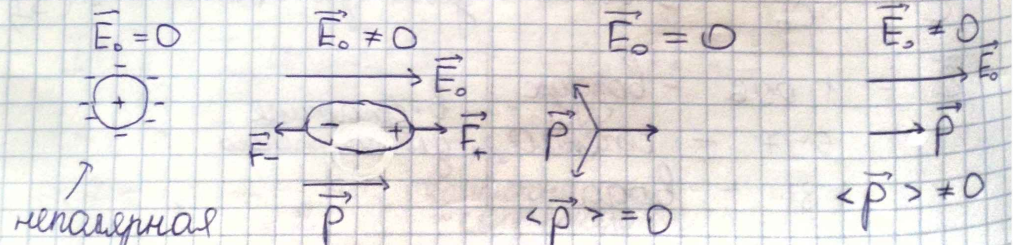
определение

будем говорить только об усредненных полях

ΔV - физически бесконечно малый объем

Вектор поляризации

Поляризация - это процесс



неполярная молекула

поляризация неполярной молекулы

полярная молекула

поляризация полярной молекулы

ΔV

$\Delta\vec{p}$ - суммарный дипольный момент физич. беск. малого ΔV

$$\Delta\vec{p} \sim \Delta V$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{P}\Delta V$$

$\vec{P}$ - вектор поляризации

$$\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V} = \frac{\Delta N\vec{p}}{\Delta V} = n\vec{p}$$

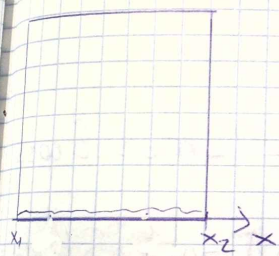
$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} n_i \vec{p}_i$$

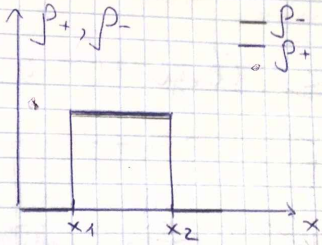
n_i - концентрация молекул с одинаковыми дипол. моментами

Связанные (поляризационные) заряды

Однородный диэлектр.

$$\vec{E}_0 = 0$$

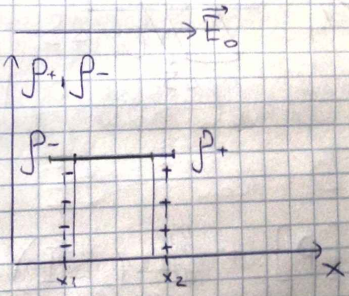




$$\vec{E}_0 \neq 0$$

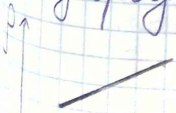
$$\rho_{связ} = 0$$

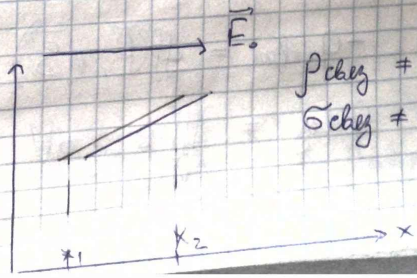
$$\sigma_{связ} \neq 0$$



Неоднородн. диэлектр.

$$\vec{E}_0 = 0$$



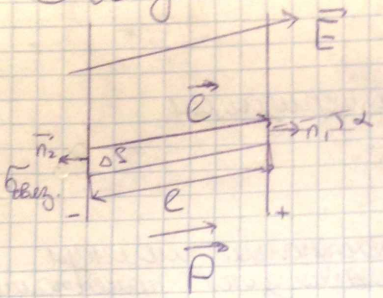


$$\rho_{связ} \neq 0$$

$$\sigma_{связ} \neq 0$$

Связь между вектором поляризации и пов-ной плотн.

① Связь $\vec{P}$ и $\sigma_{связ}$



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}\cdot\Delta N$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{P}\cdot\Delta V = \vec{P}\Delta S\, l\cos\alpha$$

$$\Delta V = \Delta S\cdot l\cos\alpha$$

$$\Delta\vec{p} = \Delta q\,\vec{l} = \sigma_{связ}\Delta S\,\vec{l}$$

$$\vec{P}\cdot\cancel{\Delta S}\cdot l\cos\alpha = \sigma_{связ}\cancel{\Delta S}\,\vec{l}$$

$$P_{n_1} > 0 \leftrightarrow \sigma_{связ} > 0$$

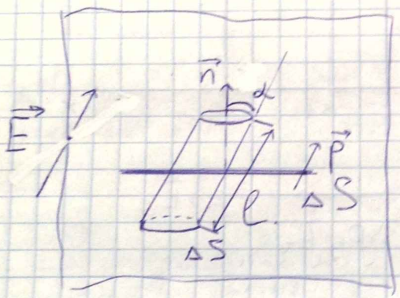
$$P_{n_2} < 0 \leftrightarrow \sigma_{связ} < 0$$

$$P\cdot l\cos\alpha = \sigma_{связ}\, l$$

$$(\vec{P},\vec{n}) = \sigma_{связ}$$

$$\boxed{P_n = \sigma_{связ}}$$

② Связь $\vec{P}$ и $\rho_{связ}$



$$\Delta N = n\cdot\Delta V = n\cdot\Delta S\cdot l\cos\alpha$$

$$\vec{p} = q_0\vec{l}$$

$$-\Delta q_{связ} = q_0\cdot\Delta N = q_0 n\Delta S\, l\cos\alpha =$$

$$= P n\cdot\Delta S\cdot\cos\alpha =$$

$$= P\Delta S\cdot\cos\alpha = P_n\cdot\Delta S$$

$$\boxed{\oint_S P_n\, dS = -q_{связ}}$$

$$[P] = \frac{Кл}{м^2}\ (SI)$$

$$-q_{охват} = \oiint(\vec{P}, d\vec{S}) \longrightarrow \operatorname{div}\vec{P} = -\rho_{связ}$$

$$q_{связ} = \iiint_{(V)}\rho_{связ}\, dV$$

Основные уравнения электрического поля в диэлектриках

① $\oint(\vec{E}, d\vec{l}) = -\int \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{B}\, d\vec{S}$ – для микрополей

в вакууме

$\oint \ldots d\vec{l} \leftrightarrow \iiint \ldots d(\Delta V)$

физически бесконечно малый

з-н электромагнитной индукции универсален (справедлив в диэлектр.)

$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

② $\oint_{(S)}(\vec{E}, d\vec{S}) = k \cdot 4\pi q_{охват.} = k \cdot 4\pi \iiint_V \rho_{охват}\, dV$

$\oint_{(S)}(\vec{E}, d\vec{S}) = k \cdot 4\pi (q_{своб.} + q_{связан.}) =$

$= k \cdot 4\pi \left(q_{своб.} - \oint_{(S)} \vec{P}\, d\vec{S}\right)$

$\oint_{(S)}(\vec{E} + k \cdot 4\pi \vec{P})\, d\vec{S} = k \cdot 4\pi q_{своб.}$

CGSE: $k = 1$

$\vec{E} + k \cdot 4\pi \vec{P} = \underline{\vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{D}}$ (самостоят. физическ. смысла у $\vec{D}$ нет)

SI: $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$\oint(\vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P})\, d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{своб.} \quad | \cdot \varepsilon_0$

$\underline{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$

$[D] = [P] \overset{SI}{=} \frac{Кл}{м^2}$

$\oint \vec{D}\, d\vec{S} = \begin{cases} 4\pi q_{своб.}, & CGSE \\ q_{своб.}, & SI \end{cases}$ $\quad q_{своб} = \iiint_{(V)} \rho_{своб}\, dV$

в дифф. форме

① $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -f\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

② $\mathrm{div}\,\vec{D} = \begin{cases} 4\pi\rho_{своб}, & CGSE \\ \rho_{своб}, & SI \end{cases}$

Материальное ур-ние - уравнение, описывающ. связь $\vec{P}$ и $\vec{E}$

Линейные изотропные диэлектрики

① Линейность - поля $\vec{E}$ и $\vec{P}$ связан. линейно

$\vec{E} \sim \vec{P}$ - линейность

② Изотропия - св-ва в-ва одинаковы во всех направл.

$\vec{P} \parallel \vec{E} \parallel \vec{D}$ - изотропия

$SI: \quad \vec{P} = \alpha\varepsilon_0\vec{E}, \quad CGSE: \vec{P} = \alpha\vec{E}$

α - поляризуемость

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E}(1+\alpha)$

$\tilde{\varepsilon} = 1+\alpha$ - относит. диэлектрич. проницаемость

$\varepsilon = \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}$ - абсолют. диэлектр. проницаемость

$\vec{D} = \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$

материальное ур-ние для линейн. изотропн. диэлектриков

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \vec{E}(1+4\pi\alpha)$

$\varepsilon = (1+4\pi\alpha)$ - диэлектрич. проницаемость

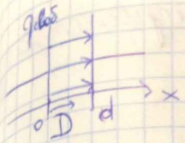
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

Док-во эквивалентности "нашей" диэлектрич. проницаемости и диэлектрич. проницаемости по Фарадею

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0}$$

C – емкость заполнен. конденсатора

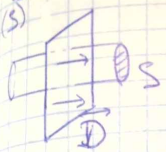
C_0 – емкость пустого –"–



$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{D} \to \vec{E} \to \Delta\varphi \to C = \frac{q_{свб}}{\Delta\varphi}$$

$$\oint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = q_{свб}$$



$$DS = \sigma_{свб} \cdot S$$

$$D = \sigma_{свб}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma_{свб}}{\varepsilon}$$

$$\Delta\varphi = \int_0^d E_x dx = \frac{\sigma_{свб}}{\varepsilon} d$$

$$C = \frac{q_{свб}}{\Delta\varphi} = \frac{\sigma_{свб} \cdot S_{обкл.} \varepsilon}{\sigma_{свб} \cdot d} = \frac{\varepsilon S_{обкл.}}{d} \quad (SI)$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S_{обкл}}{d}$$

$$\frac{C}{C_0} = \varepsilon$$

для CGSE – самостоятельно

Некоторые дополнит. ур-ния для линейных изотропн. диэлектриков

(1) $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ – статич. поле

$$\oint_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l}) = 0 \to \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \text{ – потенциальность}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$

$\oint_L \frac{\vec{D}}{\varepsilon} d\vec{l} = 0 \overset{?}{\Rightarrow}$ потенциальность $\oint_L \vec{D} d\vec{l} = 0$

если ε одинакова во всем пространстве

$\varepsilon \neq \varepsilon(r) \qquad \varepsilon = const$

$\Downarrow$

$\oint_{(L)} \vec{D} d\vec{l} = 0$

(2) $\oiint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = q_{своб}$ (SI)

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \rightarrow \oiint_{(S)} \varepsilon \vec{E} d\vec{S} = q_{своб.} \overset{?}{\Rightarrow} \oiint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon} q_{своб.}$

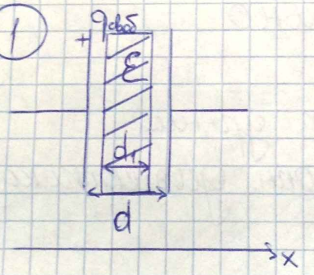
если $\varepsilon = const$ – однородный

это значит что поле в каждой точке становится в ε раз меньше

$\oint \vec{P} d\vec{S} \overset{?}{=} 0$ <u>самостоятельно</u>

Примеры вычисления полей в диэлектриках (линейных и изотропных)

(1)

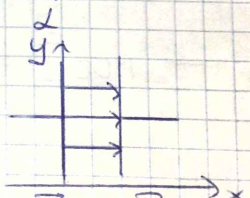


$d_1 \leq d$, $q_{своб}$

$E, D, P = ?$

$\sigma_{связ.} = ?$

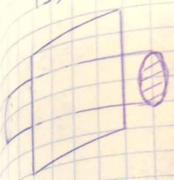
$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$



$\vec{E} \neq \vec{E}(y)$

но D зависит от $q_{своб}$ и $q_{связ}$, но !!

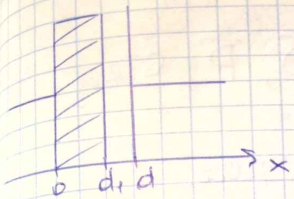
$$\oint_{(S)} \vec{D}\, d\vec{S} = q_{своб}$$



$$D \cdot S_{торц} = (q_{своб})^{охват} \Rightarrow D = \frac{(q_{своб})^{охват}}{S_{торц}} =$$

$$D = \frac{\sigma_{своб} \cdot S_{торц}}{S_{торц}} = \sigma_{своб}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \tilde{\varepsilon} \vec{E}$$



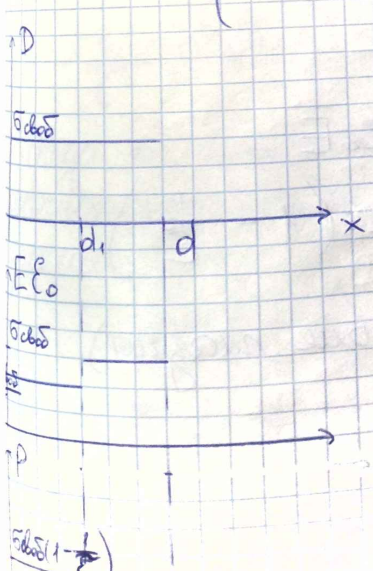
$$E = \begin{cases} \dfrac{D}{\varepsilon} = \dfrac{\sigma_{своб}}{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}}, & x \le d_1 \\ \dfrac{\sigma_{своб}}{\varepsilon_0}, & d_1 < x \le d \end{cases}$$

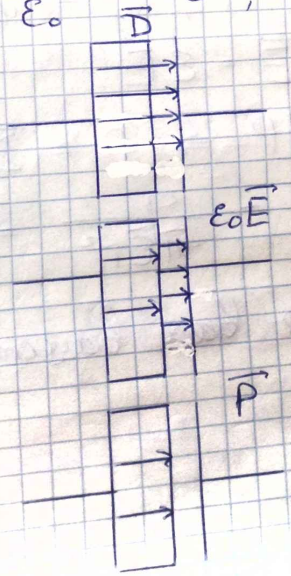
$\tilde{\varepsilon} = 1$ при $d_1 < x \le d$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$P = \begin{cases} \sigma_{своб} - \dfrac{\varepsilon_0 \sigma_{своб}}{\varepsilon} = \sigma_{своб}\left(1 - \dfrac{1}{\tilde{\varepsilon}}\right), & x \le d_1 \\ \sigma_{своб} - \dfrac{\varepsilon_0 \sigma_{своб}}{\varepsilon_0} = 0, & d_1 < x \le d \end{cases}$$

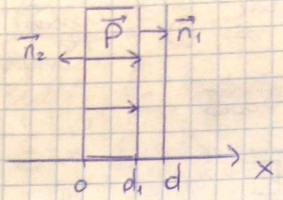




$\tilde{\varepsilon} = 2$

$\sigma_{связ} = P_n$

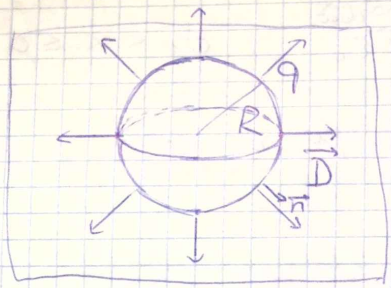
$\sigma_{связ} = \sigma_{своб} = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (x = d_1)$



$\sigma_{связ} = -\sigma_{своб}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (x = 0)$

(2) ε

$\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}, \sigma_{связ}$



$\oint\!\!\oint_{(S)} \vec{D}\, d\vec{S} = q_{своб.}$

$\oint\!\!\oint_{(S)} \vec{D}\, dS = \oint\!\!\oint_{(S)} D\, dS = D \cdot 4\pi r^2$

1) $r < R \Rightarrow q_{своб.} = 0 \quad D = 0 \Rightarrow E = 0$

2) $r \geq R \Rightarrow q_{своб} = q \quad D \cdot 4\pi r^2 = q_{своб} = q$

$D = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$

$P_n = \frac{q}{4\pi r^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$

$\varepsilon > 1$ (для всех веществ кроме плазмы)

$P_n > 0$

$\sigma_{изг}|_{r=R} = P_n'$

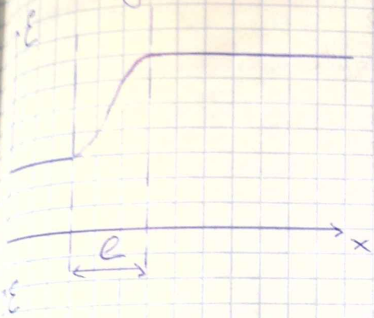
(принято нормаль направлять от диэлектрика в вакуум)

$P_n' = -P_n$

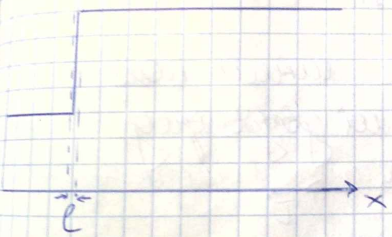
$$\sigma_{изг} = -\frac{q}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

избыток (положит. заряд сосредоточен на диэлектрике в бесконечности)

Граничное условие для полей в диэлектрике

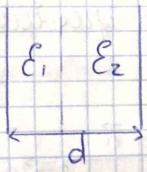


чем будет уже граница, тем проще расчитать переход



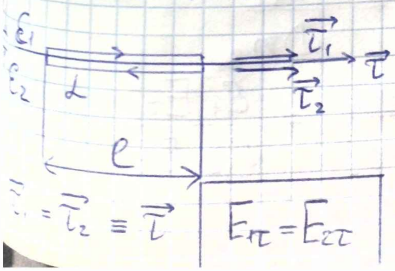
$l \ll \lambda$ (λ - длина волны)

$l \ll d$ (d - толщина конденсатора)



...ида обладает св-вом ...ночноостоян. диэлектрич. ...ниц.

$\Delta l \ll l$



$\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_2 \equiv \vec{\tau}$ $\boxed{E_{\tau} = E_{2\tau}}$

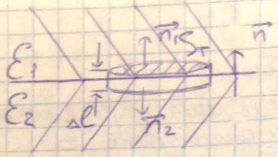
$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -f \frac{\partial}{\partial t} \iint_S (\vec{B}, d\vec{S})$$

$$E_{\tau_1} l - E_{2\tau_2} l + o\left(\frac{\Delta l}{l}\right) =$$

$$= -f \left\langle \frac{\partial B_n}{\partial t} \right\rangle \cdot l \cdot \underbrace{\Delta l}_{\to 0} \to 0$$

среднее по площади

$$\boxed{E_{1\tau} = E_{2\tau}}$$ - выполнено всегда



принято нормаль проводить всегда из 2 среды в 1

(D)

$\Delta\ell \ll d$

d (диаметр монетки)

$\vec{n}_1 = \vec{n}$, $\vec{n}_2 = -\vec{n}$

$S_{бок} = \pi d \cdot \Delta\ell \to 0$

$$\oint\!\!\oint_{(S)} (\vec{D}, d\vec{S}) = q^{свол}_{своб} = \iiint_{(V)} \underbrace{\rho_{своб}\, dV}_{\to 0} + \iint_{(S)} \sigma_{своб}\, dS$$

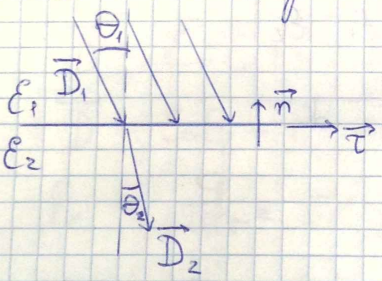
т.к. $V_{цилиндр} \to 0$

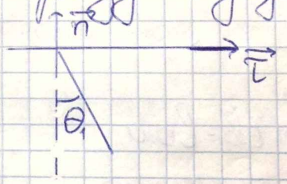
$$D_{1n} \cdot S_T - D_{2n} S_T = \sigma_{своб} \cdot S_T$$

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{своб}}$$

Если $\sigma_{своб} = 0$ $\quad D_{1n} = D_{2n}$

Рассмотрим преломление линий поля D и E на границе раздела двух сред



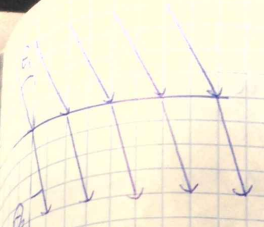


$$tg\,\theta = \frac{D_\tau}{D_n}$$

$$tg\,\theta_1 = \frac{D_{\tau_1}}{D_{n_1}}, \quad tg\,\theta_2 = \frac{D_{\tau_2}}{D_{n_2}}$$

$$\frac{tg\,\theta_1}{tg\,\theta_2} = \frac{D_{\tau_1}}{D_{n_1}} \cdot \frac{D_{n_2}}{D_{\tau_2}} = \frac{D_{\tau_1}}{D_{\tau_2}} = \frac{\varepsilon_1 E_{\tau_1}}{\varepsilon_2 E_{\tau_2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}_1, \quad \vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}_2$$



линии поля $\vec{E}$ будут выгибаться по другому, т.к. они могут начинаться на свободных и связан. зарядах

Силы, действующие на макрозаряды в диэлектрике

$\vec{E} \overset{?}{=} \frac{\vec{F}}{q'}$ (сформулировали в вакууме)

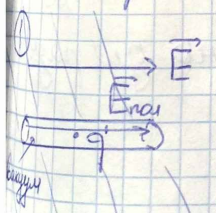
проблема измерить силу $\vec{F}$, либо нельзя услить за пробным зарядом, либо при помещении заряда в диэлектрик исказется поля.

$\vec{F} = \frac{kq \cdot q'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ (в вакууме)

$\vec{F} = \vec{F}_{кул} + \vec{F}_{упр}$ (в среде).

Померить $\vec{E}$ в вакууме, а потом пересчитать в веществе.

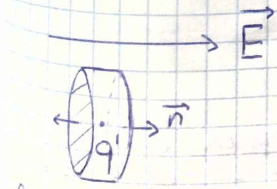
Померить $\vec{E}$ в вырезан. полости в в-ве

① 

$\vec{E}_{пол} = \frac{\vec{F}}{q'}$

$E = E_\tau = E_{пол\tau}$ (в силу граничн. усл.)

$E = E_{пол}$

② 

$D_{1n} = D_{2n}$

$D = D_{пол}$

$\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E = \varepsilon_0 E_{пол} \rightarrow E = \frac{E_{пол}}{\tilde{\varepsilon}}$

$l \ll d$

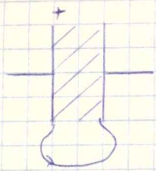
$\vec{F} \to \vec{E}_{пол} \to \vec{E}$

вырезан. полость, которая не искажает поля будет эллипсоидом

3

$$\vec{P} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$$

Энергия электрического поля в диэлектрике



поле потенциально, значит заряд можно перетащить по любой траектории в том числе и через вакуум

$$đA_{стор} = dW_{эл}$$

$$đA_{стор} = U dq = \frac{q}{C} dq$$

$$C = \frac{q}{U}$$

$$W_{эл} = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0}$$ (C_0 - емкость того же конденс. в вакууме)

$$W_{эл} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon C_0}$$

$$W_{эл} = \frac{\varepsilon C_0 U^2}{2}$$

верно все, но для разных случаев

$$W_{эл_0} = \frac{q^2}{2C_0}$$

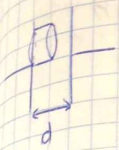
$$W_{эл} = \frac{W_{эл_0}}{\varepsilon}\Big|_q$$ (вставляем диэлектрик в конденсатор, конденсатор отключен от источника энергия тратится на поляризацию зарядов молекул в диэл.

$W_{эл_0} = \frac{CU^2}{2}$

$W_{эл} = \varepsilon \cdot W_{эл_0}$ (конденсатор не стали отключать от источника)

энергия увеличивается за счет работы батареи

$W_{эл} = \int dA_{стор} = \int_0^q U dq = \int E \cdot \underbrace{d\, S}_{V} dD$



$U = E \cdot d$

$\boxed{w_{эл} = \int E dD}$

$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$

$D = \sigma_{своб} = \frac{q}{S}$

$dq = S \cdot dD$

CGSE

$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi q_{своб}$

$DS_T = 4\pi \sigma_{своб} \cdot S_T \Rightarrow D = 4\pi \sigma_{своб} = 4\pi \frac{q_{своб}}{S}$

$dq = \frac{S dD}{4\pi}$

$dW_{эл} = E \cdot d \frac{S \cdot dD}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} E \cdot dD \underbrace{S \cdot d}_{V}$

$dw = \frac{1}{4\pi} E dD$

$w_{эл} = \frac{1}{4\pi} \int E dD$ (CGSE)

$w_{эл} = \int E dD$ (SI)

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$w_{эл} = \int E \varepsilon dE = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}$ (SI)

$w_{эл} = \frac{1}{4\pi} \varepsilon \int E dE = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{ED}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}$ (CGSE)

Силы при наличии диэлектрика

диполь втягивается в более сильное поле, возникает деформация, которая наз-ся электрострикция (механич. деформация, на молекулы начинают действовать силы упругости)

Энергетический метод вычисления сил

$dA_{эл} = -dW_{эл}$ (источников, батарей нет)
заряд постоянный

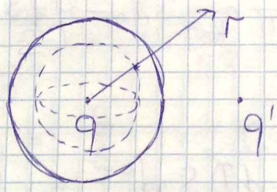
$$dA_{эл} = F_x\,dx$$

$$F_x = -\left.\frac{dW_{эл}}{dx}\right|_q$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} W_{эл}\big|_q$$

Пусть есть безграничный диэлектрик (жидк. или газообразн.)

(1) ε



$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = q_{своб} \rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}$$
(поле создан. зарядом q)

$$w_{эл} = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{q^2}{2\varepsilon(4\pi r^2)^2}$$

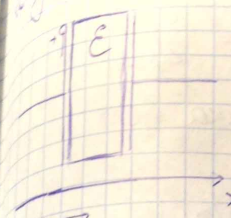
$$W_{эл} = \int_{(V)} w_{эл}\,dV =$$

$$= \int_r^\infty \frac{q^2\,4\pi r^2\,dr}{2\varepsilon(4\pi r^2)^2} \sim \frac{1}{\varepsilon r}$$

$$F_{эл\,r} \sim \frac{1}{\varepsilon r^2}$$

среда вносит свой вклад на действие пробн. заряда

...ная сила действ. на обкладку плоского конденсатора



$$F_x = q_{пр} \cdot E_{лев}$$

$$\oint \vec{D}\, d\vec{S} = q_{своб}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

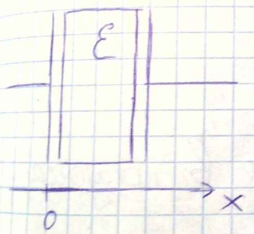
$$D = \sigma_{своб}$$

поле $\vec{D}$ определяется всеми зарядами, но поток $\vec{D}$ только своб. заряд

$$E = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{своб}}{\varepsilon} = \dfrac{\sigma_{своб}}{\varepsilon_0 \varepsilon} & \text{в полости} \\ \dfrac{\sigma_{своб}}{\varepsilon_0} & \text{в зазоре} \end{cases}$$

$$E_{лев} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{своб}}{\varepsilon_0}$$

$$F_x = -\frac{\sigma^2_{своб} S}{2\varepsilon_0 \cancel{S}}$$



$$W_{эл} = \frac{q^2}{2C}$$

$$C(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{x}$$

$$F_x = -\frac{dW_{эл}}{dx}\Big|_q = +\frac{q^2}{2C^2} \cdot \frac{dC}{dx} =$$

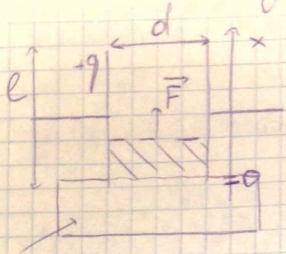
$$= \frac{q^2 \cancel{x^2}}{2(\varepsilon_0 \varepsilon S)^2} \cdot \left(-\frac{\cancel{\varepsilon_0 \varepsilon S}}{\cancel{x^2}}\right) = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = -\frac{\sigma^2_{своб} S}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$$

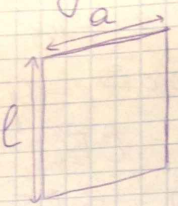
две разные задачи → два разные ответа

в 1 задаче поле в зазоре такое же как в вакууме

во 2 задачи диэлектрик действует на обкладку с дополнит. силой, т.к. он полностью заполняет пространство между обкладками

Втягивание жидкого диэлектрика в конденсатор



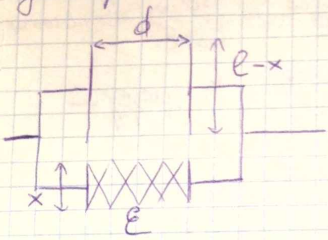


$$W_{эл} = \frac{q^2}{2C}$$

источника нет

$$F_{эл_x} = -\frac{dW_{эл}}{dx}\Big|_q = +\frac{q^2}{2C^2}\frac{dC}{dx} =$$

$$= \frac{U^2}{2}\frac{dC}{dx} = +\frac{dW_{эл}}{dx}\Big|_{U=const}$$



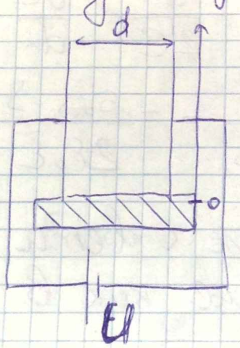
$$C = C_{верхн} + C_{нижн} = \frac{\varepsilon_0 \cdot a(l-x)}{d} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} a x}{d} = \frac{\varepsilon_0 a}{d}(l - x + \tilde{\varepsilon} x)$$

$$\frac{dC}{dx} = +\frac{\varepsilon_0 a}{d}(\tilde{\varepsilon} - 1)$$

$$F_{эл_x} = \frac{q^2}{2C^2}\frac{\varepsilon_0 a}{d}(\tilde{\varepsilon} - 1) > 0$$

диэлектрик должен втягиваться в конденсатор



$$đA_{ист} = dW_{эл} + đA_{втяг}$$

$$đA_{ист} = U dq = U^2 dC$$

$$đA_{втяг} = F_x dx$$

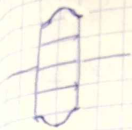
$$dW_{эл} = d\left(\frac{CU^2}{2}\right) = \frac{U^2}{2}\frac{dC}{\cancel{dx}}$$

$$U^2 dC = \frac{U^2}{2} dC + F_x dx$$

$$F_x dx = \frac{U^2}{2} dC$$

результат не зависит от того, что постоянно заряд или напряжение

Предполагали, что $\vec{D}$ однородно, чтобы вычислить емкость, но тогда сила, действ. на диэлектрик не может быть направлена вверх, краевое поле заставляет втягивать диэлектрик.



Пондеромоторное действие - действие других и электрич. сил

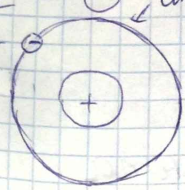
Физические механизмы поляризации диэлектрика

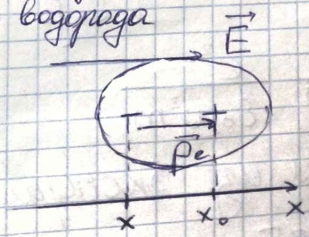
$\langle \vec{p} \rangle = 0$ (в-ва с неполярными молекулами)

Квазиупругий ("электронный") механизм поляризации газов

$\langle \vec{p} \rangle = 0$ - неполярн. м-лы

$\vec{E} = 0$





p_e - дипольный момент отдельной молекулы

β - коэфф. поляризуемости молекулы

α - поляризуемость в-ва

$p_e \sim E$

SI $p_e = \varepsilon_0 \beta E$ $P = n p_e$

$P = \varepsilon_0 \alpha E$

$P = n p_e = \varepsilon_0 \beta n E$

$\alpha = \beta n = \frac{p}{kT} \beta$

$p = nkT$ в газах

$n = \frac{p}{kT}$

$\alpha \sim \frac{1}{T}$ в ~~ж~~ газах $\Rightarrow \beta = const$

$\beta \neq \beta(T)$

$m_e \ddot{x} = eE - kx$ (II з-н Ньютона для электрона атома водорода)

$E = const \Rightarrow \ddot{x} = 0$ $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (частота колебаний гармонич. осцил.)

$x = -\frac{|e|E}{k}$

$p_e = e \cdot x = \frac{e^2 E}{k}$

$\vec{P} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E} = \varepsilon_0 \beta n \vec{E}$

$x = -\frac{|e| P}{k \varepsilon_0 \beta n}$ $P = n p_e$

$x = -\frac{|e| p_e \cancel{n}}{k \varepsilon_0 \beta \cancel{n}} = -\frac{|e| \cdot e \cdot x}{k \varepsilon_0 \beta}$

$\beta = \frac{e^2}{k \varepsilon_0} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 \omega^2 m}$

ω - оценивается из эксперимента

$\beta \sim 10^{-24}$ ед. CGSE

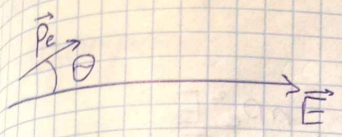
$\beta \neq \beta(T)$

Случай полярных молекул.
Ориентационный механизм поляризации

Пока нет внешнего поля молекулы разбросан. хаотич. $\langle \vec{p}_e \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{P} \rangle = 0$

газ имеет темпер. T

$\alpha = ?$



$$dA = dW_{эл}$$

$$dA = M(\theta)\, d\theta = p_e E \sin\theta\, d\theta$$

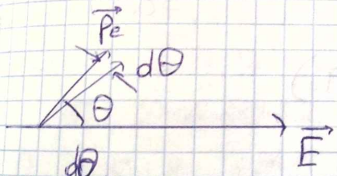
$$\vec{M} = [\vec{p}_e, \vec{E}]$$

$$\int_{W_0}^{W_{эл}(\theta)} dW_{эл} = \int_{\theta_0}^{\theta} p_e E \sin\theta\, d\theta$$

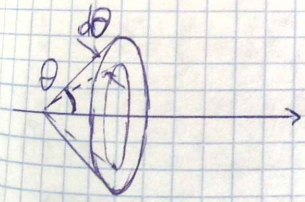
$$W_{эл}(\theta) = \underbrace{W_0}_{=0} - p_e E(\cos\theta - \underbrace{\cos\theta_0}_{=0})$$

$$W_{эл} = -p_e E \cos\theta$$

$$f(\theta) = C \exp\left(+\frac{p_e E \cos\theta}{kT}\right)$$

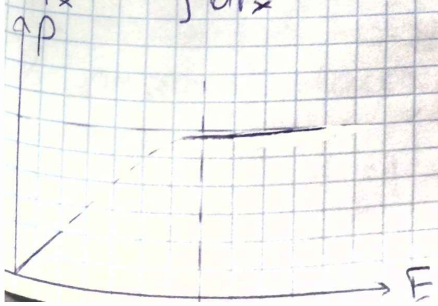


$$dP_x = p_{e_x} dn = 2\pi n p_e f(\theta) \cdot \sin\theta \cos\theta\, d\theta$$



$$dn = n \cdot d\Omega\, f(\theta) = n \cdot \underbrace{2\pi \sin\theta\, d\theta}_{d\Omega} f(\theta)$$

$$P_x = \int dP_x$$



$p_e E \cdot \cos\theta \gg kT$

в больших полях все диполи выстраиваются по полю

$kT \gg p_e E$ (тепловой разброс)

$$e^x = 1 + x \qquad \left(x = \frac{p_e E \cos\theta}{kT}\right)$$

$$P_x = \int P_x = 2\pi n p_e C \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \left(1 + \frac{p_e E \cos\theta}{kT}\right) d\theta$$

$$\int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \, d\theta = 0$$

$$\int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta = \frac{2}{3}$$

$$P_x = \frac{4}{3}\pi n p_e^2 \cdot C \cdot \frac{E}{kT} = \frac{n p_e^2 E}{3kT}$$

условие нормировки

$$\int_0^\pi C\left(1 + \frac{p_e E \cos\theta}{kT}\right) d\theta \cdot 2\pi \sin\theta = 1 \rightarrow C \cdot 2\pi \cdot 2 = 1$$

$$C = \frac{1}{4\pi}$$

$$P = \varepsilon_0 \alpha E$$

$$P_x = \frac{n p_e^2 E}{3kT} = \varepsilon_0 \alpha E \Rightarrow \alpha = \frac{n p_e^2}{3\varepsilon_0 kT}$$

квазиупругий механизм

$\beta = const$ (не зависит от T)

$$\alpha = n\beta \sim \frac{1}{T}$$

ориентац. механизм

$$n \sim \frac{1}{T} \Rightarrow \alpha \sim \frac{1}{T^2}$$

Особенности диэлектрических свойств кристаллов.

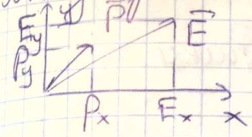
Тензор диэлектрической проницаемости.

Анизотропные среды – среды с разными св-вами в разных направлениях.

Изотропн: $\vec{P} \parallel \vec{E}$

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \parallel \vec{E}$$

Анизотропн: $\vec{P} \nparallel \vec{E}$



$$\frac{P_x}{E_x} \neq \frac{P_y}{E_y} \Rightarrow \frac{D_x}{E_x} \neq \frac{D_y}{E_y}$$

из механики $\vec{N} \nparallel \vec{\omega}$ (произв. тело вращали вокруг произв. оси)

$$N_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$
$$N_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$$
$$N_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

по аналогии

$$P_x = \varepsilon_0(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z)$$
$$P_y = \varepsilon_0(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z)$$
$$P_z = \varepsilon_0(\alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z)$$

тензор диэлектрич. проницаемости

$$D_x = \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z$$

в статич. полях тензор д.п. оказыв. симметричн.

$$[\varepsilon] = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & & 0 \\ & \varepsilon_y & \\ 0 & & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x$
$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y$
$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z$

$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$
$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$

его можно привести к диагонал. виду.

$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ – двуосные кристаллы.

$\varepsilon_x = \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ – одноосные крист.

Изотропный

$$SI: \ w_{эл} = \frac{ED}{2} \underset{\uparrow}{=} \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

$$D = \varepsilon E$$

Анизотропный

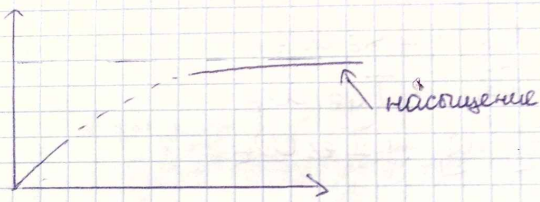
$$w_{эл} = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x E_x^2 + \varepsilon_y E_y^2 + \varepsilon_z E_z^2\right)$$

Нелинейные диэлектрики. Сегнетоэлектрики

в-во изотропно, но теряется лин. связь

линейность $\vec{P} \sim \vec{E}$

1)

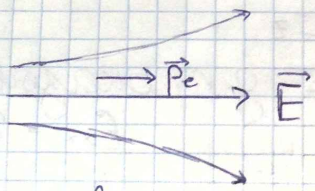


насыщение поляризации

2) Тепловая нелинейность

$$\alpha_{эл} \sim \frac{1}{T} \qquad \alpha_{ориент} \sim \frac{1}{T^2}$$

3) $\vec{E} = \vec{E}(\vec{P})$



стрикцион. нелинейность

диполь втягивается в более сильное поле

[illegible] пробой

изменений состояния в-ва под действием поля

5) Сегнетоэлектрики

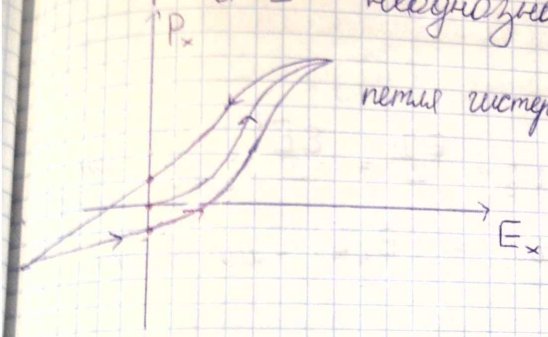
в-во с постоянным $\vec{P}$ в обычном состоянии

1) $\vec{D} \sim \vec{E}$ в слабых полях

2) $\varepsilon \sim 10^3 \div 10^4$ в слабых полях

3) $\vec{D} \nsim \vec{E}$ в сильных полях

P и E — неоднозначн. связь



петля гистерезиса

нужно принять особые меры, чтобы попасть в т. (0,0)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

это диэлектрик, его нельзя использовать как источник, это петля справедлива только для определен. диапазона температур

$t_1^\circ = -15\,^\circ C$ | температура Кюри

$t_2^\circ = 22{,}5\,^\circ C$ |

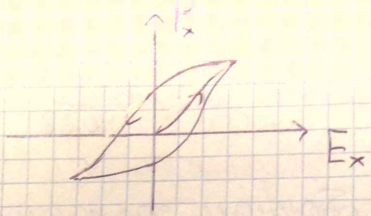
для сегнетовой соли

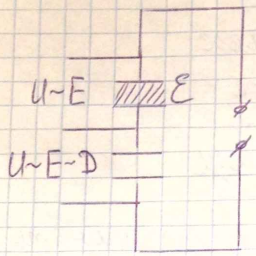
Пьезоэффект (электро-механ. связь)

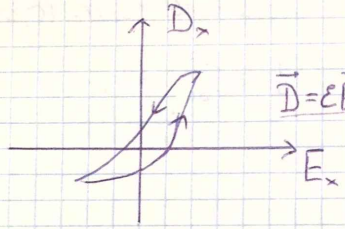
Если дефф. в-во появится электрич. поле и наоборот

происходит размывание границ, образуют один большой макродомен (так энергетич. выгодно)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}$$



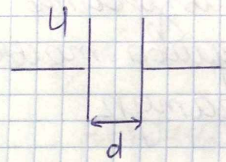




$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

$$w_{эл} = \frac{ED}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$ – мин. изотроп.

$$w_{эл} = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$$ – мин. анизотроп.



$$dA = U\,dq \qquad \oint \vec{D}\,d\vec{S} = q_{своб.}$$

$$U = E \cdot d \qquad D = \sigma_{своб} \Rightarrow dq = S\,d\sigma = S\,dD$$

$$dA = E \cdot \underbrace{d \cdot S}_{V} \cdot dD = V \cdot \underbrace{E \cdot dD}_{= dw_{эл.}}$$

$$dA_{ед} = \frac{dA}{V} = E \cdot dD$$

$$\boxed{w_{эл.} = \int E\,dD}$$

$$\mathring{A}_{ед} = \oint E\,dD \neq 0$$

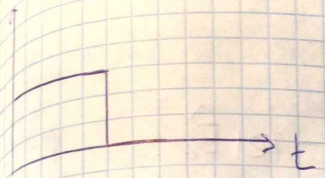
(это работа идет на выделение тепла и перераспределение доменов и их границ)

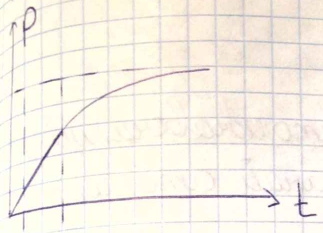
Особенности поляризации диэлектриков в высокочастотных полях

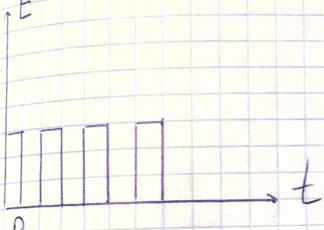
$P = \alpha \varepsilon_0 E$ (для мн. участка)

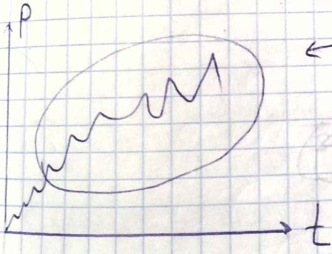
$\alpha(\omega)$

ω - частота изменения E









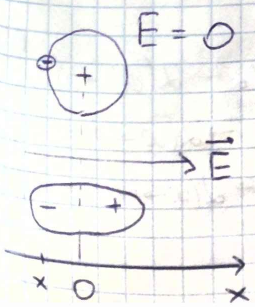
← осцилляции вследствие инерцион. молекул. диэлектрика

самой инерцион. — электрон.

средний — квазиупр.

низкий — мех электрон.

зависимость $\alpha(\omega)$ для электрон. механизма



$$m\ddot{x} = F_{эл_x} - kx - h\dot{x}$$

"трение" (вязкое) учитывает столкновение атомов

$$F_{эл_x} = eE = -|e|E$$

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\hat{E} = E_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \hat{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$m\ddot{x} + kx + h\dot{x} = -|e| E_0 e^{i\omega t}$$

$$x(t) = \hat{x}_0 e^{i\omega t}$$

$$\dot{x} = \hat{x}_0 i\omega e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} = -\hat{x}_0 \omega^2 e^{i\omega t}$$

$$-m\omega^2 \hat{x}_0 + k\hat{x}_0 + h i\omega \hat{x}_0 = -|e| \hat{E}_0$$

$$\hat{x}_0 = \frac{-|e| \hat{E}_0}{k - m\omega^2 + i\omega h}$$

Пусть $h = 0$ (пренебреглим столкновениям)

ω_0 – собствен. частота колебаний атома

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

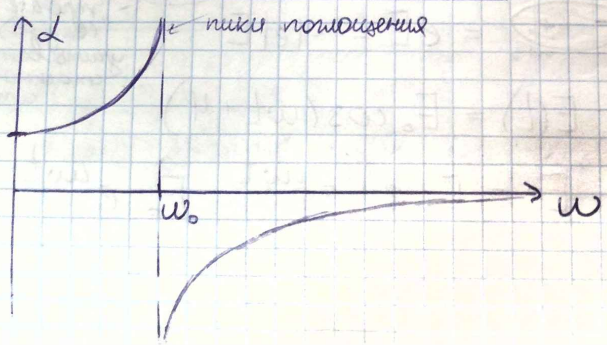
$$\hat{x}_0 = \frac{-|e| \hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\hat{p}_e = e\hat{x} \rightarrow \left.\begin{aligned} P &= np \\ P &= \varepsilon_0 \alpha E \end{aligned}\right\}$$

$$\hat{p}_e = -\frac{e|e|\hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{e^2 \hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\hat{p}_0 = \frac{ne^2 \hat{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \varepsilon_0 \alpha \hat{E}_0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}}$$



$$\omega \ll \omega_0 \rightarrow \alpha(\omega \to 0) = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2}$$

$$\omega \to \infty \rightarrow \alpha(\omega \to \infty) \rightarrow \frac{-ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}$$

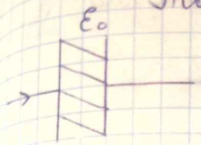
Начальные пики-пики колебания поля E и поля поляризуемости P имеют раз-ные начальные фазы

$\varepsilon_{ст} = 81$ (H_2O)

$\varepsilon_{пр} = 3$ (H_2O)

запаздывание приводит к резкому уменьшению диэл проницаемости

Токи смещения в диэлектриках

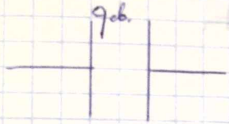


$$\oint_{(L)} \vec{B}\, d\vec{l} = \beta \cdot 4\pi I$$

возникают проблемы, где нет тока проводимости

$I = I_{см}$

$I = \frac{dq}{dt}$



$$\oiint \vec{D}\, d\vec{S} = q_{своб}$$

$$\frac{dq}{dt} = \oiint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, d\vec{S}$$

$$\boxed{\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\boxed{\vec{j}_{см} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

в диэлектрике смещ. заряды, образ. связан. заряды

Комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \beta \cdot 4\pi (\vec{j} + \vec{j}_{см}) \qquad \beta = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{см})$$

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (диф з-н Ома в дифф. форме)

$$\hat{\vec{E}} = \hat{\vec{E}}_0 e^{i\omega t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$j_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \hat{\vec{E}}_0 \, i\omega \, e^{i\omega t}$$

$$\mathrm{rot}\,\hat{\vec{B}} = \mu_0 \underbrace{(\sigma + i\omega\varepsilon)}\, \underbrace{\hat{\vec{E}}_0 \, e^{i\omega t}}_{\hat{\vec{E}}}$$

1) $\hat{\sigma} = \sigma + i\omega\varepsilon$ комплексн. провод.

2) $\hat{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\sigma}{i\omega} = \varepsilon - \frac{i\sigma}{\omega}$ – комплекс. диэлект. пр

поглощение энергии

Магнитные поля в веществе

Эл. поле	$\vec{E}_{макро}$	$\vec{P}$	$\vec{D}$
Магн. поле	$\vec{B}_{макро}$	$\vec{I}$	$\vec{H}$

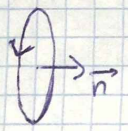
$$\vec{E}_{макро} = \frac{1}{\Delta V} \int \vec{E}_{микро} \, dV$$

$$\vec{B}_{макро} = \frac{1}{\Delta V} \int \vec{B}_{микро} \, dV$$

$\vec{B}_{микро}$ – микрополя каждой молек.

$\vec{I}$ – вектор намагниченности (намагничения)

$$\vec{P} \overset{опр.}{=} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{ei} = n\vec{p}_e$$

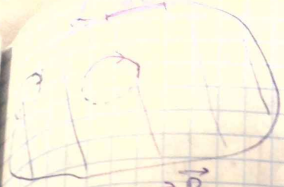


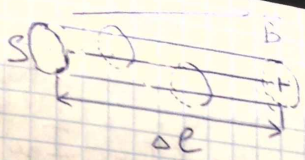
$$\vec{p}_M = f I S \vec{n}$$

$$\vec{I} \overset{опр.}{=} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_{M_i} = n\vec{p}_M$$

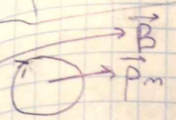
$\vec{H}$ – напряженность магнитного поля

Теорема о циркуляции вектора намагниченности





$I_{связ} = I_{мол.}$



$\Delta I_{связ} = I \cdot \Delta N =$

$= I \cdot n \cdot S \cdot \cos\alpha \Delta l = \frac{p_m}{f} \cos\alpha \Delta l$ (=)

$\vec{p}_m = f \cdot I S \vec{n}$

$\vec{p}_m \parallel \vec{B}$ (в в-ве)

$\vec{I} = \vec{p}_m \cdot n$ (вектор намагничен.)

(=) $\frac{1}{f} \cdot I_c \Delta l = \frac{1}{f} (\vec{I}, \Delta \vec{l})$

$$\boxed{\oint_L (\vec{I}, d\vec{l}) = f \cdot I_{связ}}$$

циркуляция вектора намагничен. опред. молекулярн. токами в в-ве

Основные ур-ния магнитного поля в магнетике

① $\oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0$ (справедливо всегда, нет магнитн. заряда)

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$

② $\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \beta \cdot 4\pi I_{охват.} = \beta \cdot 4\pi (I_{пр} + I_{см} + I_{связ})$

ток проводимости

$= \beta \cdot 4\pi \left(I_{пр} + I_{см} + \frac{1}{f} \oint_L (\vec{I}, d\vec{l}) \right)$

$\oint_L \left(\vec{B} - \frac{\beta \cdot 4\pi}{f} \vec{I} \right) d\vec{l} = \beta \cdot 4\pi (I_{пр} + I_{см})$

CGSM $\beta = f = \frac{1}{c}$

$\vec{B} - 4\pi \vec{I} = \vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля

SI $\beta = \frac{\mu_0}{4\pi}$, $f = 1$

$$\cancel{\vec{B} - \mu_0 \vec{I} = \vec{H}}$$

$$\oint_{(L)} (\vec{B} - \mu_0 \vec{I}) d\vec{l} = \mu_0 (I_{пр} - I_{см}) \quad \Big| \cdot \frac{1}{\mu_0}$$

$$\oint_{(L)} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}\right) d\vec{l} = I_{пр} + I_{см}$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} = \vec{H}$$

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = I_{пр} + I_{см}$$

циркуляция $\vec{H}$ опред только токами смещения и проводимости.

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{см}$$

Материальные уравнения.
Линейные изотропные магнетики

$$\cancel{\vec{I} \text{ и } \vec{B}}$$

$\vec{I}$ и $\vec{H}$ устанавливают связь между этими векторами (так истор. сложилось)

$$\vec{I} = \varkappa \vec{H}$$

$\varkappa$ – магнитная восприимчивость

SI

Вещество	воздух	Al	Pb	O (жидк.)	H_2 (газ)
$\varkappa$	$\sim 0{,}8 \cdot 10^{-7}$	$2{,}1 \cdot 10^{-5}$	$3{,}6 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$-0{,}06 \cdot 10^{-3}$

$\vec{I} \uparrow\uparrow \vec{B}$

H_2O (жидк)	Bi
$-9 \cdot 10^{-6}$	$-1{,}5 \cdot 10^{-4}$

$\vec{I} \uparrow\downarrow \vec{B}$

$\vec{I} \uparrow\uparrow \vec{B}$ – парамагнетики

$\vec{I} \uparrow\downarrow \vec{B}$ – диамагнетики

$\varkappa = \varkappa(T)$

при опред. T все в-ва должны быть диамагнетиками

$\varkappa \sim 10^3 - 10^5$ ферромагнетики (нелинейные магнетики)

CGSM

$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\varkappa\vec{H}$ (св-во линейности)

$\vec{B} = \underbrace{(1 + 4\pi\varkappa)}_{\mu}\vec{H} = \mu\vec{H}$

μ – магнитная проницаемость

SI

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \varkappa\vec{H}$

$\vec{B} = \mu_0\underbrace{(1 + \varkappa)}_{\tilde{\mu}}\vec{H} = \mu_0\tilde{\mu}\vec{H} = \mu\vec{H}$

$\tilde{\mu}$ – относительн. магнит. проницаемость

μ одинаково в CGSM и в SI, разные $\varkappa$

Некоторые следствия из основных уравнений для линейных изотропных магнетиков

① $\oint\limits_{(S)} \vec{B}\,d\vec{S} = 0$ $\quad$ $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

$\oiint \mu\vec{H}\,d\vec{S} = 0$

$\vec{B} = \mu\vec{H}$

$\oint\limits_{(S)} \vec{H}\,d\vec{S} = 0$ (если $\mu = const$) (св-во изотропности)

② $\oint\limits_{(L)} \vec{H}\,d\vec{l} = I_{пр} + I_{см}$

Пусть $I_{см} = 0$ (т.е. $\vec{D} = const$)

$\oint_{L} \vec{B}\, d\vec{l} = I_{пр}$

Если $\mu = const \Rightarrow \oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu I_{пр}$

в каждой точке пр-ва поле $\vec{B}$ станет в μ раз меньше.

Когда связан. токи могут стать объемными токами?

$$\oint_{(L)} \vec{I}\, d\vec{l} = f I_{мол} \longrightarrow rot\, \vec{I} = f \cdot \vec{j}_{мол}.$$

$$I_{мол} = \iint_{(S)} \vec{j}_{мол}\, d\vec{S}$$

$$\vec{I} = \varkappa \vec{H}$$

$$rot(\varkappa \vec{H}) = f \cdot \vec{j}_{мол}$$

$$rot(\varkappa \vec{H}) = \varkappa\, rot\, \vec{H} - [\vec{H}, \nabla \varkappa] = f \vec{j}_{мол}$$

$$\varkappa \neq \varkappa(\vec{r}) \Rightarrow \nabla \varkappa = 0$$

$$\varkappa\, rot\, \vec{H} = f \cdot \vec{j}_{мол}$$

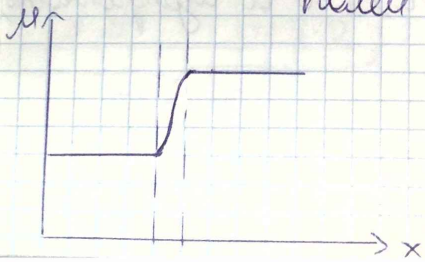
$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = I_{пр} \quad (\vec{D} = const \Rightarrow I_{см} = 0)$$

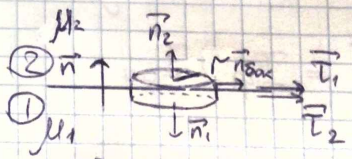
$$rot\, \vec{H} = \vec{j}_{пр}$$

$$\varkappa \cdot \vec{j}_{пр} = f \cdot \vec{j}_{мол}$$

если ток распред. в пр-ве значит молек. токи будут объемными или, если $\varkappa = \varkappa(\vec{r})$ тогда $grad\, \varkappa \neq \vec{0}$

Граничные условия для полей $\vec{B}$ и $\vec{H}$





$\vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_2$ $\quad \Delta l \ll r$

① Граничн. усл. для $\vec{B}$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$

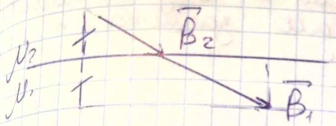
$\vec{n}_2 = \vec{n}$

$\vec{n}_1 = -\vec{n}$

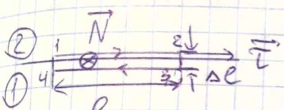
$$B_{2n} S_{торц} + \underbrace{B_{1n}}_{-B_{1n}} S_{торц} + \Phi_{бок} = 0$$

$|\vec{B}| < \infty \quad S_{бок} \to 0 \Rightarrow \Phi_{бок} = 0$

$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$ – нормальная компонента вектора $\vec{B}$ непрерывна



② Граничн. усл. для $\vec{H}$



$\Delta l \ll l$

$|\vec{H}| < \infty, \Delta l \to 0$

$$\oint_{(L)} \vec{H}\, d\vec{l} = I_{пр} + I_{см}$$

$$H_{2\tau} l - H_{1\tau} l + \underbrace{\langle H \rangle^{(2)} \Delta l}_{=0} + \underbrace{\langle H \rangle^{(1)} \Delta l}_{=0} = I_{пр} + I_{см}$$

$$I_{пр} = \iint \vec{j}_{пр}\, d\vec{S}$$

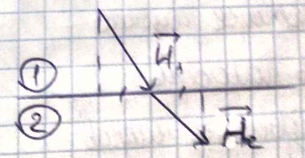
$$I_{см} = \iint \vec{j}_{см}\, d\vec{S}$$

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right| < \infty \Rightarrow I_{см} \to 0$$

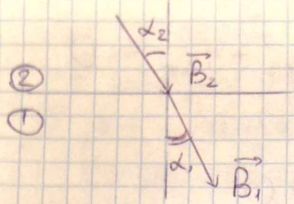
$I_{пр} = j_{прN} \cdot l$

$$\boxed{H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_{прN}}$$

$\vec{j}_{пр} = 0 \Rightarrow H_{1\tau} = H_{2\tau}$



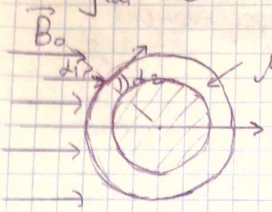
Закон преломления линий поля B на границе раздела двух сред



$$tg\,\alpha = \frac{B_\tau}{B_n}$$

$$\frac{tg\,\alpha_2}{tg\,\alpha_1} = \frac{B_{\tau 2}}{B_{n2}} \frac{B_{n1}}{B_{\tau 1}} = \frac{\mu_2 H_{\tau 2}}{\mu_1 H_{\tau 1}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$J_{см} = 0$$



$\alpha_2 \to \frac{\pi}{2}$

линий поля $\vec{B}$ внутри полости будет мало, защита от магнитного поля.

Как будут выглядеть линий, если визуализировать поле B опилками из висмута?

Силы в магнетике

$$\vec{F}_л = f \cdot q[\vec{v}, \vec{B}] \to \vec{B}_{микро}$$

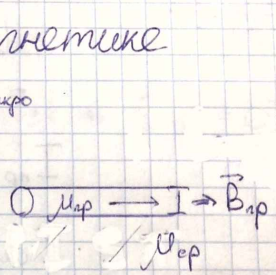
$$\vec{F}_A = f \cdot I[d\vec{l}, \vec{B}]$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

$$\vec{p}_m = f \cdot I \cdot S\vec{n}$$

Чтобы померить поле в магнетике нужно вырезать полость

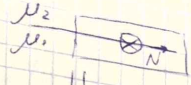
Пусть известно направление $\vec{B}$ магнетик изотропный $\vec{B} \parallel \vec{H}$



1. поле $\vec{B}$ исказится $\mu_{пр} \neq \mu_{ср}$
2. в проводнике будет течь ток, поле $\vec{B}$ исказится, в проводнике на носители начнут действ. доп. силы

$H_\tau = const = H_{пол.}$

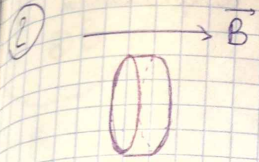
$j_N = 0$



$H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_N$

CGSM $H_{пол} = B_{пол}$

вырезая такую полость мы напрямую измерим пол $\vec{H}$



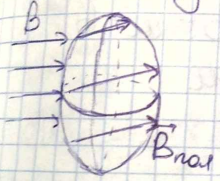
$B_n = const$

$B = B_n = B_{пол.}$

поля H в полости и в среде разное

помещая рамку с током внутри полости, мы можно измерить моменты сил, действ. на нее и найти поля в 1 и во 2 случаях

эллипсоид



могут ли быть разной густота линий $\vec{B}$ и $\vec{B}_{пол.}$

Энергия магнитного поля в веществе

$$\left.\begin{array}{l}\vec{B} = \vec{B}(t)\\ \vec{H} = \vec{H}(t)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E}_{вихр}$$

$$\mathcal{E}_{инд} = -f\frac{d\Phi}{dt}$$

$$d\Phi = \vec{B}\,d\vec{S}$$

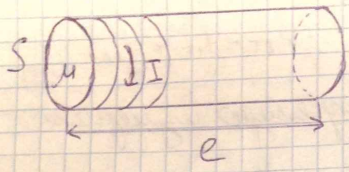
SI: $W_M = \dfrac{LI^2}{2}$

$$dW_M = -\delta A_{поля} = -dq\,\mathcal{E}_{инд} = +f\,dq\frac{d\Phi}{dt} = f\cdot I\cdot d\Phi$$

$L = L(\mu)$

магнитная энергия соленоида, заполненного изотропным магнетиком

$$W_м = \frac{LI^2}{2}$$



$$B_0 = 4\pi\beta n I = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{N}{l} I$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$$ ← вектор намагничен.

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = I_{пр} \Rightarrow H = H_0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \tilde{\mu} \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$B = \mu_0 \tilde{\mu} \frac{N}{l} I$$

$$\Phi = \Phi_1 \cdot N = \mu_0 \cdot \tilde{\mu} \frac{N^2}{l} \cdot S I$$

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

$$L = \mu_0 \tilde{\mu} \frac{N^2}{l} \cdot S$$

$$W_м = \frac{LI^2}{2}$$

энергия сосредоточена в магнитном поле

$$W_м = \iiint_{(V)} w_м \cdot dV$$

SI:

$$dW_м = I d\Phi$$

$$H = nI = \frac{N}{l} I \rightarrow I = \frac{Hl}{N}$$

$$d\Phi = N \cdot d\Phi_1 = N \cdot S dB$$

$$dW_м = \frac{Hl}{\cancel{N}} \cdot \cancel{N} S dB = \underbrace{H dB}_{dw_м} \cdot V$$

$$\boxed{dw_м = H dB}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \tilde{\mu} \vec{H}$$

$$dw_м = \mu_0 \tilde{\mu} H dH \rightarrow w_м = \frac{\mu_0 \tilde{\mu} H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \tilde{\mu}}$$

$$= \frac{BH}{2}$$

$W_м = \frac{B^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{BH}{2}$

справедливо для лин. изотропн. магнетиков

Энергетический расчет пондеромоторных сил в магнитном поле

$$\mathcal{E} = I \cdot R \quad | \cdot I \cdot dt$$

$$\mathcal{E}\underbrace{I \cdot dt}_{dq} = I^2 R\, dt$$

$$đA_{ист} = đQ$$

$$đA_{ист} + đA^{мех}_{стор} = đQ + dW_м$$

$$đA^{мех}_{стор} = -đA^{мех}_{поля}$$

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{инд} + \mathcal{E}_{с\text{-}инд} = IR$$

$$\mathcal{E} = IR - \mathcal{E}_{инд} - \mathcal{E}_{с\text{-}инд} \quad | \cdot I dt$$

$$\underbrace{\mathcal{E} I dt}_{} = \underbrace{I^2 R dt}_{} - I(\mathcal{E}_{инд} + \mathcal{E}_{с\text{-}инд})dt$$

$$đA_{ист} = đQ + I\, d\Phi$$

$$\mathcal{E}_{инд} + \mathcal{E}_{с\text{-}инд} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Φ – полной поток (внешний и собствен)

$$dA^{мех}_{стор} = dW_м - I\, d\Phi$$

$$dW_м = đA^{мех}_{стор} + I\, d\Phi = -đA^{мех}_{поля} + I\, d\Phi$$

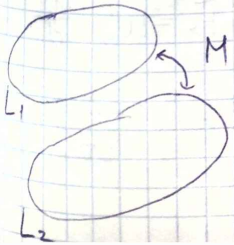
① Сверхпроводник $\Rightarrow \Phi = const \Rightarrow d\Phi = 0$

$$dW_м = -đA^{мех.}_{поля}$$

$$dA^{мех}_{поля} = F_x\, dx$$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{dW_м}{dx}\Big|_{\Phi = const}$$

② $I = const$



$$W_м = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 + M I_1 I_2) =$$

$$= \frac{1}{2} I_1 \underbrace{(L_1 I_1 + M I_2)}_{\Phi_1^{полн}} + \frac{1}{2} I_2 \underbrace{(L_2 I_2 + M I_1)}_{\Phi_2^{полн}}$$

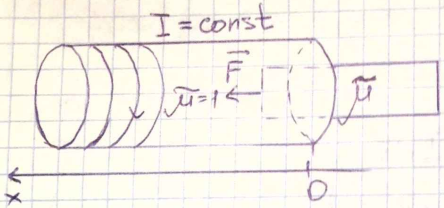
$$dW_м = \frac{1}{2} I_1 d\Phi_1 + \frac{1}{2} I_2 d\Phi_2$$

$$dW_м = -đA^{мех}_{поля} + I d\Phi$$

$$\frac{1}{2} I_1 d\Phi_1 + \frac{1}{2} I_2 d\Phi_2 = -đA^{мех}_{поля} + I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2$$

$$\left.\begin{aligned} đA^{мех}_{поля} &= dW_м \\ đA^{мех}_{поля} &= F_x dx \end{aligned}\right| \Rightarrow F_x = \left.\frac{dW_м}{dx}\right|_{I=const}$$

1 Втягивание сердечника в соленоид



$$dW_м = H dB$$

$$F_x = \left.\frac{dW_м}{dx}\right|_I = \frac{I^2}{2}\frac{dL}{dx}$$

$$L = L(x)$$

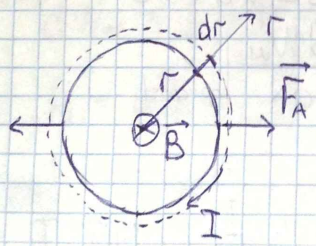
$$\mu = 1 + \varkappa$$

$$W_м = \frac{LI^2}{2}$$

Если $\frac{dL}{dx} > 0 \Rightarrow F_x > 0$ парамагнетик ($\varkappa > 0$)

Если $\frac{dL}{dx} < 0 \Rightarrow F_x < 0$ диамагнетик ($\varkappa < 0$)

2 Магнитное давление на обмотку соленоида



$$I = const$$

$$F_x = \left.\frac{dW_м}{dx}\right|_I = \left.\frac{dW_м}{dr}\right|_I$$

$$\left.\begin{aligned} dW_м &= w_м \cdot dV \\ dV &= l \cdot 2\pi r\, dr \end{aligned}\right| \Rightarrow F_x = w_м \frac{dV}{dr} = w_м \cdot \underbrace{l \cdot 2\pi r}_{S_{бок}}$$

$$F_x^{(1)} = \frac{F_x}{S_{бок}} = w_м$$

Сравнение уравнений для электрического и магнитного полей в вакууме

Эл.

$$\oint_{(L)} \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{B} d\vec{S}$$

$$\oiint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = q_{своб}$$

$$E_\tau = const \leftrightarrow E_{\tau_1} = E_{\tau_2}$$

$$D_n = const (\sigma_{своб} = 0)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \vec{E}$$

(мн. изотропн.)

Магн.

$$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = I_{пр} + I \frac{\partial}{\partial t} \iint_{(S)} \vec{D} d\vec{S}$$

$$\oiint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0$$

$$B_n = const$$

$$H_\tau = const (j_N = 0)$$

ток смещения

$$\vec{B} = \mu_0 \tilde{\mu} H$$

(мн. изотропн.)

Выполняется всегда и безусловно

Физические аналогии

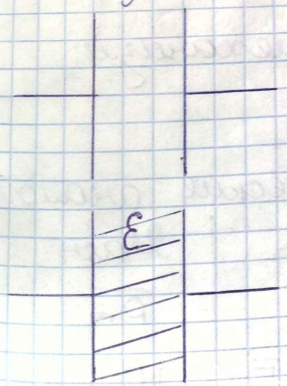
$$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$$

$$\vec{D} \leftrightarrow \vec{H}$$

$$\tilde{\varepsilon} \leftrightarrow \frac{1}{\tilde{\mu}}$$

уменьшение ~~увеличение~~ поля E в $\tilde{\varepsilon}$ раз при помещении в поле однородного диэлектрика, увеличение ~~уменьшение~~ поля B в $\tilde{\mu}$ раз — " — магнетика

1



диэлектрик мн. изотропн.

$$\oiint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = k \cdot 4\pi q = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_{вак} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

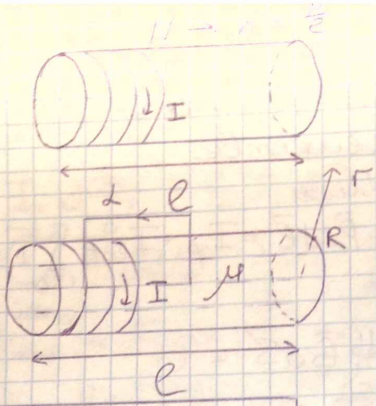
$$\oiint_{(S)} \vec{D} d\vec{S} = q_{своб}$$

$$D = \sigma$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}}$$

$$\boxed{E = \frac{E_{вак}}{\tilde{\varepsilon}}}$$

2



$B_{ак} = \mu_0 n I$

$r > R \Rightarrow B = 0$

$H = \frac{B}{\mu_0} - \vec{I} = 0$

$r \le R$

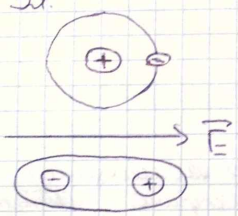
$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = Hl = n \cdot l I$

$H = nI$

$$\boxed{B = \mu_0 \tilde{\mu} n I = \tilde{\mu} B}$$

Механизмы намагнечения магнетиков

Эл.

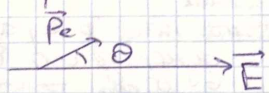


квазиупруг.

$f(\theta) = C e^{-\frac{W(\theta)}{kT}}$

$\vec{p}_e$

$\langle \vec{p}_e \rangle = 0$

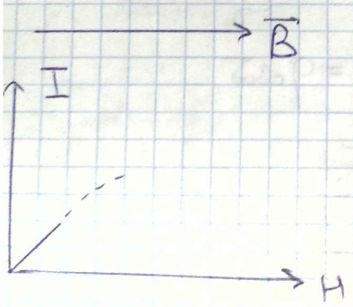


$\Rightarrow \alpha = \frac{n p_e^2}{3\varepsilon_0 kT}$

ориентацион.

Ориентационный механизм

$\vec{p}_m \Rightarrow \varkappa = ?$



Физические аналогии

Эл.	Магн
$\vec{p}_e$	$\vec{p}_m$
$W_{эл} = -(\vec{p}_e, \vec{E})$	$W_м = -(\vec{p}_m, \vec{B})$

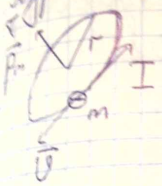
$$\boxed{\varkappa = \frac{n p_m^2 \mu_0}{3kT}}$$

$\chi \sim T^2$ (если поддерживать $p_{газ} = const$)

$\chi > 0$ – парамагнетики

Роль гироскопических эффектов в магнетизме. Гиромагнитное отношение

ядро тяжелое – оно неподвижно



$$\vec{p}_m = f I S \vec{n}$$

$$S = \pi r^2, \quad T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$I = \frac{|e|}{T} = \frac{|e| v}{2\pi r}$$

$$\vec{p}_m = f \frac{|e| r \cdot v}{2} \vec{n} = -f \frac{|e|}{2} [\vec{r}, \vec{v}]$$

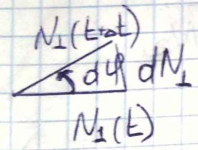
$$[\vec{r}, \vec{v}] \uparrow\downarrow \vec{n}$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{p}_{имп}] = m [\vec{r}, \vec{v}]$$

$$\vec{p}_m = -\gamma \vec{N} \qquad \gamma = \frac{f|e|}{2m}$$ – гиромагнитн. отношение

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]$$

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}$$



$$d\varphi = \frac{dN_\perp}{N_\perp} = \frac{M dt}{N_\perp} =$$

$$= \frac{p_m B \sin\theta \, dt}{N \cdot \sin\theta} = \frac{p_m B}{N} dt$$

прецессия

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_m B}{N} = \gamma B$$

$$\vec{\Omega} = \gamma \vec{B}$$

$\vec{N}_{доп} = m r^2 \vec{\Omega}$ (вторичный доп эффект за счет вращения)

$\vec{P}_{m\,доп} = -\gamma \vec{N}_{доп}$

$\vec{P}_{m\,доп} \uparrow\downarrow \vec{N}_{доп} \uparrow\uparrow \vec{\Omega} \uparrow\uparrow \vec{B}$

$\boxed{\vec{P}_{m\,доп} \uparrow\downarrow \vec{B}}$ в-во может намагничива. против поля

диамагнетизм

если $T\uparrow$, то парамагнет. будут размагнич. и вторичной эффект может стать преоблада.

диамагнетик выталкивается поля

парамагнетик встает по полю

Опыты, доказывающие существование гиромагн. эффектов

1915 г. Опыт Эйнштейна – Де Гааза

магнитомеханический эффект

нитка должна легко закруч.

$\vec{I} = \varkappa \vec{H}$

$\vec{N}_{эл} \uparrow\downarrow \vec{H}$ (для электрона)

$\vec{N}_{\Sigma} = const = 0$

$\vec{N}_{\Sigma} = \vec{N}_{эл} + \vec{N}_{реш.}$ $\vec{N}_{реш} \uparrow\downarrow \vec{N}_{эл}$

нить начнет закручиваться $\vec{N}_{реш} = -\vec{N}_{эл}$

в катушке перемен. поле

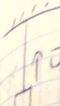
$\omega_{поля} = \omega_0$ (резонансн. частота)

тогда можно наблюдать эффект

$\frac{|e|}{2m} < \gamma < \frac{|e|}{m}$

19 в. Опыт Барнетта

гиромагнитный эффект



при вращении в-во намагничивалось

$\nu - 100 \frac{об}{с}$

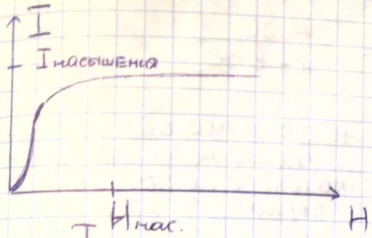
$B \sim 7 \cdot 10^{-5}$ Гс

$B_з \sim 0{,}28 - 0{,}7$ Г

Ферромагнетики

1) $\varkappa \gg 1$

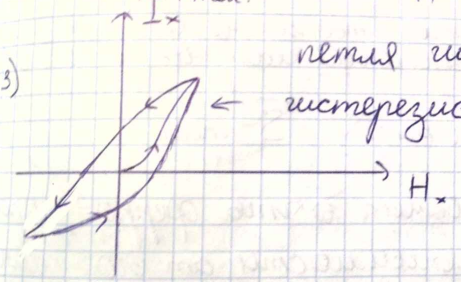
2)



$\vec{I} = \varkappa(H)\vec{H}$

$\vec{B} = \mu(H)\vec{H}$

3)



петля гистерезиса

гистерезис

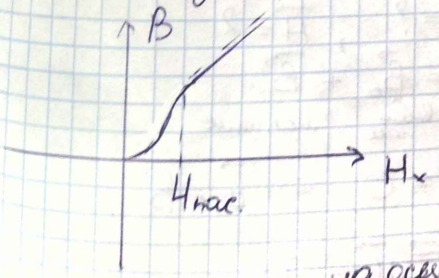
существует такая связь при $T < T_к$

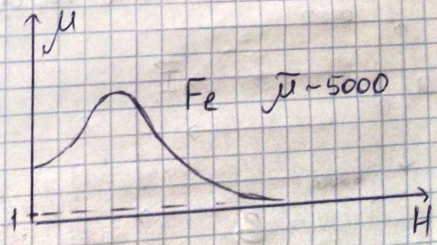
$T_к(Fe) = 770 K$

температура Кюри

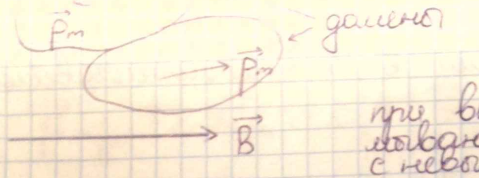
$w_м = \int H dB$

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$





получить петлю на осциллографе можно с помощью метода Столетова



при включении $\vec{B}$ границы размываются, съедаются домены с невыгодным расположением

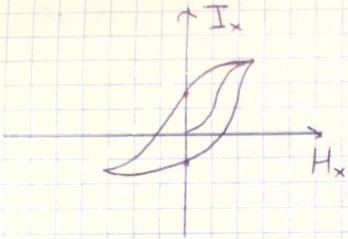
Теория Кюри-Вейсса

$H_{эфф} = H + \Delta H = H + bI$ — b - феноменолог. коэфф (определ. из эксперимента = const)

I - вектор намагниченности

$I = \varkappa H_{эфф}$

$\frac{I}{\varkappa} = H + bI \Rightarrow I = \frac{H\varkappa}{1 - b\varkappa}$



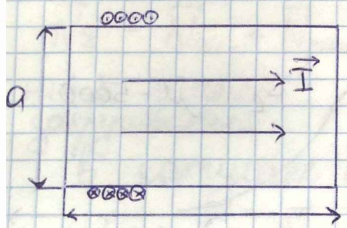
настоящее объяснение ферромагнетизма возможно только с помощью квантовой теории

клас. теория не учитывает спиновый момент атома

$\sum \vec{S} \neq 0$ (для ферромагнет.) $\vec{S}$ - спин

одно и тоже в-во может быть ферро-, парамагнетиком в зависимости от его темпер.

Поле в образце ферромагнетика, являющ. постоян. магнитом



$\vec{B} = ?$, $\vec{H} = ?$

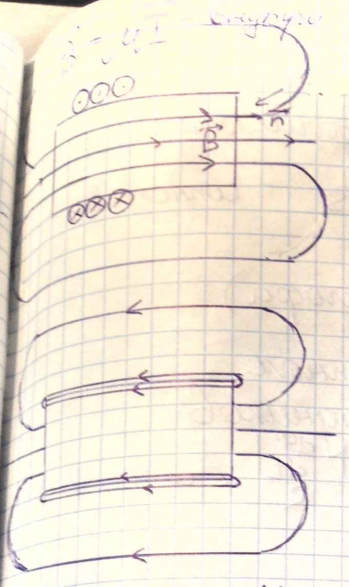
$\vec{B} = \underbrace{\vec{B}_0}_{\text{внеш. поле}} + \underbrace{\vec{B}'}_{\text{мол. поле}}$

$\vec{B}_0 = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}'$

$\oint_{(L)} \vec{I} d\vec{l} = I_{мол.}$

$\oint_{(L)} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (\overset{=0}{I_{пр}} + I_{мол}) = \mu_0 I_{мол}$

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{I}$



$B_n = const$

$H \to 0$ внутри

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ – внеш часть

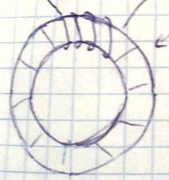
линии поля $\vec{H}$ разрывны в силу граничных условия

линии поля $\vec{B}$ непрерывны в силу гранич. усл.

Магнитные цепи

с помощью такой с-мы можно подводить магнитное поле (как провод для эл. поля)

$I \to \vec{H} \to \vec{B} \to \Phi$



так устроен трансформатор

$$\oint_{(L)} \vec{H} d\vec{l} = I_\Sigma^{пр} = NI$$

$$\sum_{(m)} H_{e_m} l_m = N \cdot I \qquad \Phi_m \equiv \Phi$$

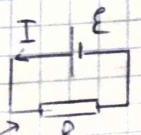
$\vec{B} = \mu(H)\vec{H}$

$\Phi = B_n \cdot S$

$$\sum_{(m)} \frac{B_{em}}{\mu} l_m = \sum \frac{\Phi_m}{\mu S_m} l_m = \Phi \sum_{(m)} \frac{l_m}{\mu S_m} = NI$$

$$\Phi \sum_{(m)} \frac{l_m}{\mu S_m} = NI$$

$$\Phi = \frac{NI}{\sum_{(m)} \frac{l_m}{\mu S_m}}$$



аналогия

$$I = \frac{\varepsilon}{R_\Sigma} = \frac{\varepsilon}{\sum \frac{l}{\sigma S}}$$

Магнитная цепь

NI

Φ

$\sum \frac{l_m}{\mu S_m}$ – магнитн. сопротивл.

Эл. цепь

$\mathcal{E}$ – первопричина

I – вычисляем величину

$\sum \frac{l}{\sigma \cdot S}$ – сопротивл.

$\sum_k I_k = 0$ (I правило Кирхгофа)

Особенности магнитных свойств сверхпроводников

$R \to 0 \quad I_{инд} = \frac{\mathcal{E}_{инд}}{R} = \frac{\left|\frac{d\Phi}{dt}\right|}{R} < \infty \Rightarrow \Phi = const$

$t=0 \quad B=0$

$\Downarrow$

$\Phi = 0 = const$

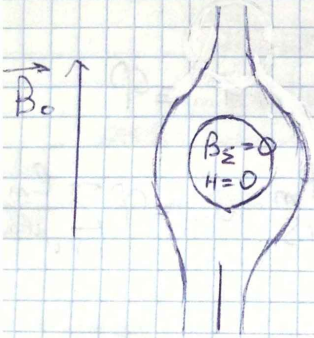
$t>0: \vec{B}_\Sigma = 0$ (внутри шарика)

$B_\Sigma = \vec{B}_0 + \vec{B}' = 0 \Rightarrow \vec{B}' = -\vec{B}_0$ – внутри

на пов-ти сверхпроводника должен течь ток который будет компенсировать внеш. магнитн. поле

эффект Мейснера

$B_n = const$

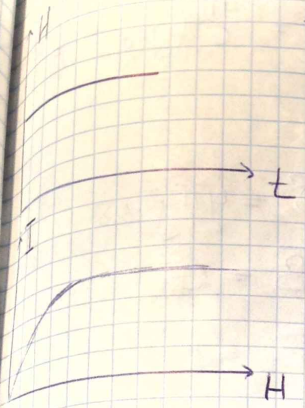


$B_n = const$

$H_\tau = const$

Дисперсия магнитной проницаемости

$$\vec{I} = \varkappa \vec{H}$$



если поле H будет перемен. то поле I не сможет успевать отслеживать изменение H

$\varkappa = \varkappa(\omega)$ – дисперсия

убывающ. ф-ция частоты

$\nu \sim 10^{15}$ Гц

$\Downarrow$

$\varkappa \to 0 \Rightarrow \mu \to 1$

магнитн. св-ва в-в для диапазона оптич. частот не существ. но сущ. в-ва оказ. влияние – ферриты

ферриты Fe_2O_3 (MeO)

Вывод уравнений Максвелла для полей в веществе

SI	CGSE + CGSM (Гауссова с-ма)
$\oint_{(L)} \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{(S)} \vec{B}\,d\vec{S}$	$\oint_{(L)} \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{(S)} \vec{B}\,d\vec{S}$
$\oint_{(L)} \vec{H}\,d\vec{l} = I_{пр} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{D}\,d\vec{S}}_{I_{см}}$	$\oint_{(L)} \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\left(I_{пр} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{(S)} \vec{D}\,d\vec{S}\right)$
$\oint_{(S)} \vec{D}\,dS = q_{охват} = \iiint_{(V)} \rho_{своб}\,dV$	$\oiint_{(S)} \vec{D}\,d\vec{S} = 4\pi \iiint_{(V)} \rho_{своб}\,dV$
$\oiint \vec{B}\,d\vec{S} = 0$	$\oiint_{(S)} \vec{B}\,d\vec{S} = 0$

СИ

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{см} = \vec{j}_{пр} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_{своб}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

(само поле $\vec{D}$ определяется всеми зарядами, но $\mathrm{div}\,\vec{D}$ —"— только своб.)

Гаус. СГС

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_{пр} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho_{своб}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Св-ва ур-ний

1. Ниоткуда логически не выводятся - это аксиомы, которые явл-ся обобщ. экспериментальных фактов.

2. Источниками электрич. поля могут быть электр. заряды и перемен. поле $\vec{B}$, источниками магнитного поля —"— только перемен. поле $\vec{E}$

3. С-ма интегр. и дифф. ур-ний неравноправна. Интеграл. ур-ния имеют большую общность. Ситуация меняется, если есть границы разрыва двух сред.

Системы станут эквивалентными только, если дописать к дифф. с-ме граничные условия

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \qquad D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{своб}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \qquad H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_{пр\,N}$$

Материальные ур-ния

$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$

$\vec{H} = \vec{H}(\vec{B})$

чтобы записать их нужно рассматривать св-во среды с учетом квантовых соотношений и с учетом статич. соотношений (молекулы подвижны)

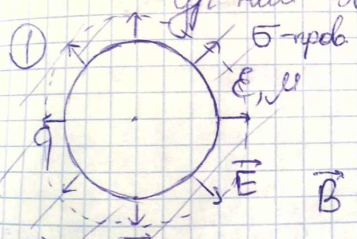
Но есть частные случаи линейн. изотропные диэлектрики и магнетики при условии слабых полей и однородн. среды

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\quad \vec{B} = \mu \vec{H}$ $\quad \vec{j}_{пр} = \sigma \vec{E}$

В современной физике известно, что эти ур-ния способны объяснить все явления в природе.

Эти ур-ния предсказывают существование <u>электромагнитных волн</u>

Примеры применения ур-ний Максвелла



проводящ. заряж. шар помещен в среду с известными хар-ками (проводящ. диэлектрик)

$\vec{B} = ?$, $\vec{H} = ?$

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$$\vec{B} = \beta I \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{\vec{r}^3} = \beta \frac{[\vec{j}, \vec{r}]}{r^3} dV$$

1) $\vec{B} \perp \vec{j} \Rightarrow B_r = 0$

$\vec{r}_0$ - орт радиальной оси

2) $\vec{j} \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{B} = 0$

$$\oint \vec{D} d\vec{S} = q$$

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \cancel{\frac{\partial q}{\partial t}} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dt} \vec{r}_0 = -\frac{I_{пр}}{4\pi r^2} \vec{r}_0 = -\vec{j}_{пр}$$

Если $\vec{j}_{см} = -\vec{j}_{пр}$, тогда $\vec{H} = 0$

(2) Как распространяется электромагн. волна

начали двигать плоскость yOz вверх
заряды побегут вверх

$\vec{E} \parallel \vec{i}$

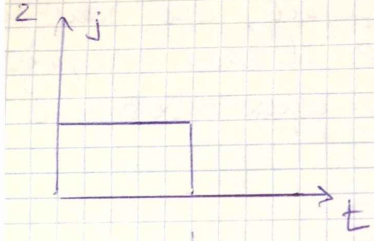
$$\oint_{(S)} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{(S_T)} \sigma_{сво} dS \quad \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0 = \frac{\sigma_{сво}}{2\varepsilon_0 \varepsilon}$$

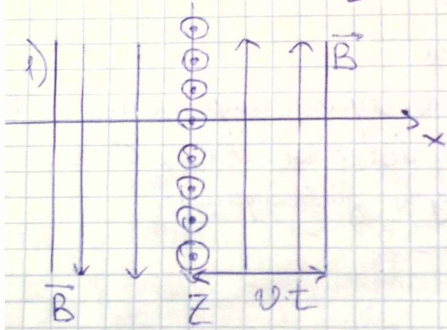
$$E_0 = E_{+\sigma}$$

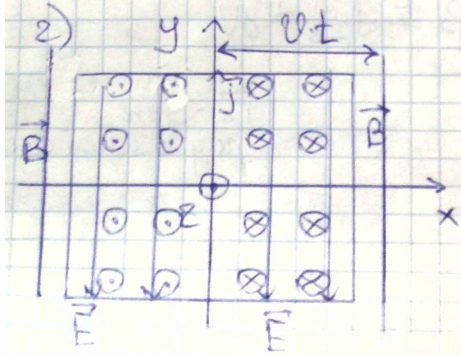
$$E_z = E_{+\sigma} + E_{-\sigma} = 0$$

поставим парал. по плоскости др. пл. зу
жен. также, но про
воположн. по знаку з
рядом



$$B_z(x) = -B_z(-x)$$





$\Phi_z = 0$

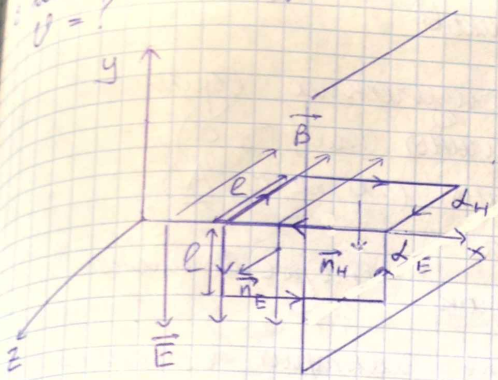
но через каждый контур поток не равен нулю

$\vec{E} = \vec{E}(t) \quad \vec{D} = \vec{D}(t)$

циркуляция $\vec{E}$ по большому контуру равна нулю

Как только возникнуть в сам пространства могут возмущения будут распространяться какой-то скоростью

$v = ?$



нужно воспользоваться 1 и 2 ур-ниями Максвелла

$$\oint_{\alpha_E} \vec{E}\,d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{(S)} \vec{B}\,d\vec{S}$$

$$\oint_{\alpha_E} \vec{E}\,d\vec{l} = E\cdot l + \underbrace{0}_{\text{нет поля}}\, l = B\cdot l\,\frac{dx}{dt} = B\cdot l\cdot v$$

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = I_{пр} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{(З)} \vec{D}\,d\vec{S}$$

$$\oint \vec{H}\,d\vec{l} = Hl + \underbrace{0\cdot l}_{\text{поля нет}} = D\cdot l\,\frac{dx}{dt} = Dl\cdot v$$

$E = B\cdot v$

$H = D\cdot l$

среда линейная изотропная

$B = \mu H = \mu_0 \tilde{\mu} H$

$D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} E$

$$\Rightarrow \frac{B}{\mu} = E\varepsilon v = \varepsilon B v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$$

$$\boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}}}$$

1. Скорость распростр. конечна
2. Получили формулу для v

в в-ве скорость меньше в $\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}$ раз

$\sqrt{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}} = n$ – показатель преломления

3. когда мы прервали движение частиц, снова возникнет возмущение

электромагнитная волна существует независимо от источников

Системы физических единиц

CGS - 3 основн. величины (см, г, с)

SI - 4 основн. величины (м, кг, с, А)

$1 м = \frac{1}{40 \cdot 10^6}$ меридиана

$1 с = \frac{1}{86400}$ земн. суток — старые эталоны

все с-мы где есть электрич. величины это электротехнич. с-мы физич. единиц

в с-ме CGS

$F = \frac{k|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$, $k=1$, заряд можно выразить через механич. величины, принципиальное отличие

(1) 1 кгс = 1 кг

1 килограмм-сила

МКГСС

килограмм-сила

$F = ma$ $[F] = \frac{M \cdot L}{T^2}$

$F = \alpha mg$ α - коэффициент уравнивания, такой чтобы для тела массой 1кг получить силу 1 кгс

$m = 1 кг$

$F = 1 кг$

$\alpha = \frac{1}{9,81}$

уменьшили кол-во единиц пришлось ввести новую константу

(2) $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{R}$

$G = 1 \rightarrow [F] = \frac{M^2}{L^2}$

$F = ma \rightarrow [F] = \frac{ML}{T^2}$ $\Rightarrow M = \frac{L^3}{T^2}$

теперь масса измеряется в др.

$c = 1 \rightarrow [L] = [T]$

один световой год — это расстояние

такие с-мы единиц наз-ся естествен. (1, 2, 3)

① Планковская с-ма единиц

основанная на 4 константах

G, c, $\hbar$, k (постоян. Больцмана)

$\frac{\hbar\omega}{kT}$ ур-ния выглядят очень просто

привычные величины приходится измерять в планковских масштабах (G, c, $\hbar$, k), это удобно для теоретической физики, но не для практической

Электрич. с-мы единиц

$F_{эл} = k \frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2}$, $\vec{F}_л = f q [\vec{v}, \vec{B}]$

$B = \beta \frac{2I}{r}$, $F_м = k_м \frac{|q_{1m} \cdot q_{2m}|}{r^2}$ ← гипотетическая магнитная сила

ε_0, μ_0 — размерн.

$$\boxed{\frac{\beta f}{k} = \frac{1}{c^2}}$$

— должно быть всегда выполнено т.к. механическая единица скорость должна быть одинаковой в с-ме SI и CGS

$\beta' = \frac{\beta}{\sqrt{\mu_0}}$ — безразмерн $k' = k \cdot \varepsilon_0$

$$\frac{\beta' \mu_0 \cdot \varepsilon_0}{k'} = \frac{1}{c^2}$$

	CGSE	CGSM	Гаусс (E+M)	MKSA (практ.)	SI
k'	1	1	1	1	$\frac{1}{4\pi}$
β'	1	1	$\frac{1}{c}$	1	$\frac{1}{4\pi}$
f	1	1	$\frac{1}{c}$	1	1
ε_0	1	$\frac{1}{c^2}$	1	$\frac{1}{9 \cdot 10^9}$	$\frac{4\pi}{9 \cdot 10^9}$
μ_0	$\frac{1}{c^2}$	1	1	10^{-7}	$\frac{4\pi}{10^{-7}}$
$k_м$	1	1	1	1	$\frac{1}{4\pi}$

Принципы строения и недостатки Международной с-мы единиц SI (с точки зрения электромагнетизма)

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\mathrm{rot}\,\vec{H} = j_{пр} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пр} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$	$\mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho$
$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$
SI	(Гаусс)

исчезла скорость света c, что принципиально важно, только для того, чтобы уравнять две с-мы необходимо ввести размерные величины ε_0, μ_0 (не именуя физич. смысла), так, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c \qquad [P] = [p] = [qe]$$

пересчет из Гаусс. с-мы в SI

E	D	B	H	P, q, I	$\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$
e	d	b	h	i	$1/c$

$$w_{эл} = \frac{(\vec{E},\vec{D})}{8\pi} \rightarrow w_{эл} = \frac{(\vec{E},\vec{D})}{2}$$

Гаусс SI

$$w_{м} = \frac{(\vec{B},\vec{H})}{8\pi} \rightarrow w_{м} = \frac{(\vec{B},\vec{H})}{2}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow \vec{F}_{эл} = q\vec{E}$$

$$\vec{F}_{л} = \frac{q}{c}[\vec{v},\vec{B}] \rightarrow \vec{F}_{л} = q[\vec{v},\vec{B}]$$

$$\begin{cases} \frac{ed}{4\pi} = 1, \quad \frac{bh}{4\pi} = 1, \quad ie = 1, \quad i\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,b = 1 \\ \frac{e}{\sqrt{\varepsilon_0}} = \frac{h}{\sqrt{\mu_0}} \end{cases}$$

$c = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}$

$d = \sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}$

$b = \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}$

$h = \sqrt{4\pi\mu_0}$

$i = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}$

коэффициенты пересчета из Гаусса в SI

когда переходим из Гаусса в SI подставляем их, когда из SI в Гаусс. обратн. величины

① $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пр} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ переход из Гаусса в SI

$\sqrt{4\pi\mu_0}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} = 4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,\vec{j}_{пр} + \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}\,\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}_{пр} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (SI)

② $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ переход из SI в Гауссову с-му

$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}}\,\vec{D} = \varepsilon_0\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\vec{E} + \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\vec{P} \quad \Big|\cdot\sqrt{\frac{4\pi}{\varepsilon_0}}$

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ (Гаусс)

Недостатки системы SI

$\vec{E}, \vec{D} \to [\vec{E}] = \frac{Н}{Кл}, \quad [D] = \frac{Кл}{м^2}$

$\vec{F} = q\vec{E}$

$\vec{B}, \vec{H} \to [B] = \frac{Н}{Кл}\cdot\frac{с}{м}, \quad [H] = \frac{А}{м} = \frac{Кл}{с\cdot м}$

$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H}$ (вакуум)

$\vec{D} = \varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \to \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

$\tilde{\varepsilon}_{SI} = \varepsilon_{Гаусс}$

$\vec{B} = \mu_0\tilde{\mu}\vec{H} = \mu\vec{H} \to \vec{B} = \mu\vec{H}$

$\tilde{\mu}_{SI} = \mu_{Гаусс}$

наличие нефизичных коэфф μ_0, ε_0, разная размерность полей

$\vec{D} = \underline{\varepsilon_0} \vec{E}$ - наследие теории эфира

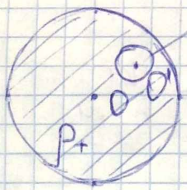
это недостатки

В теории относит. вводят тензоры 2 ранга связи полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$, $\vec{D}$ и $\vec{H}$, тогда $\vec{E}$ и $\vec{B}$, $\vec{D}$ и $\vec{H}$ должны иметь одинаковые размерности, что и есть в Гауссовой с-ме, а в SI приходится вводить нефизичн. размерные величины μ_0, ε_0

Электродинамика пользуется Гауссовой с-мой отсчета

SI удобна с практической точки зрения

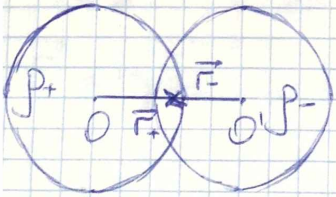
Дополнение к теме особенности магнитных св-в сверхпроводников



$\rho_\Sigma = \rho_+ + \rho_-$ Электростатика

$\vec{E}_{пол} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

$\vec{a} = \overrightarrow{OO'}$

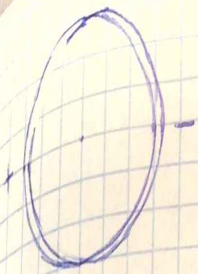


$|\rho_+| = |\rho_-|$

$E_{перекрыт.} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$

$\vec{E}_+ = k \cdot \frac{4\pi}{3} \rho_+ \vec{r}_+$

$\vec{E}_- = k \cdot \frac{4\pi}{3} \rho_- \vec{r}_-$



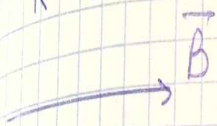
е-му можно заменить диполем

$\vec{p_e} \to \vec{E}$

похоже на диполь

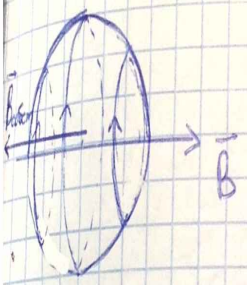
Сверхпроводник в магнитном поле

$R = 0$



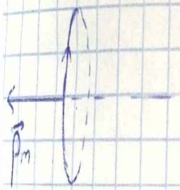
$\Phi_0 = 0$

$\Phi = \Phi_B + \Phi_{собств} = 0$



всю эту систему можно заменить одним магнитным диполем

$\vec{p_m} = fSI\vec{n} \to \vec{B}_{собст} = \vec{B}$



для того, чтобы найти ток, необходимо использовать граничн. условия для поля $\vec{H}$