Численные методы и матем. моделирование

Светлана Александровна.

Нужна $\boxed{\text{постановка задачи}}$ (п. 3)

1) Должна иметь решение и при каких-то условиях должно быть!

Если много решений, то какое лучше?

2) Задача должна иметь смысл.

После пост. задачи строят матем. модель

(сложные вещи отбрасываем или заменяем простыми)

Н-р, $\ddot{x} + \omega^2 x = f(x)$ хотя $\sin x \approx x$.

Есть два пути

- аналитическое решение (А.Р.)
  - в квадратурах
  - приближенное решение
- построение дискретных моделей
  - численные методы

Вместо непрерывной ф-ции $y(t)$ строим дискретную в некоторый момент времени y_t.

По значению функции ищут вид. или наоборот.

После того как получено решение идёт исследование результатов

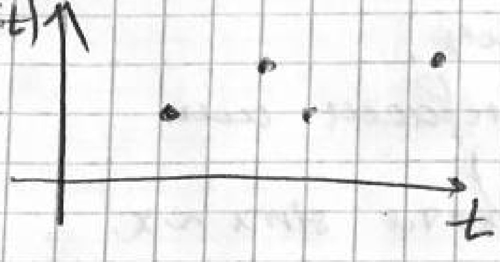
Класс. численные методы включают себя след. задачи:

1) интерполяция (аппроксимация)

Есть новое явление (пусть зависит от t)

При некотором t построим функцию.

Каким закономерностям она отвечает?



Это задача помогает построить множество решений

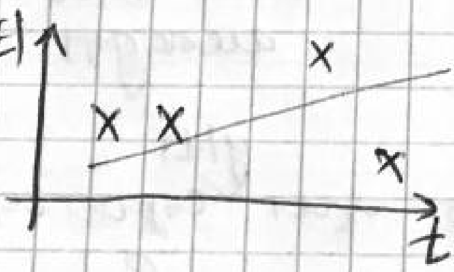
1) Должно согласовываться с теорией.

2) Если нет теории. Зависит от наших предположений.

Но бывает что набор точек странный.

А задача показывает, что там прямая.

Нужно аппроксимировать.



Нужно искать параметры прямой

Нужно min ошибки (регрессионные задачи)

2) Задачи линейн. алгебры.

1) Решение линейных систем.

а) Крамер

б) Гаусс

в) Метод обратной матрицы

Возникает система из миллион уравнений. Не всякая матрица допускает метод а) и б)

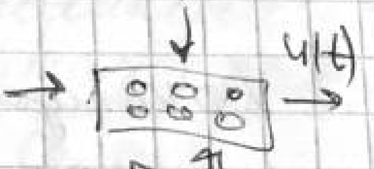
Если определитель матрицы A стремится к 0.

Есть б) – он наилучший, но если есть миллион уравнений, слишком большая сложность.

2) Поиск собств. векторов и собств. значений. (спектр матрицы)

③ Задача оптимизации.
(Методы оптимальных решений)

Н-р, экстремум функции.

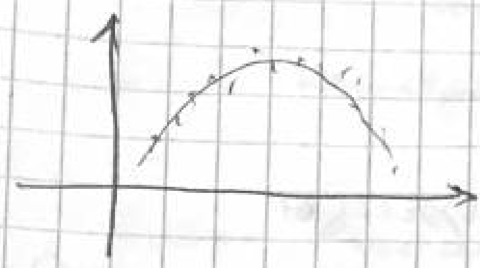


Задачи управления. Есть маленький ящик с ручками и мы их крутим. Подаем на вход сигнал, а на выходе должны получить определенный.

Ручки здесь – параметры сигнала

Тогда на выходе $u(t, \Theta_1, .., \Theta_m)$

Тогда мы $F(u(t; \Theta_1, .., \Theta_m)) \xrightarrow{\text{ищем}} \min$



Нужно найти
чтобы она была
ближе к точкам

$\sum_i r_i^2 \to 0$

сумма ошибок.

④ Решение диф. уравнений. Задача Коши.

Есть ДУ. $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$

Чтобы решение было ! Нужно н нач. условий.

$y(0) = y_0$

$y'(0) = y'_0$

. . . . .

$y^{(n-1)}(0) = y'_{n-1}$

1) ОДУ (обыкновенные ДУ)
2) в частных производных

По каждой из тем будет работа.

По двум будет отчёт.

Задача интерполяции.

① Постановка задачи.

Есть функция набор точек (x_i, y_i) $i=\overline{0,n}$

$x_i \in [a, b]$

Часто $x_0 = a$, (полагаем, что) $x_n = b$.

Задача: подобрать ф-цию $g(x)$ в каждую точке должна проходить с соот-щую точку x_i

$$g(x) \to g(x_i) = y_i \quad i = \overline{0,n}$$

Представим $g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot \varphi_i(x)$

в виде линейной комбинации

где набор функций не больше n.

Функция $g(x)$ наз-ся интерполентой.

Где $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ — базис (базисные функции)

Должны быть линейно независимы (по крайней мере в этих точках), т.е.

$$\Delta(\varphi(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & & \varphi_n(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Неизвестными являются α_i. Базис выбираем сами.

Если подставим условие для $g(x)$.

Тогда $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \Phi(x_i) = y_i \quad i=\overline{0,n}$

Отсюда получим α_i

В качестве базиса используются например

1) полиномы n-ой степени

а) $\Phi_i(x) = x^i \qquad i=\overline{0,n}$

б) $\Phi_i(x) = \sin(\omega_i x)$ или $\Phi_i(x) = \cos(\omega_i x)$

в) $\Phi_i(x) = e^{a_i x}\cos(\omega_i x)$ или $\Phi_i(x) = e^{a_i x}\sin(\omega_i x)$

квазиполином (когда не затухающие колебания)

Иногда а) недостаточно. Сложно решить алгебраическую систему.

В зависимости от задач пытаемся найти другие $\Phi(x)$.

В качестве интерполяционных многочленов используют полиномы Лагранжа.

Интерполяция полиномами Лагранжа.

Под полиномом Лагранжа понимается

$$l_k^{(n)}(x) = \begin{cases} 1, & x_i = x_k \\ 0, & x_i \neq x_k \end{cases}$$

(символ Кронекера) Вводу [illegible] точки

n – порядок полинома

Нужно $l_k^{(n)}(x)$ представить в виде равна 0 во всех узловых точках не равных x_k.

$$l_k^{(n)}(x_i) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

При подстановки x_k как раз получаем 1. Если другие точки, то 0 получим.

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_i^{(n)}(x)$$

Воспользуемся тем, что в точке k: $y_k = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i l_i^{(n)}(x_k) = \alpha_k$

Но согласно свойствам полинома Лагранжа получаем что всё занулится, кроме точки k.

Строим интерполянту $g(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i^{(n)} x$

$$\boxed{l_k^{(n)}(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq k}^{n} (x-x_i)}{\prod_{i=0, i \neq k}^{n} (x_k - x_i)}}$$

Если посмотрим на многочлен, то введем след. обозначения

$$w(x) = \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$$

$$(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n) = \omega_n'(x_k)$$

$$(x - x_0)(x - x_1) \to \omega'(x_1) = x_1 - x_0$$

Методом мат. индукции можно доказать, что выше.

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}$$

$$\boxed{g(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)}}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона.

Интерполяция полиномом Ньютона.

Разделённая разность $1^{\text{го}}$ порядка.

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(говорим о дискретном значении функции)

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

x_i, x_j - не обязательно соседние точки!

$$y_i = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}$$

Разделённая разность $2^{\text{го}}$ порядка

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_0, x_1) - f(x_1, x_2)}{x_0 - x_2}$$

Точки	0ого порядка	1ого порядка	2ого порядка	…	(n-1)ого порядка	nого порядка
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$		$f(x_0, \ldots x_{n-1})$	$f(x_0, \ldots x_n)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$		$f(x_1, \ldots x_n)$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2, x_3)$				
x_3, …	$f(x_3)$					
…,						
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f(x_{n-1}, x_n)$				
x_n	$f(x_n)$					
Кол-во	$n+1$	n	$n-1$		2	1

$$f(x_0, x_1, \ldots \underline{x_j', x_{j+1}' \ldots} \; x_{j+k}') = \frac{f(x_0, x_1, \ldots x_j') - f(x_j', x_{j+1}' \ldots x_{j+k}')}{x_0 - x_{j+k}'}$$

хотели разорвать
по середине

Если $f(x)$ полином, т.е. $f(x) = P(x)$

$$P(x, x_0) = \frac{P(x) - P(x_0)}{x - x_0}$$

$$P(x) = P(x_0) + P(x, x_0)(x - x_0)$$

Если добавим точки, то

$$P(x, \text{[illegible]}) = P(x_i) + P(x, x_i)(x - x_i)$$

$$f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = P(x, x_0)$$ где x — некое число

некое число

разд. разность

$$f(x) = f(x_0) + f(x, x_0)(x - x_0)$$

$$P(x, x_0, x_1) = \frac{P(x, x_0) - P(x_0, x_1)}{x - x_1}$$

раздел. разность II порядка

$$P(x, x_0) = P(x_0, x_1) + (x - x_1) P(x, x_0, x_1)$$

— — — — — — — — —

$$P(x, x_0, \dots, x_{n-1}) = P(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x - x_n) P(x, x_0, \dots, x_n)$$

Выполним обратную подстановку

Слева непрерывная ф-ция, а справа некий многочлен ← хотим так сделать.

В результате получаем:

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)\Big(P(x_0, x_1) + (x - x_1) \cdot$$
$$\cdot \Big(P(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2) \cdot \Big(\dots \Big(\dots \Big(\dots$$
$$\dots (x - x_{n-1}) P(x_0, \dots x_n) + 0 \Big)\Big)\Big) \dots \Big)$$

Если скобки раскроем получаем полином n-го порядка

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0) P(x_0, x_1) +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) P(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots$$
$$\cdot (x - x_{n-1}) P(x_0, \dots x_n)$$ $\Leftarrow$ если раскроем скобки получим ряд Тейлора

интерполяционный многочлен Ньютона

Погрешность (ошибка).

Рекурсия – использование предыдущих данных для выведения следующих.

Что лучше: взять больше или меньше точек?

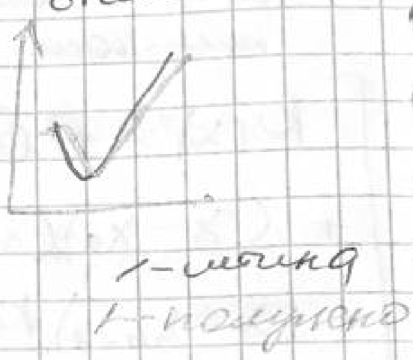
Нас интересует не значение в точках, а что между ними как дальше идёт процесс.

Погрешность полиномиальной интерполяции.

Выбирают критерий, в max-руют или минимизируют.

$$F(\bar{p}, n) \to \min / \max$$

Отклонение точной ф-ции было мало от полученной.



$$f(x) - P(x) = R_n(x)$$

теория   получили

$$\varphi_n(x) = f(x) - P_n(x) - A \cdot \omega(x)$$

$A = const$

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Выражаем $A \Rightarrow$ выбираем A так что

Зафиксируем точку x_k так чтобы $\varphi(x_k) = 0$

$$A = \frac{f(x_k) - P_n(x_k)}{\omega(x_k)}$$

x_k — не является интерполяционной, т.е. не $\notin$ точкам от x_0 до x_n.

$$A = \frac{f^{(n+1)}(x_k)}{(n+1)!} \frac{(x - x_k)^{n+1}}{\omega(x_k)}$$

Оценим и возьмём по модулю

P_n – разложение функции оно до n-го члена + последний член в форме Лагранжа, Пиано и т.д.

$$A = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_k)}{(n+1)!} \cdot \frac{(x-x_k)^{n+1}}{\omega(x_k)} \right| \le \left| \frac{f^{(n+1)}(x_k)}{(n+1)!} \right|$$

Тогда $$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} |\omega(x)|$$

в некой точке ξ_φ

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

т.к. $x \in [a,b]$ Оценим max отклонение всех x_i от значений x из отрезка $[a,b]$

Назовём $$h = \max_{\substack{x_i \\ x \in [a,b]}} |x - x_i|$$

Тогда $$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{f^{(n+1)}(\xi_\varphi)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

$f^{(n+1)}(\xi_\varphi)$ – максимальное значение производной из всех на отрезке $[a,b]$

$$f^{(n+1)}(\xi_\varphi) = M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Оценка зависит от кол-во точек,
не зависит от x

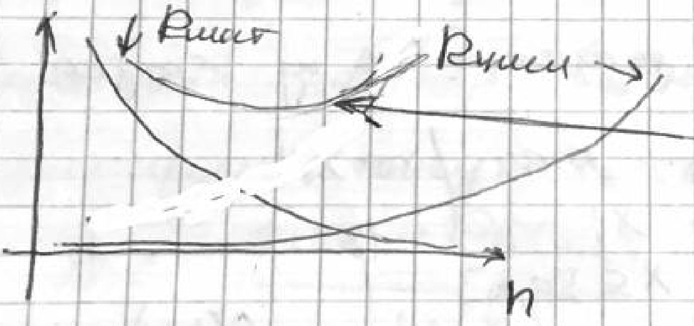
$$\lim_{n\to\infty} \max |f(x) - P_n(x)|_{x\in[a,b]} = 0$$

Добавляя точки, улучшаем результат.
Долгое время так считалось.

Есть ошибки округления, сложения, произведения в компьютерной точности
И чем больше точек, тем больше численная ошибка

Ошибки складываются из матем-кой и численной

$$R_n(x) = R^n_{матем} + R^n_{числ}.$$



Если сложем то будет min.

Rчисл - растет медленее, чем спадает Rматем.

∃ ещё одна проблема с увеличением интерполяции полинома.

Не всегда ряд при $n \to \infty$ сходится

Замечание

$\exists$ ряд функций $f(x)$, для которых

$\lim P_n(x)$ не сходится к $f(x)$

при $n \to \infty$.

Примеры:

1) Когда $f(x)$ - целая функция

Не для любой сетки сходимость справедлива

Теорема Фабера: Для $\forall$ сетки узлов точек. $\omega(x) =$

$= \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ найдется функция $f(x)$

такая что для неё не $\exists$ сходимости

полинома равномерной $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$.

Теорема Марценкевича: Для $\forall$ функции $f(x)$

где $x \in [a, b]$ $\exists$ последовательность сеток

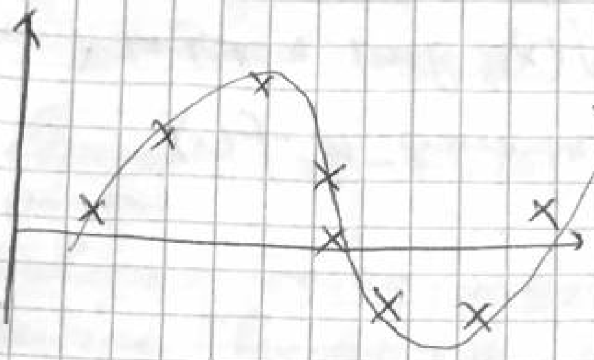
$\omega_1(x), \omega_2(x), ..., \omega_N(x)$ такая что имеет

место равномерная сходимость $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$

Точность интерполяции зависит не

только от того сколько точек брали,

а так же какие (их качество)



Ф-ция $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

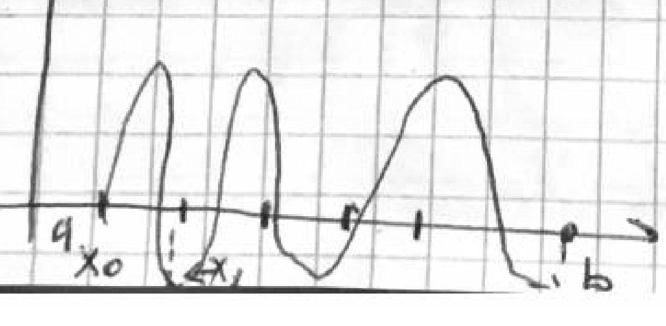
Если возьмём равномерную сетку, то мы её интерполируем.

Нужно брать неравномерную.

Такие функции вообще сложно интерполировать одной функцией. Нужно несколько.

Сплайн - интерполяция.

Сплайн — кусочно-непрерывная интерполяция где на границе сшивается



Разбиваем ф-цию на отрезки, в будем интерполировать
На x_0, x_1 – кубический сплайн, на
(x_1, x_2) – другой и т.д. и т.п.
Делают так чтобы на границе не было излома.

Кубический сплайн.

Опр. Сплайном порядка p на сетке $\overline{\omega}_n$ (набор точек)
наз-ся кривая порядка p, имеющая
непрерывные производные на отрезке $[a, b]$
до $(p-1)$ порядка включительно.

Преимущество: относительно устойчива при увеличивании сетки.

Опр. Кубическим сплайном $(p=3)$ $S(x)$ наз-ся функция удовлетворяющая след. условиям:

1) $S(x)$ – кусочно-полиномиальна на сетке $\overline{\omega}_n$ (т.е. на каждой сетке имеет свои параметры)

2) на каждом интервале (частичном) сетки $[x_{i-1}, x_i]$ $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) +$
$+ c_i \cdot \frac{1}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{3!}(x - x_i)^3$, где

$x_{i-1} \leq x \leq x_i$

(Разложение в ряд Тейлора в окрестности точки x_i на малом интервале – можно так сказать)

3) 1-я и 2-я производные $S_i(x)$ непрерывны на краях отрезка $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$:

$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0)$

на всём отрезке $[a, b]$ $S'(x-0) = S'(x+0)$,

$S''(x-0) = S''(x+0)$ (Это обеспечивает плавный переход от одной ф-ции к другой)

4) $\underset{\substack{| \\ \text{значение} \\ f(x_i)}}{S(x_i)} = y_i$ (Значения в соседних точках интерполяции равно значению ф-ции в этой точке)

5) $S''(\underset{\downarrow a}{x_0}) = S''(\underset{\downarrow b}{x_n}) = 0$ (на концах)

<u>Построение сплайнов $S(x)$</u>

1) подставим x_i в $S(x)$, то $S(x_i) = a_i = y_i$

2) $$S_i'(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2!}(x - x_i)^2$$

$$S_i''(x) = c_i + d_i(x - x_i)$$

Используем 5), для S_n: $c_n = 0$

для S_0: $c_1 + d_1 h_1 = 0$

$$S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$$

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \frac{c_{i+1}(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \frac{d_{i+1}}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3$$

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$$

$$b_i = b_{i+1} + c_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \frac{d_i}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

$$S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$$

$$c_i = c_{i+1} + d_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$$

Совмещая их получаем систему уравнений для коэффициентов.

Пусть $h_i = x_i - x_{i-1}$

$$\begin{cases} h_i b_i - \frac{c_i}{2} h_i^2 + \frac{d_i}{6} h_i^3 = y_i - y_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ h_i d_i = c_i - c_{i-1} & i = \overline{1,n} \\ c_0 = 0, \ c_k = 0 \end{cases}$$

Эту систему преобразовали и выразили через коэф-ты одного типа, а именно для c.

$$
\begin{cases}
c_0 = 0 \\
c_{i-1} h_1 + 2(h_i + h_{i+1}) c_i + c_{i+1} h_{i+1} = \\
= 6 \left(\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \dfrac{y_i - y_{i+1}}{h_i} \right) \\
\qquad i = \overline{1, (n-1)} \\
c_n = 0
\end{cases}
$$

решается методом прогонки

$$
A = \begin{vmatrix}
1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\
h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{vmatrix}
$$

Если оценим сходимость сплайн-интерполяции, то

$$
|f(x) - S^n(x)| \leq C_0 M_4 h^4
$$

сплайн построенный на сетке n-го порядка

где $h = \max\limits_i |h_i - h_{i-1}|$ шаг сетки.

$$
M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|
$$

C_0 – константа

При $h \to 0$ разность зависит от сетки

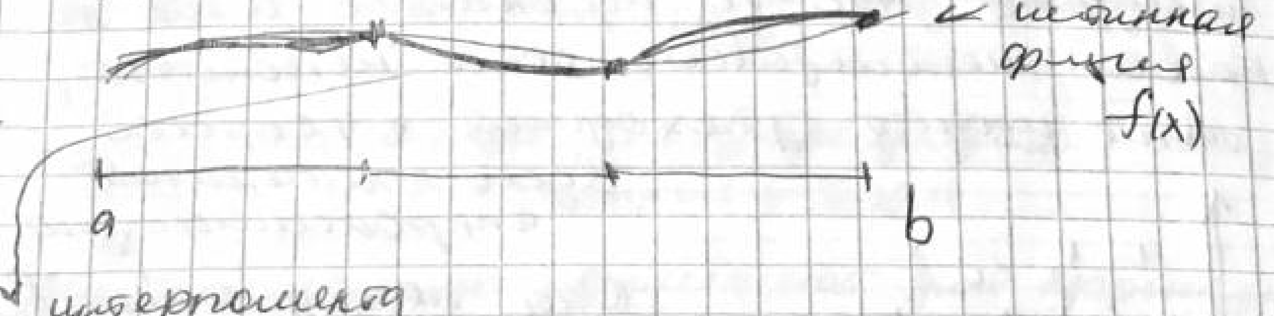
при $n \to \infty$ разность стремится к 0 как четвёртый порядок.

Эти интерполяции говорят о приближенном вычислении.

Ошибка

$$\|f(x) - \dot{S}(x)\| \le \|f(x) - S(x)\| \le C_0 M_4 h^4$$

Разделили на конечное число интервалов



$$M_4 = \sup_{x \in [a,b]} \|f^{(4)}(x)\|$$

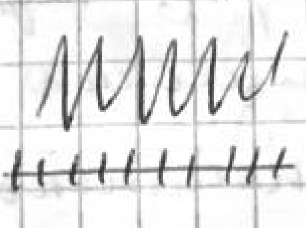
$$\|f'(x) - S'(x)\| \le C_1 M_4 h^3$$

$$\|f''(x) - S''(x)\| \le C_2 M_4 h^2$$

h – длина интервала, на к мы разбиваем

т.е. чем меньше h, тем более меньше ошибка.

Если функция гладкая, то можно h брать большим. Если она сильно осциллирующая, то уже большом h будет большая ошибка, нужно h брать малым



Задача аппроксимации

Отличие от задачи интерполяции!

Когда ф-ция сильно разбросана, если мы говорим что кривая проходит через все точки, то можем получить что-то непонятное и как это потом использовать тоже непонятно, также может расходиться с теорией.

Здесь применяют аппроксимацию.

Она находит кривую, к может не проходить через точки, но быть к ним близкими.

Ошибку оценивают по отклонению от экспериментальных точек от полученной кривой

$\varphi_i(x) \quad i = \overline{1,n}$

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x) = g(x)$$

(x_i, y_i) – набор точек

$y_i = f(x_i)$

$$\| \sum_i (y_i - C_i \varphi_i(x_i)) \|^2 \to 0$$

C_i – коэффы, к нужно подбирать, чтобы этот функционал стремился к 0.

Это метод наименьших квадратов.

Есть еще один метод: $\exists$ некий функционал зависящий от набора точек и ф-ции $g(x)$. $F(x_i, y_i, g(x)) \to min$ он принимает минимальное значение.

$$C_i = (f(x), \varphi_i(x))_{x \in [a,b]} = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$$

отрезок, на в производится аппроксимация

Аппроксимацию применяют для прогнозирования, т.е. предсказания процесса при $t \to +\infty$ или $t > T$.

Условие на ф-цию $\varphi_i(x)$:

① $(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ $i, j = \overline{1, n}$

Н-р, в разложении в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \{1, \sin x\omega, \cos x\omega, \ldots, \sin nx\omega, \cos nx\omega\}$$

$$\omega = \frac{2\pi n}{b-a}$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{b-a}x + b_n \sin\frac{2\pi n x}{b-a}$$

$$\varphi_n(x) = e^{i\omega n x}$$

② $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ – линейно независимы

два вида

$W(x) = 0$ $\quad$ $*^{0}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

$$F = \| \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - g(x_i)) \|^2 =$$

При каких условиях наступает минимизация? * интегрально пренебрежимо

$$= \| f(x) - g(x) \|^2 = (f(x) - g(x))(f(x) - g(x)) =$$

$$= \| f(x) \|^2 - 2 (f(x), g(x)) + \| g(x) \|^2 \to \min$$

Если говорим о матричном подходе то возникает два слагаемых (т.к. матрица не коммутативна, т.е. будет два слагаемых, а не 2 перед произведением)

Будет меняться II и III слагаемые у $F(x)$

т.к. $f(x), g(x) > 0$

$F(x)$ будет стремится к 0 когда $(f(x), g(x))$ - будет max.

$$\| (f(x), g(x)) \| = \| (f, \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)) \| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \cdot$$

$$\cdot \| (f(x); \varphi_i(x)) \| = \sum_{i=1}^{n} |c_i| |f_i|$$

φ_i - ортонормированна $\Rightarrow$ не превосходит единицу

значение функции в точке i

$$\| g(x) \|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x), \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \right) \leq \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

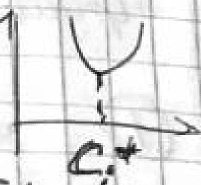
$$F \le \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}|c_i||f_i| + \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

Если + норму ф-ции f, то оно будет больше чем II и III слагаемое

Относительно коэф-тов C – это парабола

$\forall$. Среди всех точек найдется такая комбинация которая во всех точках даст минимальное значение

т.е. $\exists\, c_i^*$: $F(c_i^*) \to \min$



Чтобы было максимальное сокращение нужно чтобы $c_i^* = f_i$, тогда $F \le \|f\|^2 - \sum |f_i|^2$

Теорема 1

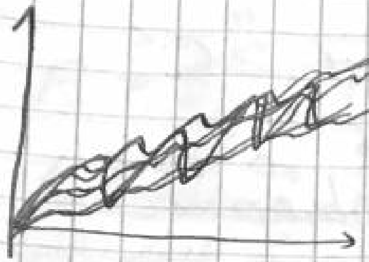
О существовании единственности апп-ции.

Для $\forall$ набора ф-ций $\varphi_i(x)$ удовлетворяющих условию нормировки и для $\forall$ ф-ции $f(x)$ - кусочно-непрерывной на отрезке $[a,b]$ $\exists$ разложение по $\{\varphi_i(x)\}$ которое является единственным

Теорема 2

Если система $\varphi_i(x)$ полная ортонормированная система, то оптимальным ~~значением~~ разложением $f(x)$ такое что $c_i = f(x_i)$

значение ф-ции в точке x_i.



Есть набора точек
Что выбрать?

Выбираем усреднённое значение в точке x_i.

<u>Ортогональные в L^2 системы полиномы</u>

L^2 - пространство дважды непрерывно дифф-мых функций (линейное пространство)

① Многочлены Якоби: $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

n - степень, α, β - порядок многочленов

$\forall$ они при $x \in [-1, 1]$. Они ортогональны с весом

$\rightarrow \rho(x) = (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} \qquad \alpha, \beta > -1$

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{\alpha+n} \cdot (1+x)^{\beta+n} \right]$$ - формула Родрига.

$n = \overline{0, \infty}$

② Многочлен Лежандра: $P_n(x)$.

$\alpha = 0, \beta = 0, \rho = 1 \leftarrow$ вес

Частный случай ①.

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n$$

③ Многочлен Чебышева.

а) Многочлен $1^{\text{го}}$ рода: $T_n(x)$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad x \in [-1, 1]$$

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$$

б) Многочлен $2^{\text{го}}$ рода: $U_n(x)$

$$U_n(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1}$$

а) и б) ортогональны между собой с весом $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$

Опр

Функция $\varphi_i(x)$ и $\varphi_j(x)$ ортогональны с весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если

$$(\varphi_i(x), \varphi_j(x)) = \int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_j(x)\, \rho(x)\, dx = \delta_{ij}$$

4 Многочлены Лагера: $L_n^{(\alpha)}(x)$

n - степень, α - порядок многочлена (некий параметр обеспечивающий за многообразие в некой функциональном пространстве)

$0 \leq x < +\infty$, $\alpha > -1$.

Они ортогональны с весом $\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)$$

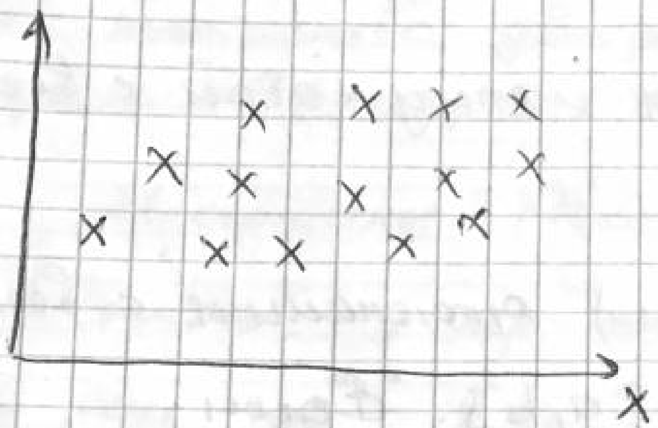
5 Многочлен Эрмита: $H_n(x)$

$-\infty < x < +\infty$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Метод наименьших квадратов. (МНК) (LSM)

Проводится эксперимент. Меряем величину от x.



Получаем облако измерений

Набор точек (x_i, y_i) $i = \overline{1,n}$

А теория говорит что там линейная зависимость

Какую выбрать?

Сумма квадратов отклонения от прямой должна быть min.

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + x\hat{\beta} \text{ — оценённое значение}$$

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \text{ где } \varepsilon_i \text{ — шумы}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2 \to \min$$

это функционал $F(\alpha, \beta)$ — не зависит от x_i и y_i — потому что это данные значения

Должны найти! $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial \beta} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i) = 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \hat{\alpha}\sum_{i=1}^{n} x_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

среднее

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\overline{y} - \hat{\alpha} - \hat{\beta}\,\overline{x} = 0$$

$$\overline{xy} - \hat{\alpha}\,\overline{x} - \hat{\beta}\,\overline{x^2} = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \qquad \hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\,\overline{x}$$

Проблема!

① Если зависимость от параметров $\hat{y} = \alpha \cdot e^{-\beta x}$ здесь надо раскладывать

② Не устойчивы. Поэтому пишем $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x$. Если сделать вместо 10 например 12 измерений, то изменятся $\overline{x}, \overline{y}, \overline{xy}, \overline{x^2} \Rightarrow$ изменятся α и β

① y и x должны иметь нормальное распределение

② ε_i и ε_j должны быть статистически независимыми $\operatorname{corr}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

③ ε_i не должны зависеть от наблюдений (минимальная зависимость)

$y = ax + b$

Иногда прослеживается кривая.

Есть линейное пространство в в задано скалярное произведение (f, g)

Считаем что $(f, g) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i f_i g_i$

k - размерность пространства

ρ_i - вес $\quad f_i, g_i$ - компоненты f и g соо-нно

$\sqrt{\|f\|} = (f, f)$

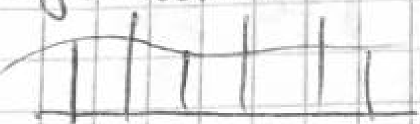
Пусть $\exists$ система ф-ций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}$ - линейно независимы

Мы не ставим условий ортогональности, достаточно линейности.

Мн-во φ_i – образует линейную оболочку данного пространства.

$$L(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x)$$

Нужно выбрать такую линей. оболочку $L(x)$, чтобы подходило ближе к известным точкам $(x_i, y_i = f(x_i))$



Подбирается линейная оболочка $F(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x)$ и является аппроксимирующей ф-цией для данной

Нужно найти такое $\overline{c_i}$ $\quad F(x) = \sum_{i=1}^{k} \overline{c_i}\, \varphi_i(x)$

такое что $\Phi(\overline{c_i},\ i = \overline{1,k}) \to \min$

(доставляет min)

По сути получаем ф-цию с параметром, меняя их мы находим когда доставляется min (+ функционал

Должны решить $\dfrac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$ ← условие минимизации и отсюда найти набор $\{\overline{C_i}\}$, $i = \overline{1,n}$

то есть $\| f(x) - F(x) \|^2 \to \min$

↑ аппроксимирующая

Общий метод наименьших квадратов.

Там наименьшее ~~также~~, но условие

$G(C_1, \ldots, C_k) \to \min$ (под G понимаем $\forall$ условие, не обязательно чтобы был $\min$, можно и $\max$, и const – любое)

$$\left(f - \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i\right)^2 \to \min$$

$$-2\left(f - \sum_{i=1}^{k} c_i(\varphi_i)\right)\varphi_i = 0 \quad i = \overline{1,k},\ x \in X$$

т.е. получаем линейную систему отн-но C_i

Она должна иметь нетривиальное единств. решение. Значения мы $\forall$ в точке, т.е.

$$-2\left(f_i - \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i(x_i)\right)\varphi_i(x_i) = 0$$

$$i = \overline{1,k},\ x \in X$$

все известные значения

Обработка экспериментальных кривых методом наименьших квадратов

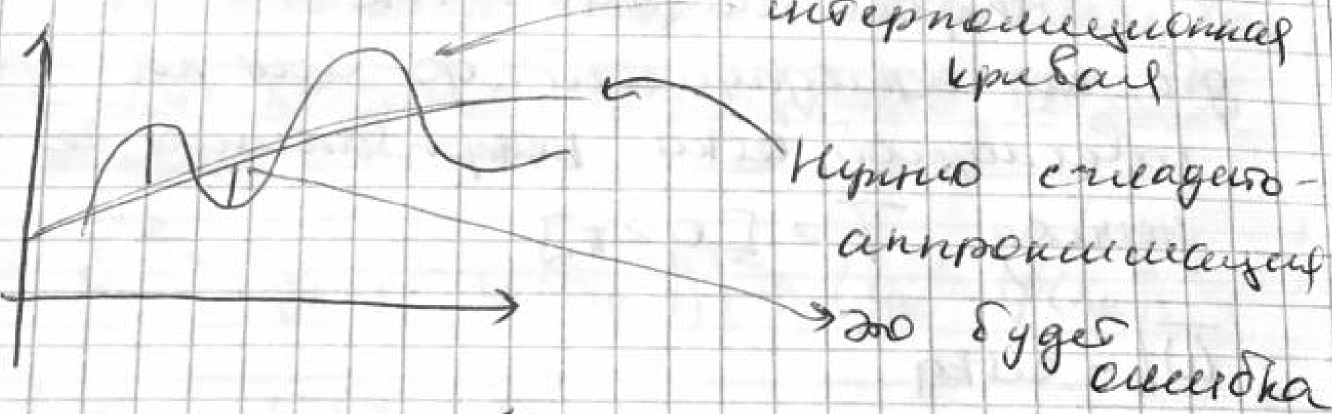
Есть набор точек $(x_i, y_i = f(x_i))$ и каждая точка измерена с точностью ε_i $(i = \overline{1,n})$

Точность измерения отдельной точки

$$\rho_i = \frac{1}{\varepsilon_i^2}$$

Тогда наш функционал будет равен

$$\sum_{i=1}^{M} \rho_i \left(f_i - F(x_i) \right)^2 \to \min$$



где $F(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi(x_i)$

Для сглаживания функции:

1) Выбирают порядок N и находят систему коэфф-тов $\overline{c_i}^N$ в пространстве размерности N (Если N поменять, то и кол-во $\overline{c_i}$ изменится)

2) Вычисляем среднее квадратичное отклонение

$$\delta_N^2 = \inf \|f - F(x)\|^2$$

Если кривая $F(x)$ и в точке x_i она будет отличаться от $f(x_i)$

$$\Rightarrow \delta_N^2 \to \sum_{i=1}^{N} (y_i - F(x_i))^2 \le \varepsilon$$

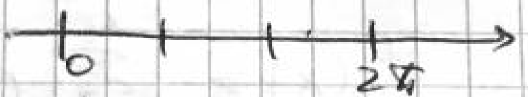
как бы равно тому

ε - вектор ошибки измерения

Пример.

Аппроксимация методом МНК для пи периодической ф-ции на равномерной сетке покрывающей её период $T = [0, 2\pi]$.

$\overline{\omega}_h$ - сетка



Каждая точка $x_p = \frac{2\pi}{n} p \qquad p = \overline{0, n-1}$

В качестве ф-ции выбираем $\varphi_k(x) = e^{ikx}$ — они ортогональны на отрезке $(0, 2\pi)$

$$(\varphi_n(x), \varphi_m(x)) = \delta_{nm} \cdot n$$

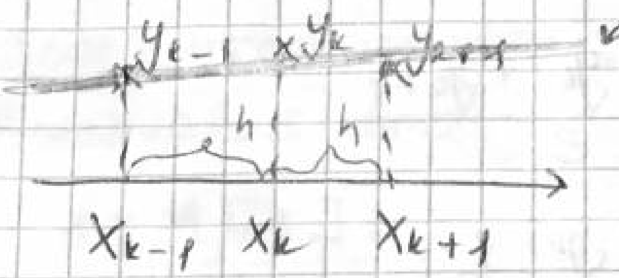
Тогда $(f, \varphi_k) = C_k = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} f(x_p) e^{ip\frac{2\pi}{n}k}$

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{ikx}$$

Пример: Сглаживание функции (с помощью МНК)

К соседние точки

$x_k,\ x_{k-1},\ x_{k+1}$



Пытаемся провести прямую, чтобы отклонение было min

$$\varphi(x) = C_0 + C_1(x - x_k) \qquad x \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$$

Делаем построение функционала по трём точкам.

$$\delta^2 = (y_{k-1} - \varphi(x_{k-1}))^2 + (y_k - \varphi(x_k))^2 + (y_{k+1} - \varphi(x_{k+1}))^2$$

Должно быть $\delta^2 \to min$

$\varphi(x)$ подставляем в δ^2

и вычисляем $\dfrac{\partial \delta^2}{\partial C_0}$ и $\dfrac{\partial \delta^2}{\partial C_1}$.

$$\begin{cases} 2(y_{k-1} - C_0 - C_1(x_{k-1} - x_k)) + 2(y_k - C_0 - C_1(x_k - x_k)) + 2(y_{k+1} - C_0 - C_1(x_{k+1} - x_k)) = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ 2\left(y_{k-1} - C_0 - C_1(x_{k-1} - x_k)\right) x_{k-1} + 2\left(y_k - C_0 - C_1(x_k - x_k)\right) x_k + 2(y_{k+1}) - C_0 - C_1(x_{k+1} - x_k)) \cdot x_{k+1} = 0 \right.$$

$$x_{k-1} - x_k = -h$$

$$x_k - x_{k+1} = h$$

Тогда $C_0 = \dfrac{y_{k-1} + y_k + y_{k+1}}{3}$

$$C_1 = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

Получаем сглаживающий фильтр.

Ф-ция сглаживает значение по трём точках.

(н-р, убирают шумы)

Решение нелинейных уравнений

Н-р, $f(x)=0$ где x - произвольная функция

Шанс решить аналитически ур-ния

$$e^{ax} + \sin bx = 0$$

Под итерацией понимают набор действий выполненных в течение какого-то времени.

Цель итер. процесса: он должен сходиться к некоторой точке.

$$x = A[x]$$

Нужно задать начальную точку $x = x_0$

Строим $x_1 = A[x_0]$, потом $x_2 = A[x_1]$

если итерационный процесс сходится, то

$\lim\limits_{n \to \infty} A[x_n] = x^*$ — неподвижная точка, такая что $A[x_*] = x_*$

Введем понятие нормы $\rho = \| A[x_n] - A[x_{n-1}] \| \leq$

$\leq \alpha \rho(x_n, x_{n-1})$ $\quad 0 < \alpha < 1$

Расстояние между образами должно быть меньше чем расстояние между прообразами

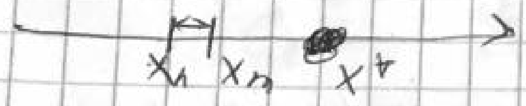
Послед-ть точек x_n удовлетворяет критерию Коши: $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ — образует фундаментальную пос-ть.

В итер-ном процессе $\{x_n\}$ должна сходиться.

Критерий Коши

Если $\{x_n\}$ — фундаментальна, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N(\varepsilon)$ такое что $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Чем ближе x_m и x_m к неподвижной точке x^*, тем меньше расстояние между ними.



Если расстояние между x_n и x_m меньше ε, то и расстояние x^* и x_n меньше чем ε => мы близко к x^*.

Должны оценивать насколько мы далеки до решения

$$\rho(x_n, x^*) \leq \rho(x_n, x_{n-1}) < \varepsilon$$

Тогда мы можем остановиться и сказать что мы нашли решение ур-ния x^* с определ. точностью ε.

$f(x)=0$

Метод простой итерации.

$x = f(x) + x$ — это ф-ла итер. процесса

задать x_0

Но эта ф-ла для всех функц не проходит, т.к.

① она должна быть сжимающей

② Введём $0 < \tau < 1$ — сжимающий коэф-т

получим $x = x + \tau f(x)$.

③ Должны оптимально выбрать точку x_0. Но $f(x)$ может иметь отклонения и можем попасть в функцию, что сжатие не будет и процесс итерации зацикливается.

④ Или получим неправильное решение

поэтому сначала строят график и ищут интервал на в $f(x)$ меняет знак

Далее интервал оцениваем и потом выбираем точку.

Если τ будет мало, то будет процесс медленнее

Если у нас несколько нулей и задача найти нули все.

1) Нашли x_1^* дальше

2) $\frac{f(x)}{x - x_1^*} = g(x)$

3) $\cancel{g(x)} = 0$

Находим второй 0.

4) Ищем этот $\frac{f(x)}{(x-x_1^*)(x-x_2^*)}$

$f(x) = 0$ при $x = x_0$

$f(x) = (x - x_0)\varphi(x)$

Как выполнеем! 1) определяем область $x \in [a, b]$

2) Строим график $y = f(x) \to \{x_1^*, x_2^* \ldots\}$

3) будем хотим найти точно x_1^*, тогда выбираем $x_0 : |x_0 - x_1^*| < \varepsilon$

4) Выбираем $0 < \tau < 1$.

5) Задаём отдельную функцию

$\varphi(x) = x + \tau f(x)$

6) $x_1 = \varphi(x_0)$ но і такой, что

while $\|x_0 - x_1\| > \varepsilon$

И создаём цикл по i

$$\left[\begin{array}{l} x_0 = x_1 \\ x_1 = \varphi(x_0) \end{array}\right.$$

и выведем,

τ - должно быть таким, чтобы пос-ть сходилась

$$x_k = x_{k-1} + \tau f(x_{k-1})$$

Опр. Говорят, что посл-ть $x_k = \varphi(x_{k-1})$ имеет сходимость порядка p, если

$$\| x_{k+1} - x^* \| \leq O((x_k - x^*)^p)$$

p - рациональное положит. число

Сходимость метода простой итерации.

Когда метод запускается пока $\|x_k - x_{k-1}\| < \varepsilon$

Если выбрали не правильно τ или x^* можем получить ∞ цикл, т.е. расстояние между x_{k-1} и x_k будет не уменьшаться, а увеличиваться.

Нужно оптимально подобрать параметры.

Есть для этого методы оптимизации.

Численные методы - н-р, машинные методы.

Теорема о принципе сжимающих отображений

Опр. Пусть есть пос-ть $x_k = \varphi(x_{k-1})$ $k = \overline{1, \infty}$

и есть $\rho(x, x)$ норма как необр. величина.

Отобр. называется сжимающим если

$$\forall k \quad \rho(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha \rho(x_k, x_{k-1})$$

или ρ

расстояние между преобразами меньше чем между образами

Тогда φ - оператор сжимающийся

Пусть $\varphi(x)$ осуществляет сжатие полного метрического пространства в себя. R - метрическое про-во

$\varphi(x)$ - сжимающий оператор, $x \in R$

Тогда $\exists!$ неподвижная точка $x^* \in R$

такая что $x^* = \varphi(x^*)$ и выполняются условия:

1) $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x^*$

Д-во

2) Докажем, что посл-ть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в нашем случае является фундаментальной в $\mathbb{R}$

=> удовлетворяет критерию Коши,

Пусть зафиксированы m, n – номера пос-ти

$\forall$ расстояние $\rho(x_n, x_m) = \rho(\varphi(x_{n-1}),$

$\varphi(x_{m-1})) \leq \alpha \rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq$ расстояние ... между образами

т.к. φ – сжим. оператор

Пусть у нас $n > m$

повторим процедуру отображений m раз

$... \leq \alpha^m \rho(x_{n-m}, x_0) \leq \alpha^m (\rho(x_0, x_1) +$

Разобьём ρ, применим правило треугольника

$+ \rho(x_1, x_{n-m})) \leq$ $\rho(x_0, x_{n-m}) \leq$ $\leq \rho(x_0, x_1) + \alpha \rho(x_0, x_1) +$

К этому соотношению применим несколько раз правило оценки

$+ \alpha^2 \rho(x_0, x_1) + ... + \alpha^{n-m-1} \rho(x_0, x_1) \leq$

$\leq \rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + ... + \alpha^{n-m+1}) \leq$

Мы можем продолжить эту прогрессию до ∞

$\leq \rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + ...) = \dfrac{\rho(x_0, x_1)}{1-\alpha}$

Оценка сверху

$\leq \alpha^m \dfrac{\rho(x_0, x_1)}{\alpha - 1}$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha^m}{1-\alpha} \rho(x_0, x_1) = 0$$

т.к. $\alpha < 1$.

Получим, что расстояние между прообразами стремится и оно меньше расстояния между образами, в такие стремится.

Послед-ть фундаментальная => она сходится => $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

2) Докажем, что $x^* = \varphi(x^*)$ (*) т.е. она неподвижна и !

Пусть $\exists$ $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$, в являются неподвижн. точками оператора (*), тогда

$$0 \le \rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = \rho(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{\bar{x}})) \le \alpha\rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$$

по определ. по определ. сжим. оператора

Но т.к. $0 < \alpha < 1$, то получается что $\rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$ меньше себя же умноженной на число меньше 1 => это возможно тогда, когда $\rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$ =>

$\bar{x} = \bar{\bar{x}}$ => неподвиж. точка оператора единственна

3) $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) =$

в силу непрерывности отображения можем внести lim под оператор

$= \varphi(\lim_{n\to\infty}(x_{n-1})) = \varphi(x^*)$

Доказали, что она неподвижна.

Помогает делать допущения для задач, в мн-ве $\mathbb{R}$ в реальности. (помогает искать метод послед. прибл.)

Теорема

Пусть $G \in R$ - метрическое пр-во и $\varphi(x)$ - сжимающее отображение построенное для $\forall x \in G$

Отображение $\varphi(x): G \to R$. Тогда для существования неподвижной точки x^* для отображения $\varphi(x)$ необходимо и достаточно ($\rightleftarrows$) чтобы в области G $\exists$ шар с радиусом r, т.е. $\overline{K}(x_0, r)$ - включающее свою границу, такое что $x_0 \in G$ $r > 0$

и $\rho(x_0, \varphi(x_0)) \leq (1-\alpha) r$

Т.е. если есть посл-ть, то она находится в этом шаре.

Итерационные методы решения уравнения $f(x)=0$.

Здесь мы говорим об x, как об одномерной величине $x \in R$.

Есть посл-ть $\{x_k\}$ $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $x = x_0$ ↑ начал. точка.

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k + \tau(x_k) \cdot f(x_k)$$

а) Метод релаксации:

$\tau = const$ – не зависит от точки

Замечание. Если параметр τ не зависит от точки, то такой подход наз-ся стационарным

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} = f(x_k)$$

б) Метод Ньютона (метод касательных)

Мы находимся близко к неподвижн. точке.

Раскладываем в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0))$$

↑ оно мало (если мы близко к x_0)

$$f(x) = f(x_{зр}) + f'(x_{зр})(x - x_{зр})$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad n = \overline{0, \infty}$$

Он работает для гладких ф-ций — непрерыв. производными

Недостаток: можем построить решение так, что $f' = 0$ — тогда метод не работает. (расходится)

Нужно $f'(x_n) \neq 0$.

в) Метод секущих. (следствие метода Ньютона)

Когда производную представляем в виде разделенной разности.

$$f(x_k, x_{k-1}) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Когда при разложении $f(x_0) + (x - x_0) \cdot$
$\cdot f(x, x_0) = 0$
↑ разд. раз-ть

Аналогично выписывают

$$f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) = 0$$

получаем $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n, x_{n-1})}$

Это не подходит для медленно меняющихся ф-ций

г) Метод парабол.

Используется разложение второго порядка.

$$N(x) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f(x_n, x_{n+1}) +$$
$$+ (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n-1}) \cdot f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$$

$$N(x_{n+1}) = 0$$

и решаем квадратное ур-ние отн-но x_{n+1}. Всё зависит от параметров.

Часто используют замену $z_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)$

Тогда $f(x_n) + z_{n+1} f(x_n, x_{n-1}) + z_{n+1}(z_{n+1} + \underbrace{\cancel{x_{n+1}} x_n - x_{n-2}}_{\text{и } z_n}) \cdot$

$\cdot f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = 0$

Работаем с квад. ур-нием

д) Метод обратной интерполяции.

Есть $f(x) = 0$, то в строим обратную ф-цию

$$x = g(0) = f^{-1}(0)$$

Строим для этой ф-ции интерполяционн. разлож. в ряд и используются первые слагаемые

Строим набор точек $(x_0, x_1, .., x_N)$ находим $y_0, y_1, .., y_N$ где $y_i = f(x_i)$

Далее применяем методы интерполяции

Ф-ция $f(x)$ ставится в соот-е кривая $L(y)$

где $L(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(y)\, x_k}{(y-y_k)\, \omega'(y_k)}$

Далее находится значение x: $x = L(y)$

и далее используется что $x^* \simeq L_0$

Теорема о сходимости этих 1 методов на прямой

Введем шар $K(x_0, r) \in R$

такое что $\overline{K}(x_0, r) = \{x \in R^1, |x - x_0| \leq r\}$

$x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

Если $x = \varphi(x)$ отображение $\varphi(x)$ является непрерыв. дифф-ным и $|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1$

внутри шара для $\forall x \in \overline{K}(x_0, r)$

а сам интервал $(x_0 - r, x_0 + r)$ такое что

$|\varphi(x_0) - x_0| \leq (1-\alpha) r$ Тогда ур-ние

(*) $x = \varphi(x)$ - имеет в $\overline{K}(x_0, r)$ единственн. решение и пос-ть; построенная с помощью ур-ния (*) $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится в шаре $\overline{K}(x_0, r)$ к единств. точке x^*

Оценка погрешности метода пр. итерации

$|\varphi^{(p)}(x)| \le M_p \quad \forall x \in \overline{K}(x_0, r)$

$$|x_{k+1} - x^*| \le \frac{M_p}{p!} \left(\frac{M_p}{p!} |x_k - x^*| \right) \le$$

Если дальше будем оценивать то придём

к x_0, т.е. $\le \left(\frac{M_p}{p!} \right)^k |x_0 - x^*|$

Условие сходимости:

$$|\varphi'(x)| \le \alpha < 1$$

Для построения итер. метода должны подобрать α чтобы потом подобрать

τ. $\forall x \in \overline{K}(x_0, r)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}^{n} + \tau \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_k(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Решение систем нелинейных ур-ний.

$f_i(\vec{x}) = 0, \quad i = \overline{1,n}$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Домножим каждое ур-ние на τ - единое, или τ_i - для каждого ур-ния системы.

Тогда получим:

$$A^{k+1} \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + F(x^k) = 0$$

$\downarrow$

$A(x^k)$ - иногда оно меняется

Если A^{k+1} - единичная матрица - то это явный метод, если $A^{k+1} \neq E$ - то не явный метод.

Простые случаи.

а) метод релаксации:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + F(x^k) = 0$$

Выражаем x^{k+1}

б) метод Ньютона

Получаем разложение след. вида:

$$F(x^k) + dF(x^k) + \frac{1}{2!} d^2 F(x^k) = 0$$

~~Во~~спользуемся, что $F(x) = 0$ неподв. точка

Тогда $F'(x^k)(x^{k+1}-x^k)+F(x^k)=0$

$$x^{k+1}=-\underbrace{F'^{-1}(x^k)}_{\uparrow}F(x^k)+x^k=\Phi(x^k)$$

обратная матрица

Матрица, т.к. берем производную по всем каждой переменным

$(F')^{-1}(x^k)$ — должно быть отимающим оператором

$$\frac{d\Phi}{dx}=E-\underbrace{\left\{\frac{d}{dx}\left[(F'(x))^{-1}\right]F(x)+(F'(x))^{-1}F'(x)\right\}}_{\frac{d}{dx}\left((F'(x))^{-1}F(x)\right)}$$

производная по вектору x.

<u>Пример</u>:

$$\begin{cases} x^3y+e^yx=0 \\ x^2y^2-\sin y\cdot x^3=0 \end{cases}$$

$$F'(x)=\begin{pmatrix} 3x^2y+e^y & x^3+e^yx \\ 2xy^2-\sin y\cdot 3x^2 & 2x^2y-\cos y\cdot x^3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow F'(x)^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 2x^2y-\cos y\cdot x^3 & -2xy^2+\sin y\cdot 3x^2 \\ -x^3-e^yx & 3x^2y+e^y \end{pmatrix}^T$$

$$\Delta=(3x^2y+e^y)(2x^2y-\cos y\cdot x^3)-(x^3+e^yx)\cdot$$
$$\cdot(2xy^2-\sin y\cdot 3x^2)$$

У него достаточно не плохая сходимость.

Т более точные методы, н-р. 9) там τ оценивается на каждом шаге и её норму, если $\|\tau\| < 1$ то метод хор. раб-ет

Чтобы ряд сходился, нужно

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \|(F'(x^k))^{-1}\| \cdot \|F(x^k)\| < \varepsilon$$

если хотим получить заданную точность

Она должна $\to 0$, при $x_k \to \infty$

Пусть $M = \max\limits_k \|(F'(x_k^i))^{-1}\|$

Норма вектора – квадр. корень из суммы квадратов координат.

Структура программы

Нужно написать несколько подпрограмм.

1) Для вычисления матрицы

2) Для вычисления функции

3) Для итерации (Крутим в цикле while пока $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$

Задаётся стартовая точка x_0

x_0, ε

def $f(x)$

def $f'(x)$

На первом этапе найти x_1 и проверить $\|x_1 - x_0\|$

while $\|x_1 - x_0\| > \varepsilon$

Отсеваиваем $x_0 = x_1$

и задаём $x_1 = x_0 + B(\vec{x_0})$

Недостатки а) и б) их неустойчивость.

Процесс интегрирования.

<u>Численное</u> интегрирование.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$f(x)$ на $[a, b]$ должна быть кусочно-непрерывна.

$$I = \int_a^b f(x)\rho(x)\,dx$$

оператор интеграла — ядро или вес интеграла

Если этот интеграл не берётся, то вместо $f(x)$ должны найти интерполяц. функцию $g(x)$, в даст возможность вычислить интеграл, но тогда появляется ошибка

$$I = \int_a^b g(x)\rho(x)\,dx + R(x_{\text{зр}})$$

Интер-ция через функц Лагранжа

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} f(x_k)$$

← это многочлен а его мы умеем легко интегрировать.

Применим подстановку в интеграл!

$$I = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} f(x_k)\,\rho(x)\,dx +$$

Предполагаем, что в результате подстановки в силу линейности оператора интегрирования

$$+R_n = \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k)$$

Нужно найти C_k и определить n.

Оценим R_n

Раскладываем в ряд Тейлора

$$R_n = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(x_{\xi})}{(n+1)!}\,\omega(x)\,\rho(x)\,dx =$$

в форме Лагранжа

const

$$= C^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(x_{\xi})}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

При $n \to \infty$, то $(n+1)!$ быстрорастущая функция, т.е.

$$C_k = \int_a^b \frac{\omega(x)\,\rho(x)}{(x-x_k)\,\omega'(x_k)}\,dx$$

В зависимости от веса, степени полинома когда-ты получаются разными.

<u>Замечание.</u>

Поскольку при разложении в ряд Тейлора мы получаем функцию как

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k$$ иногда $\triangleleft$ C_k как интеграл от x^k с некоторым „довеском".

Формулы Ньютона-Котесса.

Зададим сетку, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$x_{k+1} - x_k = h$$

Обычно сетка однородная, но $\exists$ интегралы для в сетка не однородная, н-р, несобств. интегралы, интегралы с кусочной функцией.

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Выразим всё через h и x_0.

Если $x_1 - x_0 = h$, то $x_2 - x_0 = 2h$

Тогда $x_i - x_0 = ih$

Тогда $\omega(x) = h^{n+1}\prod\limits_{i=0}^{n} \frac{(x-(x_0+ih))}{h} =$

$= h^{n+1}\prod\limits_{i=0}^{n}\left(\frac{x-x_0}{h} - i\right) = h^{n+1}\prod\limits_{i=0}^{n}(q-i)$

Аналогично $\omega'(x_k) = \prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i) =$

$= \prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_0+kh-x_0-ih) = \prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(k-i)h =$

$= (-1)^{n-k} h^n k!(n-k)!$

$C_k = \int_a^b \frac{\omega(x)\rho(x)dx}{\omega'(x_k)(x-x_k)} = \int_a^b \frac{h^{n+1}\prod\limits_{i=0}^{n}(q-i)}{(-1)^{n-k}h^k k!(n-k)!\cdot h(q-k)}$

$\rho(x) = 1$

проблан время

т.к. $q = \frac{x-x_0}{h}$, тогда $dx = h\,dq$

$= \int_a^b \frac{(-1)^{n-k} h^2 \prod\limits_{i=0}^{n}(q-i)\,dq}{k!(n-k)!(q-k)}$ — формула Ньютона Котеса

Тогда $C_k = \frac{(-1)^{n-k}(b-a)}{nk!(n-k)!}\int_a^b \frac{\prod\limits_{i=0}^{k}(q-i)}{q-k}dq = K_k(b_a)$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \left(\sum_{k=0}^{n} K_k f(x_k)\right)(b-a) + R_n(f)}$$

↗ ф-ла Н-К

↑ зависит от порядка интерполяции и самой ф-ции

Замечание.

Св-ва коэффициентов Котесса.

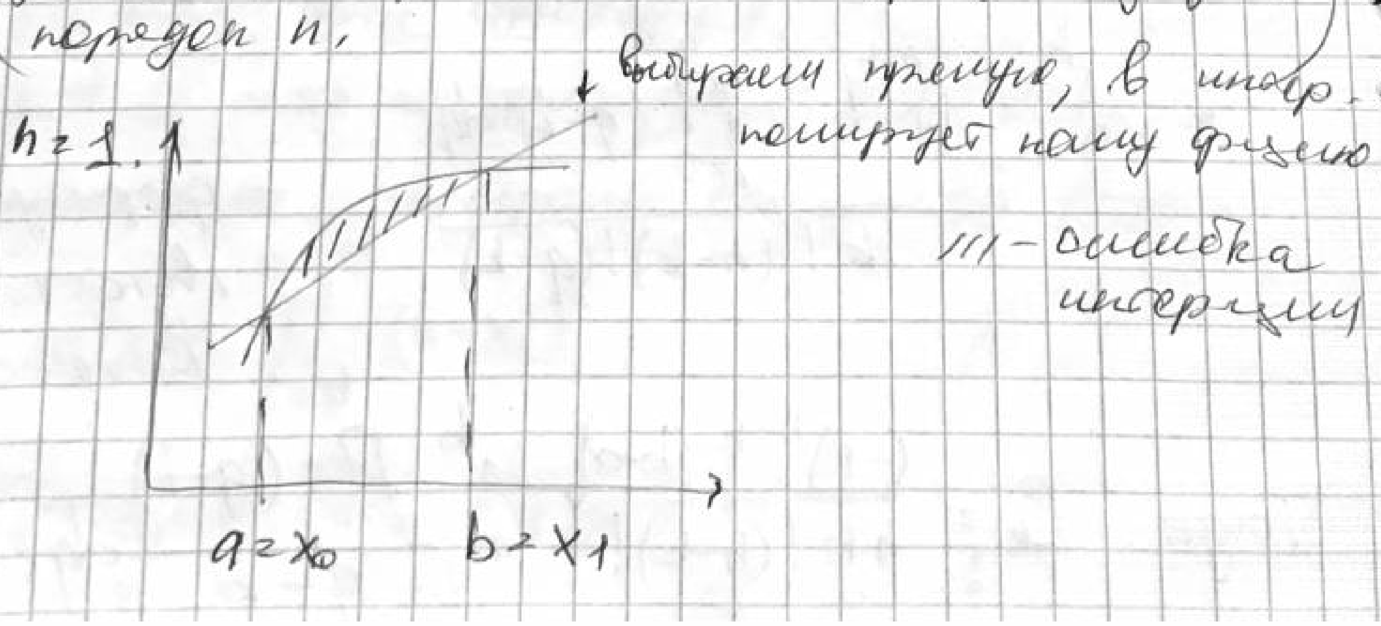
1) $\sum_{i=0}^{n} K_i = 1$

2) Симметричность $K_i = K_{n-i}$

3) Коэф-ты Котесса K_i - не являются знакоопределенными. => ряд при $n \to \infty$ может как сходиться, так и расходиться,

Частный случай

(Можем построить свою интерполяцию задав порядок n,



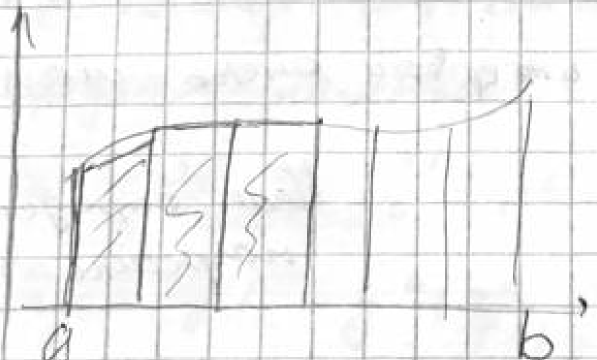
$k_0 + k_1 = 1$ но $k_0 = k_1 = \frac{1}{2}$

Получаем метод трапеций.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + R$$

отрезок $[a,b]$ — малый интервал от основного участка интегрирования.

Есть большой отрезок, делим его на достаточно малые отрезки. И на каждом отрезке (ширина Δx) и вычисляется интеграл как прежде.



Внеш. цикл это деление отрезка на малые отрезки.

Тогда наш интеграл это сумма всех интегралов маленьких отрезков.

Когда просуммировали эти отрезки, то мы правильно посчитали интеграл? Сделаем сетку меньше и снова вычислим.

Тогда для первого разбиения получим I_1, для второго I_2. И хотим посмотреть что ошибка при этом мало меняется. Для этого $|I_2 - I_1| < \varepsilon$. Если да, то дальше не делим. Если нет, то $I_1 = I_2$ и делим ещё раз и снова сравниваем.

и так крутим пока $|I_2 - I_1| < \varepsilon$

Чем больше операций, тем больше ошибка.

$$K_i = \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\,\frac{1}{h}\int_0^n \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(q-i)}\,dq$$

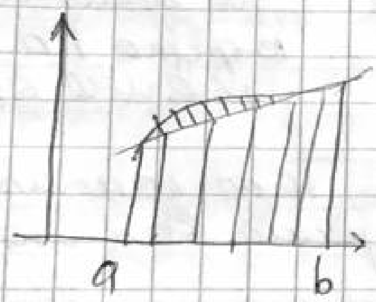
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} K_i f_i + R_n[f]$$

① Формула трапеции

$$K_0 + K_1 = 1, \quad K_0 = K_1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f\,dx = \frac{1}{2}\left(\overset{y_0}{f(x_0)} + \overset{y_1}{f(x_1)}\right)h + R_n[f]$$

$|b-a| \ll 1$ интервал очень мал



Чем определяется погрешность?

Оценим $R_n[f]$.

$$R(h) = \int_a^b f\,dx - \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h =$$

$$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h)$$

$$= \int_a^b y\,dx - \frac{h}{2}\left(y(x_0) + y(x_0 + h)\right)$$

Тогда можем записать что R зависит от h

Берём производную по h.

h — как параметр

$a = x_0, \quad b = x_0 + h$

$$R'_h = y(x_0+h) - \frac{1}{2}\left(y(x_0) + y(x_0+h)\right) - $$

$$- \frac{h}{2} y'(x_0+h) = -\frac{1}{2} y(x_0) - \frac{h}{2} y'(x_0+h) +$$

$$+ \frac{1}{2} y(x_0+h) \qquad R'(0) = 0.$$

$$R''_{hh} = \frac{1}{2} y'(x_0+h) - \frac{1}{2} y'(x_0+h) - \frac{h}{2} y''(x_0+h)$$

$$R''(0) = 0$$

Интегрируем по h.

$$R'(h) - \underbrace{R'(0)}_{0} = -\frac{1}{2} \int_0^h t\, y''(x_0+t)\, dt =$$

Поскольку оцениваем ошибку, то возьмём среднее значение

$$= -\frac{1}{2} M_2 \int_0^h t\, dt = -\frac{1}{2} M_2 \frac{t^2}{2}\Big|_0^h = -\frac{M_2 h^2}{4} = R'(h)$$

где $M_2 = y''(\xi_p)$,

$$R(h) - R(0) = -\frac{1}{4} \int_0^h M_2 t^2\, dt = -\frac{M_2 h^3}{12}$$

$$R(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad R(h) = -\frac{M_2 h^3}{12} \quad \text{где } M_2 = y''(\xi_p)$$

При $h \to 0$ $R(h)$ быстро уменьшается к 0.

Если выберем $M_2 = \max y''(\xi_p)$

Тогда $|R(h)| \le \left|\frac{M_2}{12}\right| h^3$

Достаточно хороший порядок сходимости.

② Формула Симпсона.

$n=2$

$$\underbrace{k_0+k_1+k_2=1 \qquad k_0=k_2}$$

$$k_0=\frac{(-1)^2}{0!\,2!}\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q}\,dq=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 (q^2-3q+2)\,dq=\frac{1}{4}\left(\frac{q^3}{3}-\frac{3q^2}{2}+2q\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4\right)=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow k_2=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow k_1=\frac{2}{3}$$

Хорошо обращается с функциями второго порядка (хорошо интерполирует).
Какова ошибка ф-лы Симпсона.
Выведем формулу Котеса при $n=3$ и $n=4$.

сам-но

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_0+h2} y\,dx - \frac{2h}{6}\left(y(x_0) + 4y(x_0+h) + \right.$$

$$\left. + y(x_0+2h)\right)$$

$$R' = 2y(x_0+2h) - \overset{1/3}{\frac{2}{6}}\left(y(x_0) + 4y(x_0+h) + \right.$$

$$\left. + y(x_0+2h)\right) - \frac{2h}{6}\left(4y'(x_0+h) + 2y'(x_0+2h)\right)$$

$$R'(0) = 0$$

$$R'' = -\frac{2}{6}y'(x_0+2h) + \frac{22}{6}y'(x_0+2h) - \frac{1}{6}\left(4y'(x_0 + \right.$$

$$\left. + h) + 2y'(x_0+2h)\right) = \frac{20}{6}y'(x_0+2h) - \frac{8}{6}y'(x_0+h) -$$

$$- \frac{h}{6}\left(4y''(x_0+h) + 4y''(x_0+2h)\right)$$

$$R'' = 4y'(x_0+2h) - \frac{2}{3}\left(4y'(x_0+h) + 2y'(x_0 + \right.$$

$$\left. + 2h)\right) - \frac{h}{3}\left(4y''(x_0+h) + y''(x_0+2h)\right) =$$

$$= \frac{8}{3}\left(y'(x_0+2h) - y'(x_0+h)\right) - \frac{h}{3}\left(4y''(x_0+h) + \right.$$

$$\left. + 4y''(x_0+2h)\right)$$

$$R''(0) = 0$$

$$R''' = \frac{8}{3}\left(2y''(x_0+2h) - y''(x_0+h)\right) -$$

$$- \frac{1}{3}\left(4y''(x_0+h) + 8y''(x_0+2h)\right) - \frac{h}{3}\left(4y'''(x_0+h) \right.$$

$$\left. + 8y'''(x_0+2h)\right) = -4y''(x_0+h) + 4y''(x_0+2h) -$$

$$- \frac{h}{3}\left(4y'''(x_0+h) + 8y'''(x_0+2h)\right)$$

$$R'''(0) = 0$$

$$R^{(4)} = 8y'''(x_0+2h) - 4y'''(x_0+h) - \frac{1}{3}\left(4y'''(x_0+h) \right.$$

$$\left. + 16y'''(x_0+2h)\right) - \frac{h}{3}\left(4y^{(4)}(x_0+h) + 16y^{(4)}(x_0+2h)\right)$$

Должно получиться! (ошибка)

$$R = -\frac{h^5}{90} y^{(4)}(\xi_\varphi) \qquad \xi_\varphi \in (x_0, x_0+2h)$$

получается хорошая сходимость

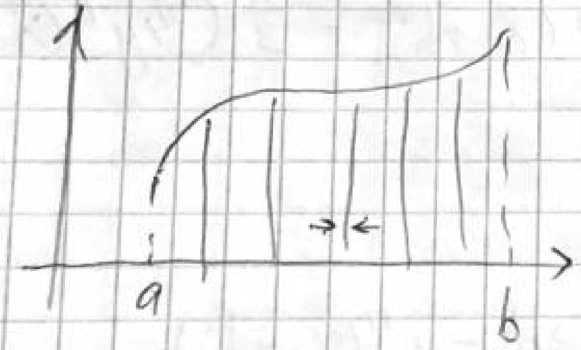
В общем случае:

$$R_n = O\left(h^{2[\frac{n}{2}]+3}\right)$$

Составные квадратурные формулы.

Есть сетка $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

На каждом интервале $\Delta x = x_i - x_{i-1}$



Разбиваем на интервалы равной величины и на каждом из интервалов интерполируем формулой Котеса

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}\Delta x_i +$$

$$+ R_{\text{трапеции}} = h\left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2}\right) +$$

$$+ R_{\text{трапеции}}$$

$$R_{\text{трапеции}} = R_1 + \ldots + R_n = -\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} y''(\xi_i)$$

Оценим сверху по модулю эту ошибку ↑

$$M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y''(\xi_i)$$

$$\Rightarrow R_{\text{трапеции}} = -\frac{1}{12} h^3 n M_2 = -\frac{1}{2} h^2 (b-a) M_2$$

$$|R_{\text{тра-ции}}| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) \max_i |y''(x_i)| < \varepsilon$$

Теперь сходится при $h \to 0$ как h^2

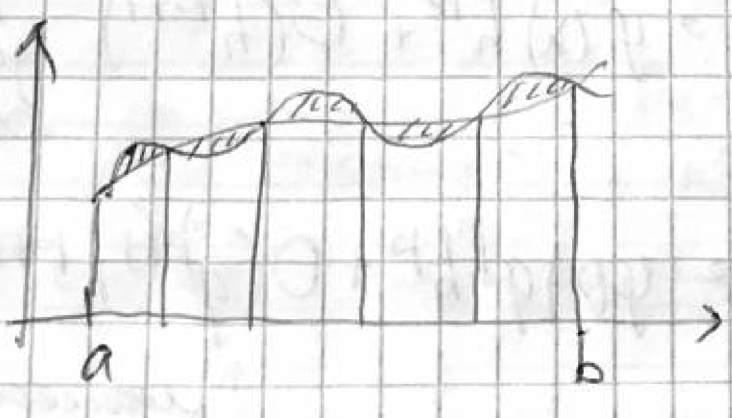
Ухудшилась сходимость.

Если проделаем для формулы Симпсона, то там ошибка тоже ухудшится

Тогда $h < \sqrt{\dfrac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}}$

Вычислим интеграл без полного интерполяционного процесса

Мысль Симпсона.



$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\left(y(x_{i-1})+4y(x_i)+y(x_{i+1})\right)+$$
$$+R_c = \frac{h}{3}\left(y(x_0)+y(x_n)+4\sum_{i=1}^{n-1}y(x_i)\right)+R_c$$
$$=\frac{h}{3}\Big(y(x_0)+y(x_N)+4\big(y(x_1)+y(x_3)+\ldots+$$
$$+y(x_{2n-1})\big)+2\big(y(x_2)+y(x_4)+\ldots+y(x_{2n})\big)\Big)+R_c$$

где $n=\left[\frac{N}{2}\right]$

$$R_c = R_1+\ldots+R_N = -\frac{1}{90}h^5\sum_{i=1}^{N}y^{(4)}(\xi_{\varphi i}) =$$
$$= -\frac{1}{90}h^5 N M_4 = -\frac{1}{90}h^4(b-a)M_4$$

где $M_4 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y^{(4)}(\xi_{\varphi i})$

$$\frac{1}{90}h^4(b-a)|M_4|<\varepsilon$$

Оценка погрешности методом Рунге

(апостериорные - по факту)

аппроксимац. оценка

Пусть есть величина $Z(x) \to \xi_p(x,h)$

$$Z(x)-\xi_p(x,h) = \varphi(x)h^p+O(h^{p+1})$$

дает хорошую точность

h - мало

$$Z(x)-\xi_p(x,qh) = \varphi(x)q^p h^p + O(\cancel{q^{p+1}}h^{p+1})$$

можем пренебречь этим коэффициент

Вычтем их.

$$\varphi(x)\, h^p = \frac{\xi_p(x,h) - \xi_p(x,qh)}{q^p - 1} + O(h^{p+1})$$

↑ первая формула Рунге (для оценки погрешности)

$$z(x) = \xi_p(x,h) + \frac{\xi_p(x,h) - \xi_p(x,qh)}{q^p - 1} + O(h^{p+1})$$

↑ вторая формула Рунге.

q – кратность дробления сетки.

Обычно берут $q=2$.

Если посмотрим на формулу Симпсона

то $R \approx A \cdot h^4$

Если вычислим интеграл по ф-ле Симпсона

$$I \approx I_{\text{сим}_1} + A \cdot h^4$$

↑ кратность 1.

Тогда $A \cdot h^4 \approx \dfrac{I_{\text{сим}_1} - I_{\text{сим}_2}}{2^4 - 1}$

$p=4$.

$$\Rightarrow I = I_{\text{сим}_1} + \frac{I_1 - I_2}{15} + O$$

Это оценка улучшения ф-лы Симпсона.

Формула Эйткена

$$I = I_k + \alpha h^p + O(h^{p+1})$$

Можно дробить сетку с дроблением $0<q<1$

получим, если один раз подробим

то $I - I_1 = \alpha h^p + O(h^{p+1}) = A$

Если ещё раз подробим, то

$$I - I_2 = \alpha (qh)^p + O(h^{p+1}) = AB$$

Если ещё раз, то $I - I_3 = \alpha (q^2 h)^p + O(h^{p+1}) = AB^2$

$$(I - I_1)(I - I_3) = A^2 B^2 = (I - I_2)^2$$

$$\cancel{I^2} - I_1 I - I I_3 + I_1 I_3 = \cancel{I^2} - 2 I_2 I + I_2^2$$

Как соотношение истинное значение интеграла с интерполяционным когда дробим

$$\boxed{I = \frac{I_2^2 - I_1 I_3}{2 I_2 - (I_1 + I_3)} + O(h^{p+1})}$$

$\downarrow$

вторая формула Эйткена

Если хотим оценить порядок p, то

$\exists$ отношение

$$\frac{I_3 - I_1}{I_3 - I_2} = \frac{A(1-B)}{AB(1-B)} = \frac{1}{B} = \frac{1}{q^p}$$

$$\longrightarrow \boxed{p = \frac{\ln \frac{I_3 - I_2}{I_3 - I_1}}{\ln q}}$$

Если брать q близким к 1, то медленно сходится. Если q брать близким к 0, то накапливается ошибка, поэтому берут $q \sim \frac{1}{2}$.

Квадратурные формулы Гаусса - Кристофеля.

$$I = \int_a^b f(x)\rho(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} C_i f(x_i) + R_n[h]$$

интерполяцион. многочлен

Нужно подобрать C_i и x_i таким образом, чтобы погрешность многочлена наибольшего порядка $\to 0$ (была минимальной)

Выбор узлов x_i.

1) Пусть $\rho(x)$ - кусочно непрерывная функция и пусть для её $\exists$ ортогональная система полиномов $P_k\{x\}$ так что

$$\int_a^b \rho(x) P_k(x) P_n(x)\,dx = \delta_{kn} \|P_n(x)\|^2_{x\in[a,b]}$$

2) Пусть многочлены таковы, что корни $P_k(x)$ являются x_i, $i=\overline{1,k}$ действительные

ные $(x_i \in \mathbb{R})$ и $x_i \in [a, b]$.

3) Тогда по этим корням можем составить интерп-узловой многочлен

$$\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_k)$$

Выберем из всех многочленов многочлен порядка n.

Тогда $\omega(x)$ — интеграл. ~~многочлен~~ для $P_n(x)$.

Предположим, что хотим найти интерп. многочлен для m, где $m = 2n - 1$.

4) Тогда $\varphi(x) = \omega(x) P_m(x)$ — многочлен степени $\leq 2n-1$, где $m \leq n-1$.

Теперь подставим в интеграл.

$$I = \int_a^b \omega(x) P_n(x) \rho(x)\, dx =$$

Хотим минимальную погрешность

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi(x_i) + \cancel{R_{2n-1}[h]} =$$

Выбираем таким образом чтобы это было минимально

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \omega(x_i) P_m(x_i) = 0$$

т.к. это ортогонально по определению построения

Можем разложить по многочленам в ряд $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k P_k(x)$

$$(\omega(x), P_m(x)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k \int_a^b P_k(x) P_m(x) \rho(x) dx$$

$$= \alpha_m \| P_m(x) \|^2$$

$$\omega(x) = A P_m(x)$$

<u>Вывод</u>: оптимальный выбор узлов x_i таков, что выпол-ся условие

$$P_n(x_i) = 0$$

<u>Теорема</u>. Если $f(x) = P_n(x)$ и

и x_0 : $P_n(x_0) = 0$ (т.е. все его корень)

Тогда $f(x) = (x - x_0) \varphi(x)$

$$I = \int_a^b \omega(x) P_m(x) \rho(x) d = \sum_{i=1}^{n} C_i \omega(x_i) P_m(x_i)$$

Удобнее выбрать узлы там где полином равен 0.

<u>Вычисление весовых коэффициентов.</u>

$$l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$$ — разложение Лагранжа

Если водится в точке $x = x_i$
то получим результат.

Частный случай:

Пусть $\rho(x) = 1$ $\quad x \in [a, b)$

будет именоваться полиномом Лежандра

то $l_n(x)$ будет вычисляться

$$\int_a^b f(x)\,dx \sum_{k=1}^{n} k\, f(x_k) \approx$$

$$x_k = \frac{b-a}{2} t_k + \frac{b+c}{2}$$

$x = ct + d$ $\qquad a = -c + d$

$dx = c\,dt$ $\qquad b = c + d$

$c = \frac{b-a}{2}$ $\qquad d = \frac{b+a}{2}$

$t \in [-1, +1]$. $\approx \int_{-1}^{+1} F(t)\,dt \approx$

Получаем $\approx c \sum_{k=1}^{n} \rho_k F(t_k)$

$$C_k = \frac{b-a}{2} \rho_k \quad, k = \overline{1, n}$$

$f(x_k)$

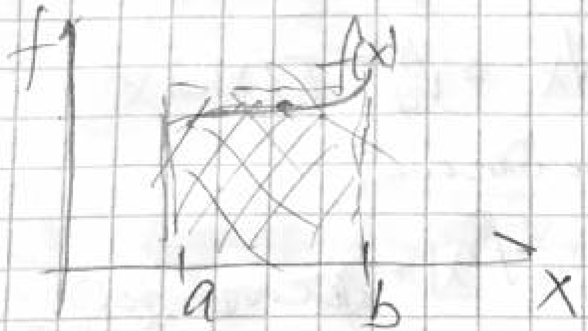
Если нужно вычислить ρ_k, но ρ_k — интеграл интеграл. Все зависит от выбора.

Пример $k = 1$

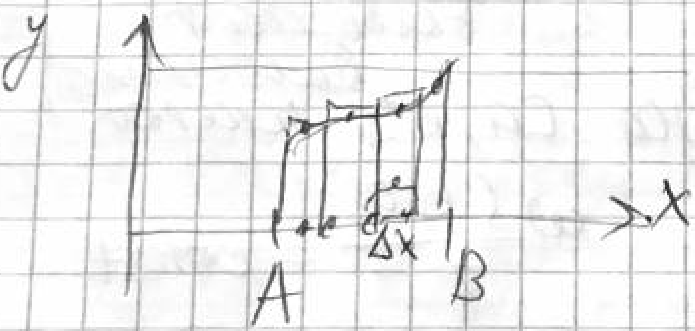
$$p_1 = \int_{-1}^{+1} l_1(t)\,dt = \int_{-1}^{t} \frac{t - t_1}{t_1 - t_1} = 2$$

$$C_1 = \frac{b-a}{2} = 2 \Rightarrow b - a$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R$$



Можем выбрать нашим узлы



Если f(x) многочлен то можем быстро вычислить интеграл

Вычисляем днину кладки

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \Delta x_i \rightarrow x_i \equiv \Delta x$$

$$\Delta X_{-1} = \frac{\Delta X}{2}$$

Т.к. при дроблении может быть K

$$\Delta X \Rightarrow |S_1 - S_2| < \varepsilon$$

Д-во если многочлен n-го порядка с шагом определить много, достаточно тяжело.

Интегрирование быстроосциллирующих функций.

Формула Филона

$$I = \int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx = \int_a^b F(x) dx$$

где ω — частота колебаний,

$\omega \cdot (b-a) \gg 1$ $\quad f(x)$ — достаточно гладкая

Считаем, что $\omega = const$. (достаточно большая величина)

$Re\, f(x) e^{i\omega x}$
$Im\, f(x) e^{i\omega x}$ $\Rightarrow$ на $[a, b]$ имеет $\frac{\omega (b-a)}{\pi} = const$

$F(x)$ будет иметь на каждом периоде примерно два корня.

Задача найти интерполирующий многочлен $P_n(x) e^{i\omega t}$

Интересует интеграл с сеткой N

$$I = \int_a^b P_n \quad e^{i\omega x} dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_i e^{i\omega x} dx$$

Выберем сетку, чтобы интеграл был более точным

Формулы Филона определяются при $n=2$ или $n=1$

$$P_1(x) = f(x_{k-1}) + (x - x_k) f(x_{k-1}, x_k) =$$

$$= y_{k-1} + (x - x_k)\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

разделённая разность I порядка

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \int_{x}^{x_i} \left(y_{i-1} + (x - x_i)\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} e^{i\omega x} dx\right.$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{y_{k-1}}{i\omega}\left(e^{i x x_i} - e^{i\omega(x_{i-1})}\right) + \right.$$

$$\left. + (y_i - y_{i-1})\frac{e^{i\omega x_i}}{i\omega} - \frac{y_i - y_{e-1}}{x_i - x_{i-1}}\frac{e^{i\omega x}}{(i\omega)^2}\right|_{x_{i-1}}^{x_i} \Bigg\} =$$

Если теперь просуммируем, то получим

$$= \frac{F(N) - F(0)}{i\omega} + \frac{2i}{\omega^2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\sin\left(\frac{\omega(x_i - x_{i-1})}{2}\right)}{x_i - x_{i-1}} \cdot$$

$$\cdot (y_i - y_{i-1}) e^{\frac{i\omega x_{i-1}}{2}}$$

↑ это формула Филона

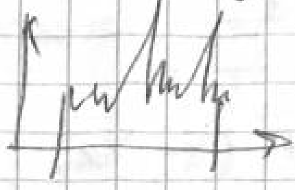
(для быстро осциллирующих функций)

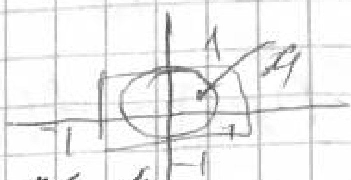
Замечание

1) При вычислении интеграла от случай.

величины все методы не работают.

$f(x)$:





$\frac{N}{M} = \frac{\pi}{4}$

→ метод Монте-Карло
(бросание точек в мишень.)

Методы линейной алгебры

1) Решение дифф. ур-ний
2) Задача оптимизации
и т.д.

Две задачи!

1) Решение линейн. систем:
а) точные методы
б) итерацион. методы

2) Определитель матрицы, спектр матрицы (ее собств. значений), обратной матрицы, собств. вектора.

Норма матрицы.

Зачем нужна? Если используем итер. методы нужна скорость сходимости. По сути норма это и есть. Также для определения каких-то параметров

Решение линей. систем

$Ax = B$

A — $n \times n$ - квадратная матрица

x - вектор столбец $n \times 1$

B - столбец $n \times 1$

1) $\|\vec{x}\| = \sqrt{(x, x)}$ - Евклидова норма
1 вектор

2) Норма Гильберта- Шмидта (L_p-норма)

$\|\vec{x}\|_p = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$, p-произвольно

3) $\|\vec{x}\|_\infty = \sup_i |x_i| = \max_i |x_i|$

C-норма- применяется для векторов в бесконечном про-ве

Пример!

Пусть $\vec{x} = \{1, 3\}$

1) $\|\vec{x}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

2) $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(1+9)} = \sqrt{5}$

3) $\|\vec{x}\| = 3$

Они близкие к 3, но они все разные.

Но что правильно.

Если выбрали норму, то смотрим и делаем оценки только в этой норме.

Теперь о норме матрицы.

3) — может сработать для матрицы, а что с другими?

Используют след. понятие.

<u>Опр.</u>

Пусть есть вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}$ тогда под нормой матрицы A, согласованной с вектором $\vec{x}$, наз-ся:

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

верхняя точная грань

Если отнормируем $\vec{x}$

Сколько надо векторов перебрать, чтобы это посчитать? Это проблема

$\|A\| \cdot \|x\| \geq \|Ax\|$ — оценка сверху.

$\Rightarrow \ \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Известные типы норм матриц!

<u>Замечание</u>: Применяются эти нормы к квадратным матрицам в основном

1) $\|A\|_C = \max\limits_i \left(\sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|\right)$ i – номер строки, j – номер столбца

2) $\|A\| = \max\limits_j \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)$

3) $\|A\|_M = n \cdot \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$

4) $\|A\|_S = \sqrt{\max\limits_i \mu_i} - \max\limits_i \vartheta_i$

μ_i – собств. значение самосопряжённой матрицы (A^*, A), $\vartheta_i = \sqrt{\max\limits_i \mu_i}$

5) $\|A\|_E = \left(\sum\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}^2|\right)^{1/2}$

модуль, т.к. могут быть комплексные

Все эти нормы связаны между собой.

$\|A\|_S$ – спектральная норма, $\|A\|_E$ – евклидова норма, $\|A\|_M$ – максимальная норма

Число обусловленности матрицы.

Обозначение $\operatorname{cond} A$

$Ax = b$

$x = A^{-1} \cdot b$ - точное решение

Правая часть может быть неустойчивой, т.к. имеет место отклонение матрицы A, а также возможна ошибка в b.

Чаще решение получается $x + \delta x$

$\Rightarrow \delta x = \delta(A^{-1} b)$ - получается в результате ошибки правой части

$= \underbrace{\delta A^{-1} \cdot b}_{=0} + A^{-1} \delta b$

0, т.к. элементы матрицы известны

Если система неустойчивая, то это может дать вклад (т.е. $\neq 0$).

δA^{-1} - найдём

$AA^{-1} = E$ если проварьируем, то $\delta(AA^{-1}) = \delta E$

$\delta A \cdot A^{-1} + A \cdot \delta A^{-1} = 0$

$\Rightarrow \delta A^{-1} = -A^{-1} \delta A \cdot A^{-1}$

Тогда $\delta x = -A^{-1} \delta A \cdot A^{-1} b + A^{-1} \delta b =$

$= A^{-1}(\delta b - \delta A \cdot A^{-1} b) = A^{-1}(\delta b - \delta A \cdot x)$

Если хотим чтобы ошибка $\to 0$, то нужно уменьшать либо ошибку b, либо A

Есть ошибка $\delta x = A^{-1}(\delta b - \delta A x)$

1) Пусть $\delta A = 0$ (мы так положили)

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

т.к. x - вектор, то и δx - вектор

$$\|\delta(x)\| \le \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

$$b = Ax$$

$$\|b\| \le \|A\|\cdot\|x\|$$

$$\Rightarrow \|\delta x\|\|b\| \le \|A^{-1}\|\|A\|\cdot\|\delta b\|\cdot\|x\|$$

$$\underbrace{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}}_{\text{относит. ошибка решения}} \le \underbrace{\|A^{-1}\|\|A\|}_{\text{cond}A \text{ — число обусловленности}}\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Чем ближе $\text{cond}A$ к 1, тем лучше. При этом $\text{cond}A \ge 1$ - по построению.

2) Пусть $\delta A \ne 0$, но $\|\delta b\| = 0$

Тогда и условие на δx.

$$\delta x = A^{-1}\delta A\cdot x \to \|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|\cdot\|x\|$$

$$\frac{\|\delta(x)\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\delta A\|\cdot\|A\|}{\|A\|} = \text{cond}A\cdot\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

8) Что делать когда $\delta A \neq 0$, $\delta b \neq 0$.

Тогда $$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\operatorname{cond} A}{1 - \operatorname{cond} A \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right)$$

При хорошем cond ≤ 1.
тогда это всё сходится.

Если оно большое, то сходимость плохая.

Вообще система может не сойтись

Решение линейных систем

1) С помощью обр. матрицы
2) Метод Гаусса
3) Метод Крамера.

Если есть вектор $\vec{n}$ хотим перебрать все его компоненты, то сложность линейная, т.е. кол-во интераций $O(n)$.

$$n \sim O(n^2)$$

перемножить матрицы $n \sim O(n^3)$
посчитать опред-ль $n \sim O(n!)$

Если перебрать все подмножества некоторого множества $n \sim O(n^n)$

Обычно применяют метод Гаусса. Он удобен.

а) прямой ход

б) обратный ход

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_n + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \hline \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

1) Цикл по номеру строки.

2) берём строчку с номером i и берём элемент a_{ij} и делим на него.

3) Цикл по строкам с $N < i$

Иначе подводные камни.

Большинство задач имеют разряженную структуру (т.е. нет, н-р, элементов a_{21}, a_{22} и т.д.)

Если элементы на глав диагонали нули, должны дойти до него, в [illegible], и переставить на глав. диагональ, но нужно

Запоминать перестановки - а это сложно.

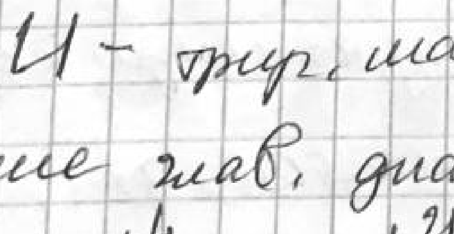
Замечание. Метод Гаусса имеет два хода прямой и обратный. Первый получение из исходной системы треугольной матрицы. $Ax=f \Rightarrow Ux=y$

Второй - это начиная с x_n выполняется нахождение $x=U^{-1}y$

LU-разложение.

Вышла из метода Гаусса.

Представим матрицу A в виде произв. двух матриц L - треугольная матрица с элементами ниже глав. диагонали, а U - треуг. матрица с элементами выше глав. диагонали, при этом $u_{ii}=1$



$A=LU$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \; 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \; 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & \dots & \dots & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = a_{11}$$

$$a_{12} = l_{11} u_{12} \qquad u_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \bar{b} = \end{array} \left[\begin{array}{c|c} & \bar{c}^T \\ & a_{1n} \\ A_{n-1} & \vdots \\ & a_{n-1\,n} \\ \hline a_{n1} \dots a_{nn-1} & a_{nn} \end{array}\right] = \begin{array}{c} \\ \\ \bar{l} = \end{array} \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ L_{n-1} & \vdots \\ & 0 \\ \hline l_{n1} \dots l_{nn-1} & l_{nn} \end{array}\right] * \left[\begin{array}{c|c} & \bar{u} \\ & u_{1n} \\ U_{n-1} & \vdots \\ & u_{n-1\,n} \\ \hline 0 \dots 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_{n-1} \cdot U_{n-1} = A_{n-1} \qquad \bar{l}\,\bar{u} + l_{nn} = a_{nn}$$

$$L_{n-1}\, \bar{u} = \bar{c}$$

$$\bar{l}\, U_{n-1} = \bar{b}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{u} = L_{n-1}^{-1} \bar{c}$$

$$\bar{l} = \bar{b}(U_{n-1})^{-1}$$

$$l_{nn} = a_{nn} - (\bar{l}\,\bar{u})$$

Эти формулы можно записать в численном виде.

<u>Замечание.</u>

1) Это разложение имеет смысл, если матрица L - невырожденная (т.е. определитель этой матрицы отличен от 0)

$$\det L = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$$

Зная LU-разложение можем решить задачу о поиске определителя матрицы A

$$\det A = \det L \cdot \underbrace{\det U}_{=1} = \det L$$

2) Разложение на произведение матриц L и U - единственно.

<u>Д-во</u>. Предположим, что есть два разложения т.е. $A = L_1 U_1$ и $A = L_2 U_2$

$$L_1 U_1 = L_2 U_2 \quad \Big| \cdot L_1^{-1} \text{ слева}$$

$$\underbrace{L_1^{-1} L_1}_{E} U_1 = L_1^{-1} L_2 U_2 \quad / \cdot U_2^{-1} \text{ (справа)}$$

$$U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 = U_1 \cdot A^{-1} L_2$$

Одно из разложений должно быть единичной матрицей

$$L_1^{-1} L_2 = E \rightarrow E_1 = L_2$$

$$U_1 U_2^{-1} = E \rightarrow U_1 = U_2$$

$$A^{-1} = (L_1 U_1)^{-1} = U_1^{-1} \cdot L_1^{-1}$$

$$U_2^{-1} = A^{-1} L_2$$

$$U_1 L_2 A^{-1} = U_1 A^{-1} L_2$$

это взаимообратная операция

т.к. $AB \neq BA$

3) Зануление по методу Гаусса.

$\det A \neq 0$ – в этом случае решение задачи $a_{ii} \neq 0$ На главной диагонали единицы.

На главной диагонали ставят наибольшие значения

Если есть матрица:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Сначала делим на $a_{11} \neq 0$.

[illegible] это сделать индекс

1) $\max |a_{ij}|$

Максимальный элемент строки в столбца на 1 место ставится и также делится на этот элемент. Получаем матрицу

4) Если $A > 0$ — положит. определённая то $A^T = A$ то в этом случае матрица A раскладываем

$A = L \cdot L^T$ — метод Холецкого.

Частный случай LU-разложения

Вычисление определителя и вычисление обрат. матриц

Согласно матрицы определим

$\det(A) = \cancel{\det} L \det U = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$

$A \cdot A^{-1} = E$

Если не знаем матричное уравнение, то должны решать ур-ние $A \cdot X = E$

$X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ – единичная

$= (E_1, E_2, \ldots, E_n)$

Вычисление матрицы может быть определена обратная матрица

$A X_k = E_k$

Сложность задачи: n^3, т.к. уравнений n и т оно имеет хотя бы n уравнений.

LU-разложение ленточной матрицы

Под ленточной матрицей понимается A матрица порядка k имеющая (k+1) диагоналей элементы коих все не равны 0. параллельных главных диагоналей

(Задача решения систем диф. ур-ний или диф. уравнение) ~~линейные диф~~ до динамические задачи,

Пример: $k = 1$.

Тогда наша матрица трёх диагональная ленточная матрица.

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Когда количество элементов сильно меньше чем n^2, то такие наз-ся разреженными) не занимает много памяти, оно не даёт засорять память.

<u>Посмотрим на примере.</u>

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & u_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

воспользуемся правилами

$a_{11} = l_{11}$

$a_{12} = l_{11} \cdot u_{12} \rightarrow u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = l_{11}^{-1} a_{12}$

$u_{1(3,4,5)} = l_{11}^{-1} a_{1(3,4,5)}$

$u_{1(3,4,5)} = 0$, т.к. $a_{1(3,4,5)} = 0$

$a_{21} = l_2 \cdot u_1 = l_{21}$

$\boxed{a_{i1} = l_{i1}}$

Трехдиагональная матрица распадается на двух диагоналях.

$a_{22} = l_{21} \cdot u_{12} + l_{22}$

$l_{22} = a_{22} - l_{21} u_{12} =$

$= 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$

$1 = l_{32} \cdot 1$

$1 = \frac{4}{3} u_{23} \Rightarrow u_{23} = \frac{3}{4}$

u_{24}, u_{25} и $u_{35} = 0$ в силу матрицы.

$$3 = \frac{3}{4} + l_{33}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i & i = \overline{2, n-1} \\ b_1 x_1 + c_1 x_2 = f_1 \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n = f_n \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & & \alpha_n & \beta_n \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_3 \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & \\ 0 & \cdots & & & 1 & \gamma_{n-1} \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_k \cdot 1 = a_k \\ \alpha_k \gamma_{k-1} + \beta_k \cdot 1 = b_k \\ \beta_k \gamma_k = c_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 \cdot 1 = b_1 \\ \beta_1 \cdot \gamma_1 = c_1 \end{cases}$$

$$(*)\begin{cases} \alpha_k = a_k, & k = 2, \dots n \\ \beta_1 = b_1 \\ \gamma_k = \dfrac{c_1}{\beta_1} \\ \beta_k = b_k - \alpha_k \gamma_{k-1} = b_k - a_k \gamma_k & k = \overline{2, n} \\ \gamma_k = \dfrac{c_k}{\beta_k}, & k = \overline{2, n-1} \end{cases}$$

Такой подход к решению трёхдиагональных матриц называется метод прогонки.

<u>1 этап.</u>

Нахождение коэффициентов (*)

LU-разложение

<u>2 этап.</u>

Решение системы.

Если A представима в виде $A = L \cdot U$ и мы решаем систему $L\underbrace{Ux}_{y} = f$, то решаем сначала систему $Ly = f$

находим

$$y_1 = \frac{f_1}{\beta_1}$$

$$y_2 = (f_2 - \alpha y_1)/\beta_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_k = (f_k - \alpha_k y_{k-1})/\beta_k$$

А затем решаем систему

$\nabla x = y$, находим

$x_n = y_n$

$x_{n-1} = y_{n-1} - \gamma_{n-1} x_n$

. . . .

$x_{k-1} = y_{k-1} - \gamma_{k-1} x_k$

<u>Достаточные условия разрешимости системы методом прогонки.</u>

$$|\beta_k| = |b_k - a_k \gamma_{k-1}| \geq |b_k| - |a_k||\gamma_{k-1}| \geq$$

по св-ву треугольника

$$\geq |a_k| \underbrace{(1 - |\gamma_{k-1}|)}_{\geq 0} + |c_k| > 0$$

оценка сниз.у

β_k должно быть отлично от 0.

$$|\gamma_k| = \frac{|c_k|}{|b_k - a_k \gamma_{k-1}|} \leq \frac{|c_k|}{|b_k| - |a_k||\gamma_{k-1}|} \leq$$

$$\leq \frac{|c_k|}{|a_k|(1 - |\gamma_{k-1}|) + |c_k|} < 1$$

Устойчивой система является при

$|\gamma_1| < 1$

Итерационные методы
решения линейных систем.

Есть $Ax = f$

Нужно создать итерац процесс, в на каждом шаге приближает нас к решению

Он выглядит так:

$$B \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau_{n+1}} + Ax_n = f$$

$$x_0 = x^0$$

A - матрица $n \times n$

x - вектор $(n \times 1)$

x_n - вектор решения итерац. процесса с номером n.

$\det(B_{n+1}) \neq 0$ - тогда процесс будет сходится. Если $\det B = 0$, то процесс может зациклится и уйти в ∞.

Если $\tau = const$, $B = const$ и не зависит от номера итерации, то процессы наз-ся стационарными, в противном случае не стац-ные.

Если остановимся на x_n то будет

Ошибка z_n, т.е. $x_n = x + z_n$

Эта послед-ть должна быть фундаментальной послед-тью Коши.

$\| x_n - x_{n-1} \| < \varepsilon$ – тогда процесс завершится. Здесь x – вектора, чаще всего используется Евклидова норма.

Нужно оценивать условия, в удовлетворяют матрица B и τ.

Простейшие методы.

а) Метод релаксации.

$B = E$ – единич. матрица.

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} + A x_n = f$$

$\tau > 0$ – обычно

Тогда $x_{n+1} = x_n - \tau (A x_n - f)$

играет роль поправочного коэффициента по отношению к предыдущему шагу

При $\tau > 0$ метод наз-ся методом Ричардсона.

б) Методы Якоби – Зейделя

Сюда же можно отнести метод верхней релаксации.

$$A = A_н + D + A_в$$

ниже глав. диагонали — глав. диагональ — выше глав. диагонали

$$A = \begin{pmatrix} & & A_в \\ & D & \\ A_н & & \end{pmatrix}$$

1) <u>Метод Якоби</u>

Пусть $B = D$ $\quad \tau = 1$

$$D\bar{x}_{n+1} = D\bar{x}_n - \underset{=1}{\tau}(A\bar{x}_n - f)$$

$$\bar{x}_{n+1} = D^{-1}(D\bar{x}_n - (A\bar{x}_n - f))$$

Если распишем по элементам

i номер компонент

$$x_{n+1}^{i} = x_n^{i} - \frac{1}{a_{ii}}(A\bar{x}_n - f)_i$$

n - номер итерации $\quad i = \overline{1, N}$

Он (метод) устойчив, если $a_{ii} \neq 0$ и желательно, чтобы $a_{ii} > 1$ было.

2) <u>Метод Зейделя.</u>

Это неплохой метод.

$$(A_н + D)(\bar{x}_{n+1} - x_n) = -(A\bar{x}_n - \bar{f})$$

$$(\overline{x_{n+1}})_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(-(A_4 \overline{x_n} - \overline{f})_i - \sum_{i=1}^{i-1} (A_4)_{ik} (\overline{x_{n+1}})_k\right)$$

3) <u>Метод верхней релаксации</u>

Он обобщённый для метода Зейделя.

ω - параметр, в можно изменять.

Он обеспечивает сжимаемость оператора

$$(D + \omega A_4)\frac{\overline{x_{n+1}} - \overline{x_n}}{\omega} + A\overline{x_n} = \overline{f}$$

$$(D + \omega A_4)\overline{x_{n+1}} = (D + \omega A_4)\overline{x_n} - \omega A \overline{x_n} + \omega \overline{f} =$$

$$= -\left((\omega A - D - \omega A_4)\overline{x_n} - \omega \overline{f}\right)$$

$$(\overline{x_{n+1}})_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(-([\omega A_5 + (\omega - 1) D]\overline{x_n} + \omega \overline{f})_i - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{i-1} (\omega A_4)_{ik} (\overline{x_{n+1}})_k \right) \qquad i = \overline{1, N}$$

$\overline{x_0} = \overline{f}$ - чаще задаётся так нач. точка

Схема:

1) Задаётся матрица A и формируется столбец $\overline{f}$. Чаще всего нач. столбец задаётся $\overline{x_0} = \overline{f}$. Задаётся ε.

2) Вычисляем $\overline{x_1}$. Внешний цикл - while - пока не приблизимся к нужной точке

$\|\overline{x_{n+1}} - \overline{x_n}\| > \varepsilon$

Вычисляется $\overline{x_{n+1}} = \overline{F}(\overline{x_n})$

while $\|\overline{x_1} - \overline{x_0}\| > \varepsilon$

Здесь прежде нужно вычислить $\overline{x_1}$

Здесь запускается for $i = \overline{1, n}$

$$(\overline{x_1})_i = \frac{1}{a_{ii}}\Big(\big(-[\omega A_U + (\omega - 1)D]\,\overline{x_0} + \omega \overline{f}\big)_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\omega A_L)_{ik} (\overline{x_1})_k\Big)$$

end

Если условие выполнится, то мы заходим в цикл while, там переобозначаем $\overline{x_0} = \overline{x_1}$

И завершает цикл end while

И решением будет $\overline{x_1}$, вычисленное на последнем шаге.

Есть $\cos(i)\, x_{i-1} + x_i - \sin(i)\, x_{i+1} = 1$

Так же в методе нужно задать $\omega > 0$, $\omega < 1$

Какое же ω выбрать?

Проблема задать матрица A

Значения, задаем нулевая матрица

$A = zeros(N \times N)$ после в цикле (в одном): $A = A + E$

$a_{i-1\,i} = \cos(i)$

$a_{i+1\,i} = -\sin(i)$

При отладке программы в цикле while $\|x_{n+1} - x_n\|$ задаем счётчик $m \le 100$ (т.к. если зациклится => сделали что-то не то...) и считаем $m = m + 1$

и напечатать $\|x_1 - x_0\|$.

Если же этот метод не срабатывает => не сходится.

Для малых n этот равен порядка — размеры системы

Если видим, что растёт норма, тогда нужно перебрать ω или задать матрицу.

Условие сходимости итерац. методов.

Если посмотрим на итерац. схему, то

$x_{n+1} = C_n x_n + g$ =

C_n – может зависеть от n, а может и не зависеть

$C = E - \tau B^{-1} A$

$g = \tau B^{-1} f$ – для метода послед. приближений.

C – const. Можем продолжить процесс назад, то есть рекурсию

= $C(C x_{n-1} + g) + g = C^2 x_{n-1} + Cg + g$

(Выражаем x_n через предыдущие члены $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$)

= $C^2(C x_{n-2} + g) + \underbrace{Cg + g}_{(C+1)g} = \dots =$

доходим до x_0

$= C^n x_0 + \underline{(C^{n-1} + C^{n-2} + \dots + E)} g$

получим матричный ряд.

Чтобы ряд сходился, нужно чтобы $\sim$ сходилась

$x^* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ Решение сходится к точному x^*

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n$ ← применим к нему теорему сходимости матричных рядов

$\forall$ обобщ. матр. ряд (*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n C^n$ поставим ему в соотвествие производящий ряд

(**) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$, где под λ - понимаем некоторое число

Теорема Для того чтобы матр. ряд (*) сходился необ. и дост., чтобы собственные значения матрицы C принадлежали области сходимости производящего ряда (**)

Пусть λ_i - соб. число матрицы.

$\lambda_i \in (-R, R)$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}}$$

$C = E - \tau B^{-1} A$

$g = \sup |\tau B^{-1}|$

Нужно $|\lambda_i| < 1$ - чтобы все сходилось

Еще одно:
Необх. условие сход-ти ряда $\|C^n\| \to 0$ $n \to \infty$

$\Rightarrow \|C\| < 1$.

Если ряд такой $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C^n$ сходится

При этом сходится к матрице

$$\sum_{n=0}^{\infty} C^n = (E - C)^{-1} = (E - (E - \tau B^{-1} A))^{-1} =$$

$= \left(\tau B^{-1} A\right)^{-1} \ominus$

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Используем также $(B^{-1})^{-1} = B$

Тогда

$\ominus \; A^{-1} \frac{1}{\tau} B$

Если к сумму $\left(\sum_{n=0} C^n\right) g =$

$= A^{-1} \frac{1}{\cancel{\tau}} \underbrace{B \cdot \cancel{\tau}\, B^{-1}}_{E} \underbrace{f}_{g} = A^{-1} f = \overline{x}$

Решение ! и оно $\exists$ при построении между итерациями.

<u>Замечание</u>. Достаточное условие сходимости итерац. процесса.

$C\overline{x} = \lambda \overline{x}$ $\rightarrow$ λ в вычисляем

условие $\det|C - \lambda E| = 0$

Если есть такое алгф.-ур-ние, то

$\|C\overline{x}\| = \|\lambda \overline{x}\| = |\lambda| \, \|\overline{x}\|$

$\|C\overline{x}\| \leq \|C\| \, \|\overline{x}\|$

$|\lambda| \, \|\overline{x}\|$ В общем случае

$|\lambda| \leq \|C\|$

Для всех соб. чисел матрицы C. $i = \overline{1,N}$

Если мы узнаем сход-ть матр-ряда, то $\|C\|<1$

а) $\max\limits_i (\max\limits_j |c_{ij}|) < 1$

или наоборот

б) $\sum\limits_{i,j} |c_{ij}|^2 < 1$

Либо а) либо б) проверяем в зависимости от того, какую норму используем.

Также важно определить значение параметров, входящих в др-ние.

Для этого определяем матрицу A

Пусть A – положител. симметричная матрица

Положител. опред-ная матрица A $(A>0)$ – это когда $\forall x \in D$ $(Ax, x) > 0$, $x \neq \bar{0}$

Тогда можем написать $(A\bar{x}, \bar{x}) \geq \delta \|x\|^2$

$\exists$ такое маленькое число δ

$\Rightarrow$ $A \geq \delta E$, где E – едини. матрица

В качестве δ часто берут min значение соб. значений матрицы A: $\delta = \min\limits_{i=\overline{1,N}} \lambda_i$

Если $A > 0 \Rightarrow \forall x \in D \ (Ax; x) =$

$= \frac{1}{2}\left((Ax, x) + (x, A^{*} x)\right) =$

A^{*} – транспонированная сопряжённая матрица матрице A.

$A^{*} = (A^{T})^{*}$

$= \frac{1}{2}\left((A + A^{*})x, x\right) > 0$

Следствие.

1) т.к. $(Ax, x) > 0 \Rightarrow$ всегда можем найти обратную матрицу матрице A (т.е. $\exists A^{-1}$)

2) Если $A \geq 0$, $\Rightarrow$ может и не $\exists$ матрица A^{-1} $(x \neq 0)$ – ~~обр~~ обрат. матрица

3) Если $A > 0$ можно ввести энергетическую норму для x основанной на A

$\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$

Теорема (Самарского) (о достаточном условии сх-ти итерационного процесса)

Пусть $A > 0$ – полож. опред. симмет. матрица

Пусть $\tau > 0$ и пусть $B > 0$ — пол. опред. симметр. матрица

И матрица построенная как $B - \frac{\tau A}{2} > 0$

Тогда итерационный процесс (для метода последов. приближений) сходится для $\forall x \in \mathcal{D}$

Д-во

Итер. процесс:

$$x_{n+1} = (E - \tau B^{-1} A) x_n + \underbrace{\tau B^{-1} f}_{\text{эта величина постоянная}}$$

Выпишем ошибку для x_{n+1} и x_n.

$$z_{n+1} = (E - \tau B^{-1} A) z_n$$

$$\| z_{n+1} \|^2 = (A z_{n+1}, z_{n+1})$$

$$A z_{n+1} = A (E - \tau B^{-1} A) z_n = (A - \tau A B^{-1} A) z_n$$

Тогда $(A z_{n+1}, z_{n+1}) = ((A - \tau A B^{-1} A) z_n, (E - \tau B^{-1} A) z_n) = (A z_n, z_n) - \tau (z_n, A B^{-1} A z_n) - \tau (A z_n, B^{-1} A z_n) + \tau^2 (B^{-1} A z_n, A B^{-1} A z_n) =$

т.к. $A > 0$ и симметричная $A^* = A$

$$(z_n, A B^{-1} A z_n) = (A^* z_n, B^{-1} A z_n) = (A z_n, B^{-1} A z_n)$$

$$= \| z_n \|_A^2 - 2\tau (B B^{-1} A z_n, B^{-1} A z_n) +$$

$$+\tau^2 (AB^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n) =$$

$$= \|z_n\|_A^2 - 2\tau\left(\left(B - \frac{\tau A}{2}\right) B^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n\right)$$

Изначально, это $\|z_{n+1}\|^2$

Чтобы $\|z_{n+1}\|^2 < \|z_n\|^2$ то нужно чтобы второе слагаемое было > 0

Тогда $B - \frac{\tau A}{2} > 0 \leftarrow$ должно быть так

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B - \frac{\tau A}{2} > \delta E$$

Ед. матр-ца

Если мы воспользуемся выкладками, в деталях перед теоремой, то

$$(1) \left(\left(B - \frac{\tau A}{2}\right) B^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n\right) \geq \delta \|B^{-1}Az_n\|^2$$

$$\|z_{n+1}\|_A^2 - \|z_n\|_A^2 + \underline{2\tau\left(\left(B - \frac{\tau A}{2}\right) B^{-1}Az_n, B^{-1}Az_n\right)} = 0$$

Если мы уменьшим это $\uparrow$ то получим выражение меньше 0.

Если подставим в (1), то тогда

$$\|z_{n+1}\|_A^2 - \|z_n\|_A^2 + \delta \|B^{-1}Az_n\|^2 < 0$$

$$\Rightarrow \|z_n\|_A^2 > \|z_{n+1}\|^2 + \delta \|B^{-1}Az_n\|^2$$

$\Rightarrow$ на каждом шаге z_{n+1} будет меньше $\Rightarrow$ процесс будет сходится

$\Rightarrow \|z_n\| \to 0$
$n \to \infty$

Достаточно оценить норму разных процессов чтобы сказать что процесс будет сходится

Как подбираются ω и τ?

1) Метод релаксации

$B = E \qquad B - \frac{\tau A}{2} = E - \frac{\tau A}{2} > 0$

$$\|A\| = \sup_x \frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}$$

↑ точная верхняя грань

Тогда $(Ax, x) \le \|A\| \|x\|^2 = \|A\| (x, x)$

Здесь т.к. A и E — пол-но определенные, то

тогда $A < E\|A\|$ или $\frac{A}{\|A\|} \le E$

$$E - \frac{\tau A}{2} \geq \frac{A}{\|A\|} - \frac{\tau A}{2} = \left(\frac{1}{\|A\|} - \frac{\tau}{2}\right) A > 0$$

т.к. A пол-но опр-ная матрица, то чтобы это условие выполнялось, то $\frac{1}{\|A\|} - \frac{\tau}{2} > 0$

$\Rightarrow \tau < \frac{2}{\|A\|}$ — это и есть оценка τ

И при этом $\tau > 0$, т.к. иначе процесс будет расходится

2) Метод верхней релаксации

$B = D + \omega A_4$

D - диагон. матрица

A_4 - верхняя треугольная матрица

ω - параметр. ($\omega = \tau$ здесь)

Оцениваем $B - \frac{\tau A}{2} = D + \omega A_4 - \frac{\omega}{2} A =$

$= D + \omega A_4 - \frac{\omega}{2} A_4 - \frac{\omega}{2} D - \frac{\omega}{2} A_V =$

$= \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) D + \frac{\omega}{2}(A_4 - A_V) > 0$

Матрица A - симметричная, т.е. $A = A^T$

Тогда получается, что $A_4 - A_4$ когда действуя на $\vec{x}$ - вектор

$$\left(\left(B - \frac{\tau A}{2}\right)x, x\right) = \left(1 - \frac{\omega}{2}\right)(Dx, x) +$$

$$+ \frac{\omega}{2} \underbrace{((A_4 - A_4)x, x)}_{=0} = \left(1 - \frac{\omega}{2}\right)(Dx, x) > 0$$

и вот это будет давать нуль в силу $A = A^T$

т.к. A - пол-ная матрица, то необход. усл-е (из св-в матрицы A) $\Rightarrow D > 0$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{\omega}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \omega < 2$$

3) Метод Якоби.

$$B - \frac{\tau A}{2} = D - \frac{A}{2} > 0$$

$\Rightarrow \quad A < 2D$

Чтобы метод якоби сходился, то нужно чтобы элементы на главной диагонали были хотя бы в два раза больше чем боковые, иначе $\|x_n - x_{n+1}\| \not\to 0$ $\Rightarrow$ расходится.

Плохо когда на главн. диагонали стоят элементы $\to 0$ $\Rightarrow$ процесс будет плохим $\Rightarrow$ не будет сходиться. (Нужно это проверять на каждом шаге).

Проблемы возникают с разреженными матрицами (нулей больше, чем других чисел (они могут стоять и на глав. диагоналях))

Задача собствен. значений матрицы (спектр матрицы)

Пусть мат-ца A есть и x - собств. вектор матр-цы A (т.е. $Ax = \lambda x$

λ - соб. число.

Для нахождения λ ищут $(A - \lambda E)x = 0$

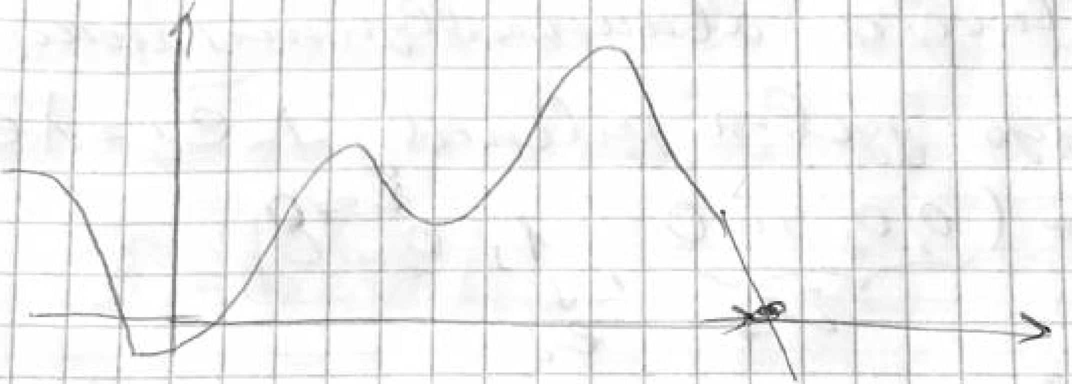
Чтобы имело решение

$$\det(A-\lambda E)=0$$

$$P_n(\lambda)=0$$

n – порядок матрицы

Для поиска соб. значений мы можем применить методы ~~линейной~~ алгебры



Можно найти соб. вектора

Предположим, что мы нашли λ, но будет погрешность с δ.

$$\overline{\lambda_i} \simeq \lambda_i$$

Тогда справа $(A - \lambda_i E) = x_0$

А это алгебр. условие, и даёт вектор x_1

Чаще всего для нахождения соб. векторов используется итерационный метод вращения (или метод Якоби)

Интерационный метод вращения. Метод Якоби.

Если A - симметр. матрица, то его ортогональное преобразование U такое что: $U^T A U = Диагонал(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Lambda$

В этом случае у матрицы Диагонал соб-ные вектора являются единичными

=> будут удов-ть равенству $\Lambda \overline{e_i} = \lambda \overline{e_i}$

где $\overline{e_i} = (\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{i-1}, \underset{\overline{e_i}}{1}, 0, \ldots 0)$

$$U^T A U \overline{e_i} = \lambda_i \overline{e_i}$$

Если воспользуемся ортогонал. преобра-зованием $U^{-1} = U^T$

Тогда $\underbrace{U U^T}_{E} A U \overline{e_i} = U \lambda_i \overline{e_i}$

$$A \underbrace{U \overline{e_i}}_{\overline{x_i}} = \lambda_i \underbrace{U \overline{e_i}}_{}$$

$\overline{x_i}$ - соб вектор матрицы

Матрица U строится интерационно через после-ть элементарных вращен относительно φ

$$U_{kl}(\varphi) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & \sin\varphi & \cos\varphi & & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\tilde{A} = U_{kl}^T A U_{kl}$$

1) $B = A U_{kl}$

$$b_{ik} = \sum_j a_{ij} (U_{kl})_{jk} = a_{ik}\cos\varphi + a_{il}\sin\varphi$$

$$b_{il} = \sum_j a_{ij} (U_{kl})_{il} = a_{ik}(-\sin\varphi) + a_{il}\cos\varphi$$

$$\tilde{A} = U_{kl}^T B$$

$$(\tilde{A})_{ki} = \sum_j (U_{kl}^T)_{kj} b_{ji} = \cos(\varphi) \cdot b_{ki} + \sin(\varphi) b_{li}$$

$$(\tilde{A})_{ei} = \sum_j (U_{ke}^T)_{ej}\, b_{ji} = (-\sin\varphi)\, b_{ki} + $$
$$+ \cos(\varphi) \cdot b_{ei}$$

А как выбирается φ?

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{ke}}{a_{kk} - a_{ee}}$$

$|\varphi| < \frac{\pi}{4}$ – обычно выбирается

Метод оптимизации.

1. Поиск экстремума непрерывных ф-й
   - а) Ф-ция одной переменной
   - б) Ф-ция многих переменных
2. Поиск экстремума дискретной функции
3. Поиск оптимальных (параметров) решений для функционала.
   - а) поиск оптимальных параметров
   - б) поиск оптимального решения

Теория оптимального управления

① и ② вроде бы близки, но решения ур-ний отличаются

$$\Delta y = y_n - y_{n-1} \qquad y' = f(x, y)$$

$$y_n - y_{n-1} = \underbrace{\Delta x}_{1} \cdot f(x_n, y)$$

можно отнормировать к время 1,

Тогда решения могут не совпадать с решением исходной ф-ции

Теория игр. занимается выработкой стратегии систем при взаимодействии других систем. (каждая из сторон приходит к выигрышу)

(Книга Таха)

Экстремум непрерывных ф-ций одной переменной.

Есть ф-ция $y = \Phi(x)$ и знаем, что точка $x = x_0$ - экстремум $\Phi(x)$, если:

$$\Phi'(x_0) = 0$$

Опр. Если x_0 - локальный минимум, то

если $\exists$ ε-окрестность точки x_0 : $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)$

$\Phi(x_0) < \Phi(x)$.

x_0 - локальный максимум $\Phi(x)$, если -//-

$\Phi(x_0) > \Phi(x)$.

<u>Замечание</u>. $\max \Phi(x) = \min(-\Phi(x))$.

Если нужно найти max, то переделывают $\Phi(x)$ на $-\Phi(x)$ и решают задачу на min.

Пусть $\Phi(x)$ в окрестности точки min x^*, т.е.

$$x^* = \min_{x \in D} \Phi(x).$$

Выбор области D (в зависимости от того где ищем min (их может быть несколько) - это унимодальность функции (т.е. один экстремум)

$$\Phi(x) = \Phi(x^*+h) = \Phi(x^*) + \overset{=0}{\Phi'(x^*)}h + \frac{h^2}{2}\Phi''(x^*) + o(h^3)$$

Чтобы был min, нужно чтобы $\Phi''(x^*) > 0$

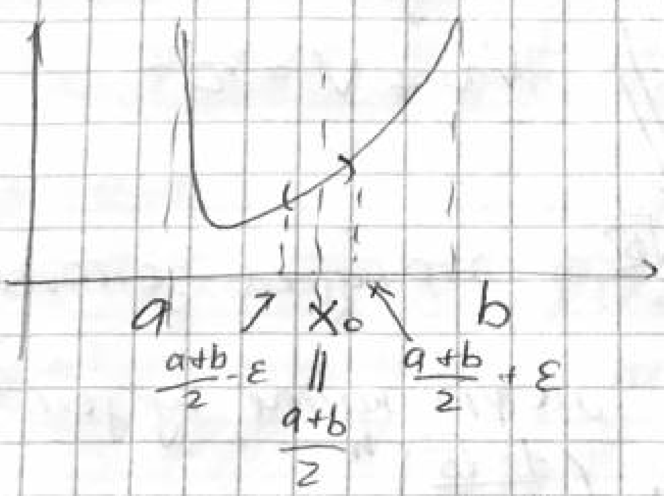
Методы одномерного поиска.

① Метод дихотомии (или деления отрезка пополам)

② Метод золотого сечения.

Метод дихотомии.

Пусть $y = \Phi(x)$ определена в области D, она является унимодальной.



Задаём $x_0 = \frac{a+b}{2}$

Если $\Phi(x_0+\varepsilon) > \Phi(x_0 - \varepsilon)$

Если да, то $b = \frac{a+b}{2} + \varepsilon$

Если нет, то $a = \frac{a+b}{2} - \varepsilon$

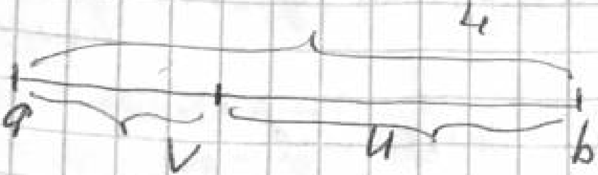
Возвращаемся назад.

if $(b-a) < \varepsilon \rightarrow$ то $x_0 = \frac{a+b}{2}$ и заканчиваем.

Если нет, то заново делим отрезок.

Аппроксимация сжатием обеспечивает метод Кантора о сжимающихся отрезках ⑦

Метод золотого сечения



кладём так (всегда можем отнормировать)

$$\begin{cases} \frac{L}{U} = \frac{U}{V} = \tau \\ U + V = L \end{cases} \quad (L = 1) \Rightarrow \quad \begin{matrix} V = U^2 \\ V = 1 - U \end{matrix} \; \Bigg| \Rightarrow$$

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0$$

$$L = U\tau = V\tau^2$$

$$U = V\tau$$

$$V\tau + V = \tau^2$$

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ — это наз-ся золотым сечением

Число Фибоначчи можно найти из зол. сечения

$$\Phi_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

1, 1, 2, 3, ...

$$\Phi_n = \Phi_{n-1} + \Phi_{n-2}$$ — это рекурсивное соотношение.

Теоретически метод золотого сечения должен быстрее сходится, чем метод дихотомии (лучше на константу). Но в сущности они одинаковы.

Метод парабол (Метод Ньютона)

Идет из разложения Ф-ции в ряд Тейлора.

Пусть а) $\Phi(x) \in C^2[a,b]$

Тогда в окрестности точки x_k

$$\Phi(x) = \underbrace{\Phi(x_k) + \Phi'(x_k)(x-x_k) + \frac{\Phi''(x_k)}{2}(x-x_k)^2}_{\psi(x_k)} + o\left((x-x_k)^2\right)$$

↑ мы это обрываем

Если x_{k+1} - точка экстремума Тогда

$\Phi'(x_{k+1}) \simeq 0$ (нуль того порядка, что нас устраивает

Относительно x $\psi(x_k)$ - кривая второго порядка, а именно парабола.

В точке x_{k+1} $\psi'(x_{k+1}) = 0$.

Тогда $\psi'(x_{k+1}) = \Phi'(x_k) + (x-x_k)\Phi''(x_k) = 0$

↑ подставляем x_{k+1}

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\Phi'(x_k)}{\Phi''(x_k)}$$ - формула Ньютона (решение нелинейного уравнения $\psi'(x) = 0$)

Иногда нельзя вычислить $\Phi'(x_k)$ и $\Phi''(x_k)$

Тогда используют формулу с

б) Если не берем $\Phi'(x_k)$ и $\Phi''(x_k)$

тогда можно интерпретировать первые три слагаемых в $\Phi(x)$ как многочлен

$$N(x) = \Phi(x_k) + (x - x_k)\,\Phi(x_k, x_{k-1}) +$$

разделённая разность первого порядка

$$+ (x - x_k)(x - x_{k-1}) \cdot \Phi(x_k, x_{k-1}, x_{k-2})$$

это второго порядка

$$\Phi(x_k, x_{k-1}) = \frac{\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$\Phi(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}) = \frac{\Phi(x_k, x_{k-1}) - \Phi(x_{k-1}, x_{k-2})}{x_k - x_{k-2}}$$

По сути заменили функцию параболой. Можно сказать что вершина и его экстремум.

$$N_x' = 0 = \Phi(x_k, x_{k-1}) + (2x - (x_k + x_{k-1})) \cdot$$
$$\cdot \Phi(x_k, x_{k-1}, x_{k-2})$$

Тогда

$$x_{k+1} = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} - \frac{\Phi(x_k, x_{k-1})}{\Phi(x_k, x_{k-1}, x_{k-2})}$$

По сути это следствие линейных ур-ний.

$$|x_{k+1}-x^*| \le C|x_k - x^*|^{4/3}$$

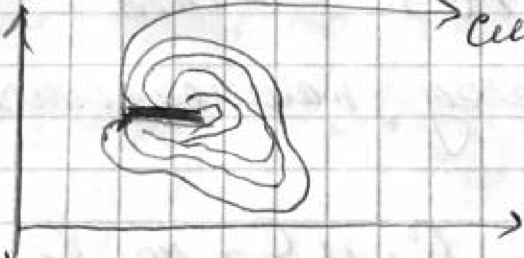
Если говорим о функции многих переменных.

Экстремум функции двух переменных. Рельеф ф-ции (2-х перем. ф-ч)

1) В области поиска с функцией все понятно и она представляет собой чашу нач-ся котловинная

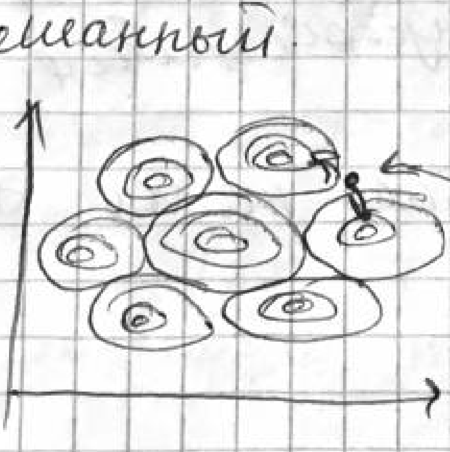
∀ методы дадут min

2) Овражный рельеф.
Не один, а множество минимумов,



сложно здесь найти направление ф-ла пологая

3) Смешанный.



Нужно аккуратно выбирать рабочую точку.
если выбрали так то можем попасть в одну из двух точек

Для многих переменных фиксируем одни и выбираем другие.
(строим срез по двум переменным)

$$Y = C_1 + C_2 \cdot P_{\$} + C_3 P_{oil} + C_4 V_4$$

доход населения сегодня; курс денег (доллара); курс нефти; всё другое

Нужно подобрать C_1, C_2, C_3, C_4, так чтобы в многомерном пространстве получили нормальный доход (и чтобы была точка min)

$(Y_t - \overline{Y}_t)$ — отклонение (ошибка) реал. от оцененного

нормальное; оцененное

$$\sum_t (Y_t - \overline{Y}_t)^2 \to \min$$

Получили метод наименьших квадратов

Но бывает что C_1 и C_2 не всегда определяется. Чем больше параметров, тем ф-ция менее устойчива.

Мы можем попасть не на тот эксперимент в мы от хотели,

T – в комнате температура

$T \approx f(\underset{\text{толщина стен}}{l}, \underset{\text{высота}}{h}, \underset{\text{площадь}}{S}, \underset{\text{кол-во людей}}{n}, \overset{\text{площадь остекления}}{S_{ст}}, T_{батарей}$

$T_1, \dots T_{10}, T_{за\ окном})$

T – температура находящихся людей

Многое зависит от того что оптимизируем, как и что за параметры важны

<u>Применение одномерного поиска.</u>
<u>(Методы нулевого порядка)</u>

Из многомерного пр-ва переходим в одномерное.

1) Создаем цикл по оценки близости к экстремуму
$\|\vec{x}_i - \vec{x}_{0}\| \leq \varepsilon$ (?)) $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$

если выполняется → выход

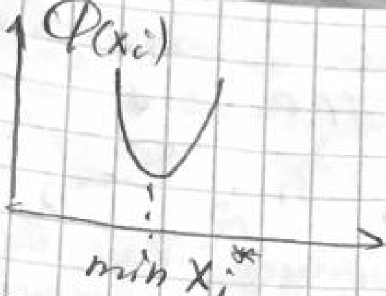
↓ если нет

2) Организуем цикл перебора координат

Фиксируем коор-ты x_j, где $j \neq i$

x_i – свободные $(i = \overline{1,n})$

Ищем минимум по одной из координат.



Далее берём след. координату

Выбрали стартовую точку

$\Phi(x_1'', x_2)$ вместо x_2 – фиксируем

Ищем min для x_1, после её фиксируем и ищем для x_2

Т.к. коор-ты закончились проверяем норму. Если она достаточно большая то заменяем $\overline{x_0} = \overline{x}_1$. Опять входим в цикл по координатам

Методы первого и второго порядка (Градиентные методы)

Если есть $y = \Phi(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$

Мы не можем искать во всём пространстве можем искать $x \in D \subset \mathbb{R}^n$

$$\nabla \Phi(\bar{x}) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\Phi(\bar{x})$$

Матрица Гессе $Gess(\Phi(x)) = H(x) =$

$$= G(x) = \begin{vmatrix} \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{xz} \\ \Phi''_{yx} & \Phi''_{yy} & \Phi''_{yz} \\ \Phi''_{xz} & \Phi''_{yz} & \Phi''_{zz} \end{vmatrix}$$

Есть точка $\vec{x}$, $\Delta \vec{x} = h\vec{p}$

h – аналог дельта x $\vec{p}$ – един. вектор $\|\vec{p}\| = 1$

$h = \|\Delta x\|$ – шаг в направлении p.

$$\Phi(\vec{x} + h\vec{p}) = \Phi(\vec{x}) + d\Phi(\vec{x}) + \frac{1}{2} d^2\Phi(\vec{x}) + o(\|\Delta x\|^2) =$$

$$= \Phi(\vec{x}) + \underbrace{(\operatorname{grad}\Phi(\vec{x}), \vec{p})}_{\frac{\partial \Phi}{\partial p}} h + \frac{h^2}{2} \underbrace{(G(\Phi(x))\vec{p}, \vec{p})}_{k(x)} + o(\|\Delta x\|^2)$$

$k(x)$ ф-ция кривизны пов-ти функции в данной точке

Необ. усл. экст-ма!

$$\|\operatorname{grad}\Phi(x^*)\| = 0$$

$$G(\Phi(x^*)) > 0$$

$$\Psi(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) + (\operatorname{grad}\Phi(x), \vec{p})h + \frac{h^2}{2}(\underbrace{G(\Phi(x))}_{A}\vec{p}, \vec{p})$$

Грубо аппроксимируем нашу пов-ть параболой

$A = A^T$ – симметричная

$\det A \neq 0$

$$\Psi(\vec{x} + \vec{p}h) = \frac{1}{2}(A(\vec{x} + \vec{p}h), (\vec{x} + \vec{p}h)) + (b, \vec{x} + \vec{p}h) + c$$

Это квадратичная форма относительно x.
$\vec{b}$ - это градиент.

$$= \psi(x) + h(A\vec{x} + \vec{b}, \vec{p}) + \frac{h^2}{2}(A\vec{p}, \vec{p})$$

Стац. точка

Градиент от-но h это $(A\vec{x} + b, \vec{p}) = 0$,

но $\vec{p} \neq 0$ $\Rightarrow$ $A\vec{x} + \vec{b} = 0$

$$\vec{x}^* = A^{-1} b$$

Квадратичная функция.

$$\psi(x) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{b}\vec{x}) + c$$

Такая ф-ция часто получается, т.к. для физ. величин часто её интерпретируют

Если дадим вектору $\vec{x}$ приращение

$$\psi(\vec{x} + h\vec{p}) = \frac{1}{2}\left(A(\vec{x} + h\vec{p}), (\vec{x} + h\vec{p})\right) +$$

$$+ (\vec{b}, \vec{x} + h\vec{p}) + c = \underbrace{\left(\frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{b}, \vec{x}) + c\right)}_{=\psi(x)} +$$

$\vec{p}$ - единичный вектор направления

h - шаг.

$$+ h\left(\frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{p}) + \frac{1}{2}(A\vec{p}, \vec{x}) + (\vec{b}, \vec{p})\right) +$$

$$+ \frac{h^2}{2}(A\vec{p}, \vec{p}) = \psi(x) + h\left((A\vec{x} + b), \vec{p}\right) +$$

$$+ \frac{h^2}{2}(A\vec{p}, \vec{p})$$

$\operatorname{grad}\psi = \frac{1}{2}(A\vec{x}+\vec{b})$

$\operatorname{hess}\psi(\vec{x}) = A$

гессиан

Можем оценить направление роста / падения.

Чтобы был экстремум требуем, чтобы

$\operatorname{grad}\psi = 0 \Rightarrow A\vec{x}+\vec{b}=0$ или $\vec{x}^* = A^{-1}\vec{b}$

$\psi(x^* + h\vec{p}) = \psi(x^*) + \frac{h^2}{2}(A\vec{p}, \vec{p})$

поведение функции в окрестности стационарной функции будет определяться поведением матрицей A.

Если матрица симметричная, то $\exists$ собств. вектора матрицы и их можем разложить по базису

$\exists$ ортонормированный базис соб. векторов матрицы A.

Можем разложить по базису вектор

$\vec{p} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x_i}$ $\quad \alpha_i$ — коэфф. разложения

Тогда $\psi(\vec{x} + \cancel{h}\ \ ) = \psi(\vec{x}) + \frac{h^2}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \vec{x_i}, \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{x_j}\right) = \psi(\vec{x}) + \frac{h^2}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i\right)$

Характер функции определяется

соб. значения вектора $\vec{p}$, от направления и от отклонения от стационарного состояния)

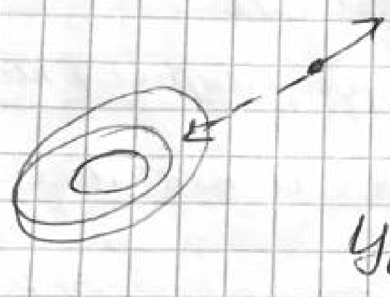
Отклонение зависит от рельефа.

Методы первого метода (Градиентные методы)

① Метод наискорейшего спуска.

Есть функция постоянного рельефа

Берём антиградиент: Перебираем значения функции при в $\psi(x)$ мала будь точку и осуществляем



Условие: $\psi(\vec{x_0}+\alpha\vec{p}) = \psi(\vec{x_0})$

Относительно шага получаем функцию одного переменного $\vec{p} = -\mathrm{grad}\,\psi(\vec{x_0})$

Пример: $z = 2x^2+y^2-3xy+4x-2y$

Вычисляем $\mathrm{grad}\, z =$

$$\begin{cases} z'_x = 4x-3y+4 \\ z'_y = 2y-3x-2 \end{cases}$$

Это подпрограмма вычислителя

Это градиент

function $z(x, y)$ ← задаем ф-цию

Задаем x_0, ε, где ε – точность с к

хотим найти минимум

Задаем $z(\vec{x_0})$, $grad\, z(\vec{x_0}) = \{p_1, p_2\}$

$z(\vec{x_0} + \alpha\vec{p}) = 2(x_0 + \alpha p_1)^2 + (y_0 + \alpha p_2)^2 -$

$- 3(x_0 + \alpha p)(y_0 + \alpha p_2) + 4(x_0 + \alpha p_1) -$

$- 2(y_0 + p_2) + 1$

Здесь ур-ие минимум

1) $z'_\alpha = 4p_1(x_0 + \alpha p_1) + 2p_2(y_0 + \alpha p_2) -$

$- 3p_1(y_0 + \alpha p_2) + 4p_1 - 2p_2 = 0$

получаю линейное ур-ие λ.

Если оно нелинейное, а нужно применить

другой способ решения.

2) Будет $\alpha \in [\varepsilon, 1]$. $z\phi = z(x_0)$

перебираем все α присваиваем

Задаем цикл for $\alpha = \varepsilon, 1$, step ε.

$if(z(\vec{x_0} + \alpha\vec{p}) < z\phi$

Если $\alpha_0 = \alpha$, то $z\phi = z(\vec{x_0} + \alpha\vec{p})$

$$\vec{x_0}' = \vec{x_0} + \alpha \vec{d} - \vec{p}$$

$$z(\vec{x_0}'),\ \operatorname{grad} d(\vec{x_0}')$$

И задаем условие выхода из цикла

$$\| \operatorname{grad} \vec{x_0} \| < \varepsilon_3$$

$$|z(\vec{x_0}') - z(\vec{x})| < \varepsilon_1$$

или $\| \vec{x_0}' - \vec{x_0} | = \varepsilon_0$

Идеально, чтобы было так и они должны в ~~месте~~ выполнятся.

Но если нет, то берем одно (в основном компьютер долго будет считать или будет бегать около минимума

$$\vec{p} = \frac{1}{\| \operatorname{grad} \vec{x_0}}$$

Если условие $z(\vec{x_0} + \alpha \vec{p}) < z\vec{d} \Rightarrow$

если не справились $\Rightarrow \alpha = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$

продолжаем цикл. Чаще выбирают некое τ и α умножают на него, но так дольше.

Если да, то цикл закончен.

Всё это начинает плохо работать когда

функция менее гладкая (или вообще не гладкая)

Если бы была одномерная задача, то можем выделить нужный промежуток а вот уже для более высокого порядка будет проблематично сделать.

Теорема.

Пусть 1) функция $\Phi(\vec{x})$ — дважды дифференцируема, 2) множество уровня:

$D(\Phi(\vec{x}_0)) = \{\vec{x} : \Phi(\vec{x}) \leq \Phi(\vec{x}_0)\}$ — оно ограничено и замкнуто; 3) на каждой итерации а) направление спуска $\vec{p}_k$

номер итерации

$\exists\ \beta < 0$, что $\vec{p}_k \vec{g}_k \leq \beta < 0$

где $\vec{g}_k$ — значение grad на k-ой итерации

б) $\Phi(\vec{x})$ — и существенно убывает" =>

$\exists$ некое число μ_1 и μ_2: $0 < \mu_1 < \mu_2 \leq 1$,

что $\mu_1 h_k(\vec{g}_k, \vec{p}_k) \leq \Phi_k - \Phi_{k+1} \leq -\mu_2 h_k(\vec{g}_k, \vec{p}_k)$

Тогда
$\lim_{k \to \infty} |\vec{g}_k| = 0$ или M_k стремится к стационарной точке M^*.

Это условие сходимости градиентных методов

Замечание.

1) На каждом шаге направление спуска $\perp$ границе линии уровня

2) Скорость сходимости наискор. спуска такая же как и у покоор-ного, т.е. линейная

3) Сходимость метода наискор. спуска характеризуется след. величиной:

$$\varkappa = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)} = \|A\| \, \|A^{-1}\| = \underbrace{\mathrm{cond}\, A}_{\text{число обусловленности матрицы } A}$$

$$\psi(\vec{x}_{k+1}) - \psi(\vec{x}^*) \leq \underbrace{\left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right)^2}_{\text{коэффициент сжатия на каждом шаге}} \left(\psi(\vec{x}_k) - \psi(\vec{x}^*)\right)$$

Методы второго порядка.

Используют матрицу Гессе.

Пусть есть произвольная ф-ция Φ и задаем разложение.

$$\Phi(\vec{x}_k + \vec{p}) = \Phi(\vec{x}_k) + g_k \vec{p}_k + \frac{1}{2}(G_k \vec{p}_k, \vec{p}_k) + o(\|\vec{p}\|^2)$$

где $\vec{p}$ – и шаг и направление

Необ. условие: $grad \psi = 0 \Leftrightarrow G_k \vec{p}_k + \vec{g}_k = 0$

где $\vec{g}$ – градиент

Тогда $\vec{p}_k = -G_k^{-1} \vec{g}_k$

Таким образом учитывается поиск минимума

$$\Rightarrow \vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \vec{p}_k = \vec{x}_k - G_k^{-1} \vec{g}_k$$

Это идея метода Ньютона.

Замечание!

① Для квадр. функции $\psi(x)$ метод находит минимум за одну итерацию.

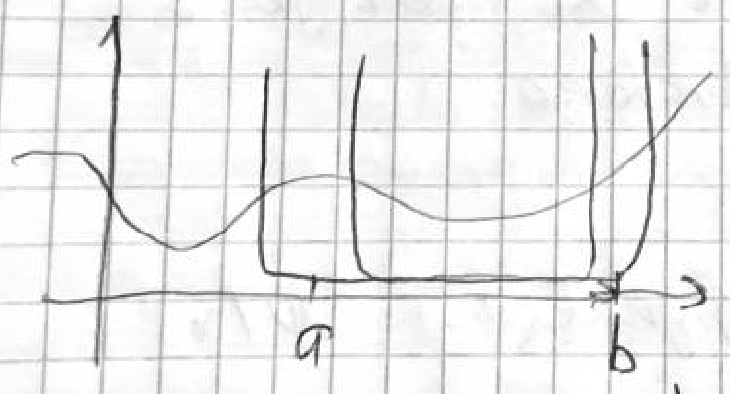
② В окрестности невырожденного экстремума (т.е. без обратного) имеет квадратичную форму (вид) ($G_k > 0$)

(3) Метод Ньютона сводится к решению линейной системы для каждой итерации для определения оптимального направления (Если функция более высокого порядка)

(4) Если гессиан регенерируется (фиксируется) на каждой итерации, то получается метод Ньютона-Рафсона.

Экстремум в огранич. области.

Для решения поиска экстремума или при ограничениях используются штрафные функции.



Штраф. ф-ция: 1) внутренняя которая целиком лежит внутри области экстремума

2) внеш. - содержит внутри себя область экстремума

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x \in D \text{ — область определения} \\ \infty, & x \to \text{подходит к границе}, \; x \notin D \end{cases}$$

Пример:

1) Внешняя

$$R_l(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i(l)\, \varphi^2(g_i(x))$$

l - штрафовой параметр

g_i - ограничение

Есть функция $z = f(\vec{x})$ и есть набор условий

$$g_i(\vec{x}) \leq 0 \qquad i = \overline{1, m}$$

$$r_i(l) \to \infty \quad \text{при } l \to \infty$$

$$\varphi(y) = \max\{0, y\} = \frac{1}{2}(y + |y|)$$

$$\varphi^2(y) = \frac{1}{2} y (y + |y|)$$

$$\frac{d}{dy} \varphi^2(y) = y + |y|$$

2) Внутренняя

$$R_l(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{r_i(l)}{f_i(x)}$$

$$R_l(x) = -\sum_{i=1}^{m} r_i(l) \ln(-g_i(x))$$

$$r_i(l) \to 0 \quad \text{при } l \to \infty$$

Пример: $3x_1^2 + x_2^2 \to \min$

$D = \{ x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0,\ x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \}$

$x_1 \geq 0$

Можем построить ф-цию:

$F(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + b\left(\left(\max\left(0, x_1^2 + x_2^2 - 1\right)\right)^2 + \right.$

$\left. + \left(\max\left(0, x_1 + x_2 - 3\right)\right)^2 + \left(\max\left(0, -x_1\right)\right)^2 \right)$

$F_b(\vec{x}) = 3x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{b}\left[\frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1} + \frac{1}{x_1 + x_2 - 3} - \frac{1}{x_1}\right]$

Минимизация функционала.

1. Пусть есть функционал $\Phi[y(x)]$ и нужно найти такую y^* где $x \in D$ у всех $y(x) \in C^n[D]$ что $\Phi[y^*(x)] \to \min$

Для определения min и max функций используют норм.

2. Предположим, что $\Phi[y] = \int_a^b F(y, y', \dots, y^{(n)})\,dx$

$A[y] = f$ нужно найти y, в минимизирует оператор.
↑оператор

Сглаживающий оператор Тихонова.

$$M[y(x)] = \underbrace{\|A[y]-f\|^2}_{\text{отклонение от 0.}} + \alpha\,\Omega[y(x)]$$

$\alpha = const$ $\quad 0 < \alpha \ll 1$

$\Omega[y(x)]$ – функционал со свойствами нормы

$\Omega[y(x)] < const$ ← в задача наперёд.

$$\|A[y]-f\|^2 = \|\hat{f}-f\|^2 = \delta^2 \to 0$$

при приближении t_n

- Теория оптимального отклонения
- Метод пробных ф-ций.

Метод пробных функций

Основные положения: необходимо подобрать ф-цию $y \in C^n[x]$ с параметром. т.е. переходим к минимизации функции с параметром, где в качестве параметров выступают сами эти переменные.

$$Y_\alpha = \{y_t(x;\vec{a}) = y_t(x; a_1, \dots, a_n) \mid x \in X, a_i \in R\}$$

Получаем $\Phi[y_n(x)] = F_n(\vec{a})$

$\vec{a}^*$: $F_n(\vec{a}^*) = \inf\limits_{\alpha \in \mathbb{R}^n} F(\vec{\alpha})$ при $n \to \infty$

Должны достигнуть т.к.,

1) Построить множество вложенных классов

$Y_n \subset Y$, т.е. $Y_1 \subset Y_2 \subset \dots \subset Y_n \subset Y$

2) В каждом этом классе решаем задачу минимизации.

Должны получить минимизирующую функцию

$\Phi(Y_1^*) < \Phi(Y_2^*) < \dots < \Phi(Y_n^*)$

<u>Теорема</u>: о сходимости функциональной последовательности.

Если послед-ть минимизирующих функций $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ полна в Y и если функционал $\Phi[y]$ принадлежит классу непрерывных функционалов в D тогда посл-ть

$\Phi[y_n^*] \to \Phi[y^*]$ при $n \to \infty$

<u>Теорема</u>: Если функционал $\Phi[y_n^*]$ удовлетворяет условию, что

$$\Phi[y] - \Phi[y^*] > \alpha \|y - y^*\|^\beta \quad \alpha, \beta > 0$$

тогда функциональная посл-ть $\Phi[y]$ сходится в классе нормы, в используемой для оценки

Получаем $y_n \to y^*$

Норма оценки нормы.

① Пусть $y \in C^p[a,b]$ Тогда норма функции в этом классе вычисляется так

$$\|y\|_{C^p[a,b]} = \max_{[a,b]} \{|y|, |y'|, ..., |y^{(p)}|\}$$

②

$$\|y\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y|$$

Желательно, чтобы ф-ция была кусочно гладкая, а лучше чтобы не было скачков.

Опр. Бесконечная система $\{y_n(x)\}_{x \in [a,b]}$ называют полной на $[a,b]$ Если $\exists_{\forall \varepsilon > 0}$ такой номер $N > 0$ такое что $n > N$ найдется $y_n[x]$ такое что $|y_n - y|_{x \in [a,b]} < \varepsilon$ где y - наперёд заданное значение.

Условие Коши: $\exists N: \forall n, m \in Z$
$|y_n - y_m| < \varepsilon$

Замечание: (по построению

Обычно ~~вложенные~~ классы представляют собой набор для базисных функций класса.

Пример
$$y = a_t x^t + a_{t-1} x^{t-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
Набор базисных функций
$$Y_0 = \{1, x, x^2, \dots x^t\}$$

$$Y_0 \{C_0\} \subset Y_1 \{C_1 x + C_0\} \subset Y_2 \{\dots\}$$
по сути это проекция нашего пространства Y_0 на более узкое пространство

Могут представлять и непересекающиеся множества

Метод Ритца

Н-р, среди всех линейных найти y, в даст наибол. значение, далее перейти к квадратич. и найти там самое и т. д., то есть идет от легкого к сложному.

$\exists$ ур-ние $Ay = f$

под A можем понимать матрицу, может и оператор.

Считаем $A^* = A$ — самосопряжённый и положительно определённый

Нужно найти $Ay \to \min$

При этом мы можем и знать min.

Тогда $\Phi[y] = \|y\|_A^2 - 2(y, f) =$

по сути оцениваем норму (Ay, y)

~~$\|Ay - f\|^2$ — норма, сопряжённая матрице A соответствующая~~

$= (Ay, y) - 2(y, f) = \underbrace{(y, Ay) - 2(y, f)}$

И нужно найти min этого $\uparrow$

Пусть y лежит в окрестности y^*, в явная минимизирующей для данного функционала.

$y = y^* + \lambda \delta y$

$\Phi[y^* + \lambda \delta y] = (y^* + \lambda \delta y, A(y^* + \lambda \delta y)) -$

$- (y^* + \delta y, f) =$ ← это нужно минимизировать

$= \Phi[y^*] + 2\lambda(\delta y, Ay^* - f) +$

$+ \lambda^2(\delta y, A\delta y)$

Это получается парабола

(Можем всегда найти оптимальное значение для параметра λ.)

Дифференцируем по λ, получаем:

$$2(\delta y, Ay^* - f) + 2\lambda(\delta y, A\delta y)$$

тогда y^* — решение $\Rightarrow Ay^* - f = 0$

Тогда $\cancel{2\lambda}(\delta y, A\delta y) = 0$

и $(\delta y, Ay^* - f) \to 0$

Можем построить какую-то функциональную пос-ть, в будет этому удовлетворять

① Выберем пробную функцию следующего вида:

$$y_n(x; \vec{a}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

$\varphi_k(x)$ — базисные ф-ции

② $\Phi[y_n(x, \vec{\alpha})] = F(\vec{a}) = (y, Ay) - 2(y, f) =$

$$= \sum_k \sum_m \alpha_k \alpha_m (\varphi_k, A\varphi_m) - 2\sum_k \alpha_k (\varphi_k, f)$$

И это должно стремиться к 0.

$$F(\alpha) \to \min$$

③ Строим уравнение Эйлера.

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\varphi_m, A\varphi_k) = (\varphi_m, A)$$

Относительно α_k – линейная система $m = \overline{1,n}$

Сведение к задачам, в уже знаем

<u>Обыкновенные диф. уравнения.</u>
<u>Задача Коши.</u>

Среди всех решений находим одно, в удовлетворяет нач. условиям.

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ – задача Коши.

Для ДУ n-го порядка n нач. усл-й.

$$\begin{cases} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

$\exists$ $F(x, y, \dots y^{(n)}) = 0 \underset{\text{можем свести}}{\Longrightarrow} \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots y_n)$

Осуществляется переход от уравнения к системе

$\vec{y}(x_0) = \vec{y}$

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y'(x) \\ \dots \\ y_{n-1}(x) = y^{(n-2)}(x) \\ \frac{dy_n(x)}{dx} = f(x, y_1, y_2, \dots y_{n-1}) \end{cases}$$

Почему так делаем? Т.к. методы численные были созданы для ДУ 1-го порядка.

Чтобы их применить ДУ n-го порядка сводим к векторам

$$\begin{cases} \frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y_0} \end{cases}$$

Схема решения ДУ

1) Явная → отделена ф-ция, в мы ищем

2) Неявная $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots y_{i-1}, y_{i+1}, y_n)$

$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots y_n)$

Схема зависит от того, где прибавление слева или справа.

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ или $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$

В неявной схеме используют подход как применение неявных ур-ний.

Явные схемы.

Самый простой метод разложение в ряд Тейлора

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \ldots$$

Обычно $\downarrow$ до второго порядка...
Т.к. обычно более высшие члены уменьшают ~~сил~~ вид (они лучше интерполируют (вроде бы всё учитывают) но и оценка будет меньше

Метод Эйлера.

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x)$$

Исходное уравнение $\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$y'(x) \simeq \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ — так интерполировали.

Если y заменяется разностной схемой.

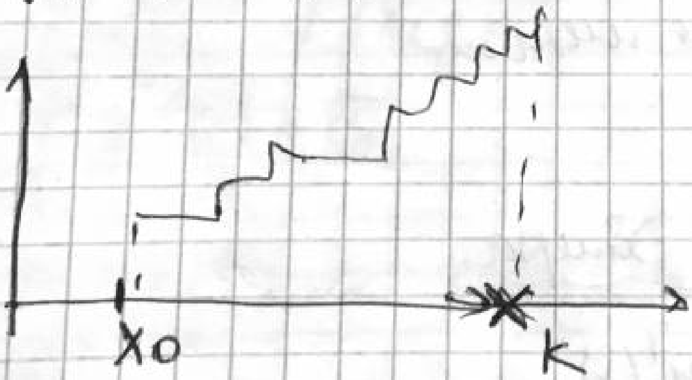
$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i) = y_i + hf(x_i, y_i)$

Если бы мы применили интерполяцию более высокими порядком, то

$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}(f'_x(x_i, y_i) - f'_y y_i) + \ldots$

В зависимости от того, какое приближение хотим применить — выбираем θ.

$y_{i+1} \simeq y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}(f'_x(x_i, y_i) + f'_y f(x_i, y_i))$



Как выбрать шаг, так чтобы не было лишних.

Получаем набор точек $y[1, ..., N]$

Нужно разбивать $h := \frac{h}{2}$

переприсвоение

Тогда получим массив с $2n-1$ ячейками

$[y_1[1, ..., 2N]]$

И не факт, что предыдущей вид ф-ции будет такой же как и при новом разбиении

Если интервал маленький, а можем смотреть по миньшим и по первым / последним.

Если разбиение правильно (правильная интерполяция,) то придём в тоже значение в конце

$$|y_N - y_{2N}| < \varepsilon$$

Подход, в в мы ограничиваемся первыми членами, т.е.

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(f x_i, y_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Если интервал маленький, то может
к нулю. При большом интервале
имеем быстроменяющиеся функции
нужен правильный интервал.
Нужно выделить характерные точки
и в них сравнить значение y
подходит для медленно меняющейся

Метод Рунге-Кутта.

Если функция гладкая, то функция
может быть вычислена (вычислена)
методом 1-го, 2-го порядков.
Если она колеблющаяся, то
3-й, 4-ый порядок нужны.

χ 2-го порядка.

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left(f'_x(x_i, y_i) + f'_{y_i} f(x_i, y_i)\right)$$

Неудобно т.к. нужно дифф-ть и по x_i и по y_i функцию f.

$y_{i+1} = y_i + h\,[\alpha f(x_i, y_i) + \beta f(x_i + \gamma h,$
$y_i + \delta h)]$

α, β, γ и δ - коэффициенты.
Они вначале неизвестны.
Но можем их сопоставить
Н-р:

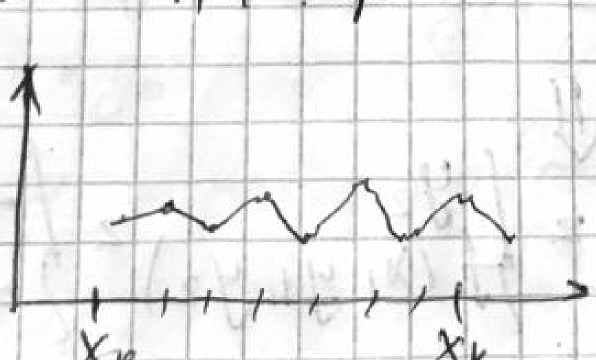
$$\alpha + \beta = 1$$
$$\beta\gamma = \frac{1}{2}$$
$$\beta\delta = \frac{1}{2} f(x_i, y_i)$$

Тогда $y_{i+1} = y_i + h\,[(1-\beta) f(x_i, y_i) +$
$+ \beta f(x_i + \frac{h}{2\beta}; y_i + \frac{h}{2\beta} f(x_i, y_i))$

$$0 < \beta \le 1$$

Стандартно выбирают $\beta = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$.
Применяем метод Эйлера при $\beta = 1/2$.

Выбираем сетку от x_0 до x_k
с шагом h. Дробим шаг, просчитаем, сравниваем, если меньше некоторого ε, то всё решено



4-го порядка.

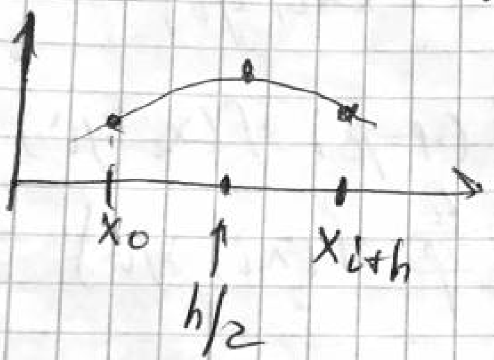
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$



По сути усреднение с определ весами.

Уравнение 2-го порядка.

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases} \qquad \begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} y_2 \\ f(x, y_1, y_2) \end{cases} = \begin{cases} f_1(\ ) \\ f_2(\ ) \end{cases}$$

полный набор

Разностная схема Рунге-Кутта будет выглядеть так.

$$\begin{pmatrix} y_1^{i+1} \\ y_2^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y_2^i + \frac{h}{6}(k_1' + 2k_2' + 2k_3' + k_4') \end{pmatrix}$$

получаем вектор

$$k_1 = y_2^i, \quad k_2 = y_2^i + \frac{h}{2}k_1', \quad k_3 = y_2^i + \frac{h}{2}k_2'$$

$$k_4 = y_2^i + hk_3'$$

$$k_1' = f(x_i, y_1^i, y_2^i), \quad k_2' = f(x_i + \frac{h}{2},$$

$$y_1^i + \frac{h}{2}k_1, \; y_2^i + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3' = f(x_i + \frac{h}{2}, \; y_1^i + \frac{h}{2}k_2, \; y_2^i + \frac{h}{2}k_2')$$

$$k_4' = f(x_i + h, \; y_1^i + hk_3, \; y_2^i + hk_3')$$

Методы Адамса.

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y'(x_0) = y_0 \end{cases} \longrightarrow y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx$$

Сводим к интегрированию правой части.

Разные методы в зависимости от того как считаем интеграл.

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx = y_i + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$$

Есть два метода: <u>неявная схема Адамса</u>

<u>Метод прогноз-коррекции (предиктор-корректор)</u>

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j f_{i+1-j} + \beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$y_{i+1}^{0} = y_i + \sum_{j=1}^{k} \lambda_i f_{i+1-j}$$

$$y_{i+1}^{m} = y_i^{m} + \sum_{j=1}^{n} \beta_i f_{i+1-j} + \beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}^{m})$$

<u>Пример:</u>

$y_{i+1}^{0} = y_i + hf_i$ – прогноз

$$y_{i+1}^{1} = y_i + \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

Уравнение в частных производных.

Основной недостаток - неустойчивость.

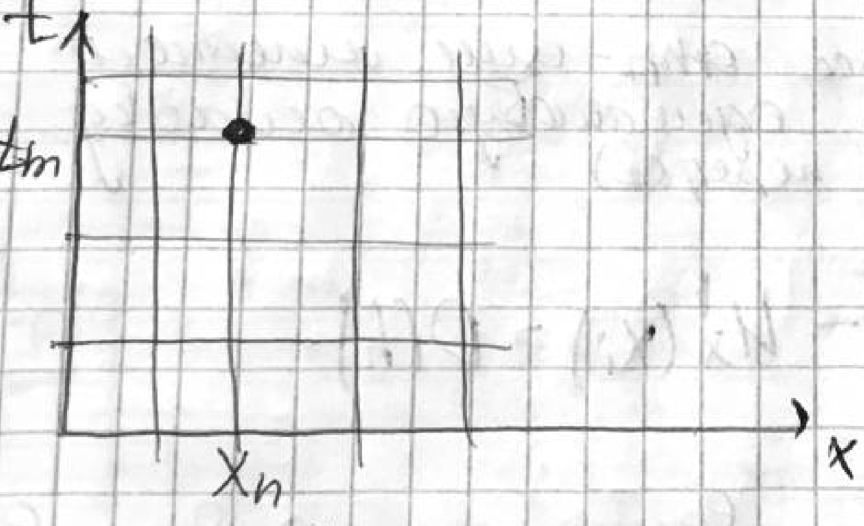
Мы строим сетку и по ней делаем приближение.

Разностная схема уравнения (одномерного) теплопроводности.

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t) \qquad 0 < x < l$$
$$U(x,0) = \mu(x) \qquad 0 \le t < T$$
$$U(0,t) = \nu(t) = 0$$

а) Конечно-разностная аппроксимация операторов первого порядка.

Разбиваем отрезок от 0 до l и от 0 до T



Шаг сетки считается однородным

$$\omega_h = \begin{cases} 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = l \\ x_n = x_0 + nh \end{cases}$$

$$\omega_\tau = \begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T \\ t_m = t_0 + m\tau \end{cases}$$

Введём обозначение:

$$y_n^m = y(x_n, t_m)$$

$$l_x y = \frac{y_{n+1}^m - y_n^m}{h}$$

приращение вперёд

$$l_{x^-} y = \frac{y_n^m - y_{n-1}^m}{h}$$ ← приращение назад

$$l_{\frac{x}{2}} y = \frac{y_{n+1}^m - y_{n-1}^m}{2h}$$ ← приращение серединное

Каким приращением пользоваться зависит от задачи.

Замечание! Все апр-ции лин-ого оператора имеют одинаковую ошибку (первый порядок)

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - u_x'(x_i) = O(h)$$

Если для $l_{\frac{x}{2}} y$ вычислено, то будет второй порядок

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - u_x'(x_i) = O(h^2)$$

б) Конечно-разностная аппроксимация $2^{го}$ порядка.

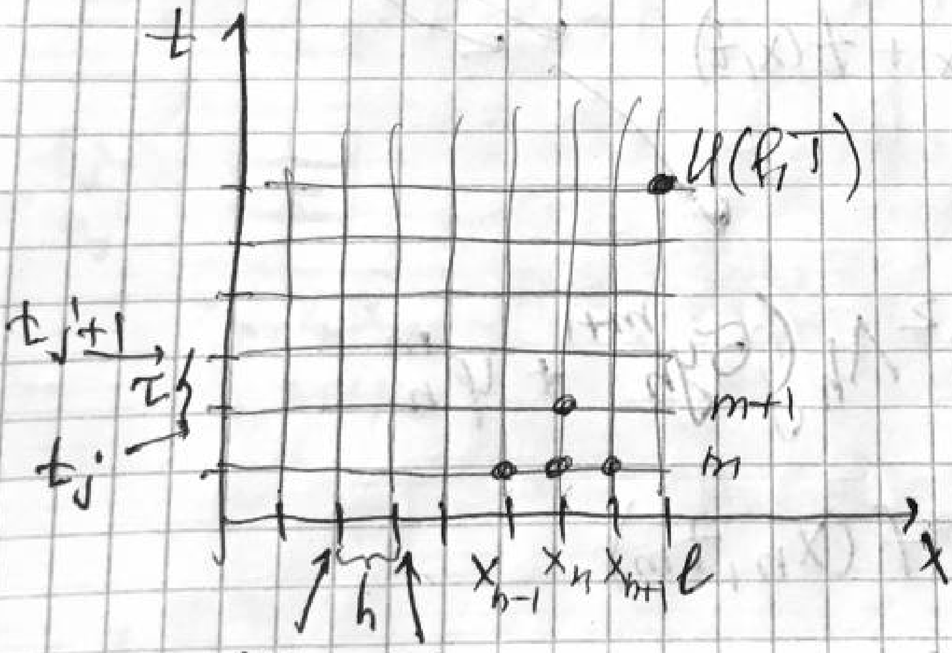
$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right)$$

~~до приращени~~ приращения в точке

$$y_{\bar{x}_i} = \frac{1}{h}\left(y_{\bar{x}_{i+1}} - y_{\bar{x}_i}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{2h}$$

$$u_{\bar{x}_i \bar{x}_{i-1}} = \frac{1}{h^2}\left(u(x_i+h) - 2u(x_i) + u(x_i-h)\right) - u''_{xx}(x_i) = O(h^2)$$

Разностная схема



Мы решаем при $t = 0$ как задачу Коши (нижний слой) вычислим аппроксимацию. Далее идём на другой слой.

г) Явная схема.

Если ф-ция быстро меняющаяся в слое, то можем получить больше точек. верхней нижний

Поэтому точек нижнего слоя может не хватать для верхнего.

Поэтому сразу задают общее дробление

Значение верхнего слоя определяет по одной точке из трёх точек нижнего.

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} = \frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau}$$

$$\Lambda_h y = \frac{1}{h^2}\left(y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m\right)$$

на слое с номером m

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} = a^2 \Lambda_h y \quad + \varphi_n^m$$

где $\varphi_n^m = f(x_n, t_m)$

$$y_n^{m+1} = y_n + \tau\left(a^2 \Lambda_h y + \varphi_n^m\right)$$

Есть гран. и нач. условие. Выражаем значение след. слоя от значения на предыдущем.

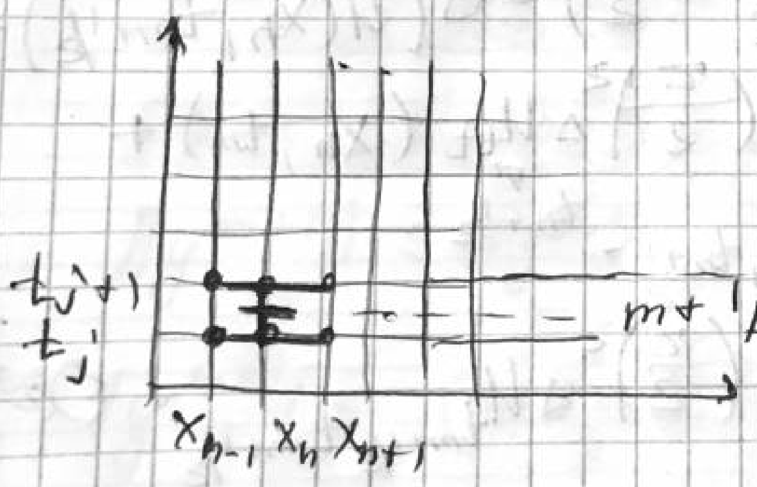
Уменьшаем сетку, проходим схему снова и сравниваем в какой-то точке (а именно $u(l,T)$)

Если функция не гладкая, то ошибка будет расти (нужно вовремя остановиться)

Это была явная схема ; получается.

2) Неявная схема.

Также есть два слоя m и $m+1$



Есть промеж. слой $m+1/2$

Здесь добавили слой

$$\frac{y_n^{m+1}-y_n^m}{\tau} = a^2 \Lambda_h\left(\sigma y_n^{m+1} + (1-\sigma) y_n^m\right) + \varphi_n^m$$

Вес $\sigma < 1$ Если $\sigma = 0$ — то схема чисто явная. Если $\sigma = 1$, то схема чисто неявная

Порядок аппроксимации разностных схем.

а) $$\bar{t} = t_m + \frac{\tau}{2} = m\tau + \frac{\tau}{2}$$

$$\frac{1}{2\frac{\tau}{2}}\left(u_n^{m+1} - u_n^m\right) = u_t'(x_n, \bar{t}) + O(\tau^2)$$

аппр-ция по t ↗

б) аппрок-ция по x

$$\sigma u_n^{m+1} + (1-\sigma) u_n^m = \sigma u\left(x_n, t_{m+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2}\right) +$$

$$+ (1-\sigma)\left(u\left(x_n, t_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2}\right)\right) = \sigma\left(u(x_n, t_{m+1/2}) +\right.$$

$$+ \frac{\tau}{2}\Delta u(x_n, t_{m+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \Delta u_{tt}(x_n, \underset{t_{m+1/2}}{t_m}) +$$

$$O(\tau^3) + (1-\sigma)\left\{u(x_n, t_{m+\frac{1}{2}}) -\right.$$

$$\left. - \frac{\tau}{2}\Delta u_{t_{m+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \Delta u_{t_{m+1/2} t_{m+1/2}} + O(\tau^3)\right\}$$

$$= u(x_n, t_m) + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\Delta u_{t_{m+1/2}} + O(\tau^2)$$

Устойчивость схемы.

$$\|y\|_e = \max_{n,m} \|y_n^m\|$$

$$\|y^m\| = \max_n \|y_n^m\|$$ — максимум на данном слое

Устойчивость выполняется, если

$$\|\delta y\| \leq C_1 \|\psi_\tau\| + C_2 \|\chi_h\|$$

Тогда

$$\|y^{m+1}\| \leq (1 + C_1\tau)\|y^m\| + C_2\tau\|\varphi^m\|$$

Для неявной схемы:

$$\|y^{m+1}\| \leq \|y^m\| + \tau\|\varphi\|$$

$\|\varphi\|$ — max значение функции на всей сетке.

Для явной схемы:

$$\|y^{m+1}\| \leq \|y^m\| + \tau\|\varphi\|$$

$$|y_n^{m+1}| \leq (1-2\gamma)|y_n^m| + \gamma|y_{n+1}^m| + \gamma|y_{n-1}^m| + \tau|\varphi_n^m|$$

где $\gamma = \frac{\tau a^2}{h^2} < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \tau < \frac{h^2}{2a^2}$$ Это оценка сверху

От других отличается тем, что стоит второй порядок ещё и будет больше ошибки и сильные оценки.