Disclaimer

В данном документе собраны лекции по динамике твердого тела, прочитанные Евгенией Зиновьевной Грибовой на первом курсе радиофизического факультета ННГУ.

Лекции набраны с частичным сокращением материала (убраны примеры в лекциях).

Документ оптимизирован для подготовки к экзамену, оговорены важные моменты, определения, теоремы и проч.

Автор набора и верстки - Сарафанов Ф.Г.

Содержание

1 Динамика твердого тела

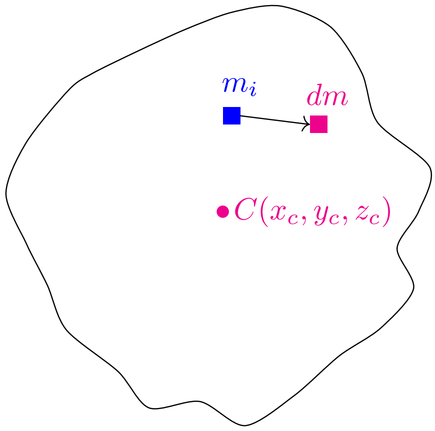


Рис. 1: Идеализация – абсолютно твёрдое тело

Твердое тело обладает шестью степенями свободы: иожет перемещаться центр масс тела (3 степени свободы – x, y, z) и само тело вращаться вокруг центра масс (3 степени свободы – ϕ, τ, r).

Раньше мы рассматривали материальную точку в СМТ - Δm_i. Теперь:

$$\begin{aligned} \text{было} \quad &\to \quad \text{стало} \\ \Delta m_i \quad &\to \quad dm \\ m_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad &\to \quad \int_{(m)} dm = m \\ \vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m_c} \quad &\to \quad \vec{R}_c = \int_{(m)} \frac{\vec{r}}{m} dm \\ \vec{p}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \quad &\to \quad \vec{p}_c = \int_{(m)} \vec{v}\, dm \end{aligned} \tag{1}$$

1.1 Условие равновесия твердого тела

В СМТ у нас было

$$m_c \vec{a}_c = \vec{F}^{\text{внеш}} \tag{2}$$

Но для твердого тела – все силы внешние! Теперь

$$m \vec{a}_c = \vec{F} \tag{3}$$

Необходимое условие покоя центра масс

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{a}_c = 0 \Rightarrow \vec{v}_c = const \tag{4}$$

Достаточное условие покоя центра масс

$$\vec{v}_c(t = 0) = 0 \tag{5}$$

Необходимое условие отстутствия вращения

$$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = const \tag{6}$$

Достаточное условие отстутствия вращения

$$\vec{\omega}(t = 0) = 0 \tag{7}$$

1.2 Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Определение момента инерции твердого тела:

$$I = \int_{(m)} r_{\perp}^2 dm \tag{8}$$

1.2.1 Табличка аналогий

	Поступательное движение	Вращательное движение
Кинематика	x $v_x = \frac{dx}{dt}$ $a_x = \frac{dv_x}{dt}$	ϕ $\omega_z = \frac{d\phi}{dt}$ $\gamma_z = \frac{d\omega_z}{dt}$
Динамика	m F_x $ma_x = F_x$	$I = \int_{(m)} r_{\perp}^2 dm$ $M_z \ (\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}])$ $I\gamma_z = M_z$
Энергия	$W_k = \frac{1}{2}mv^2$ $A = F_x \cdot dx$	$W_k = \frac{1}{2}I\omega_z^2$ $A = M_z \cdot d\phi$

1.3 Теорема Гюйгенса-Штейнера

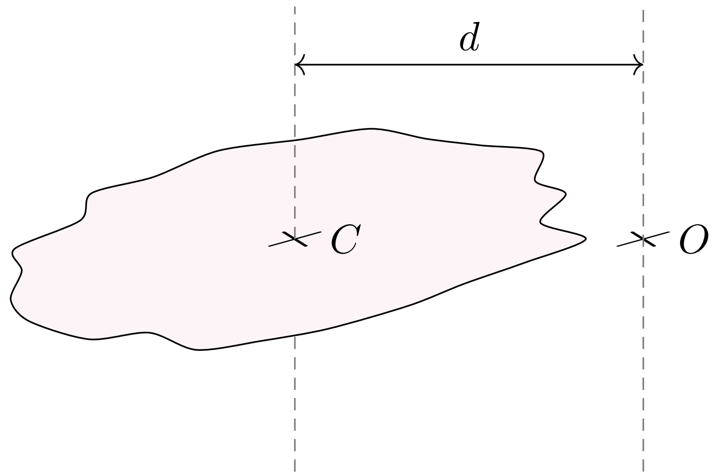
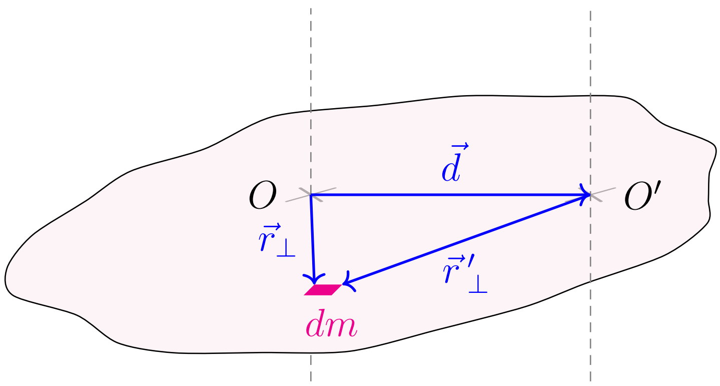


Рис. 2: Параллельный перенос оси вращения

Теорема Гюйгенса-Штейнера гласит о том, что

$$I_o = I_c + md^2 \tag{9}$$

Докажем. Для этого рассмотрим две параллельные оси, проходящие через точки O и O'.



$$I_o = \int\limits_{(m)} r_\perp^2 dm \tag{10}$$

$$I_{o'} = \int\limits_{(m)} r'^2_\perp dm \tag{11}$$

$$\vec{r}_\perp = \vec{d} + \vec{r}'_\perp \tag{12}$$

Тогда

$$I_o = \underbrace{\int\limits_{(m)} r'^2_\perp dm}_{I_{o'}} + \underbrace{\int\limits_{(m)} d_\perp^2 dm}_{md^2} + 2\int\limits_{(m)} (\vec{r}'_\perp, \vec{d}) dm \tag{13}$$

Рассмотрим подробнее последнее слагаемое.

$$2\int\limits_{(m)} (\vec{r}'_\perp, \vec{d}) dm = 2(\int\limits_{(m)} \vec{r}'_\perp dm, \vec{d}) = 2m(\vec{R}'_c, \vec{d}) \tag{14}$$

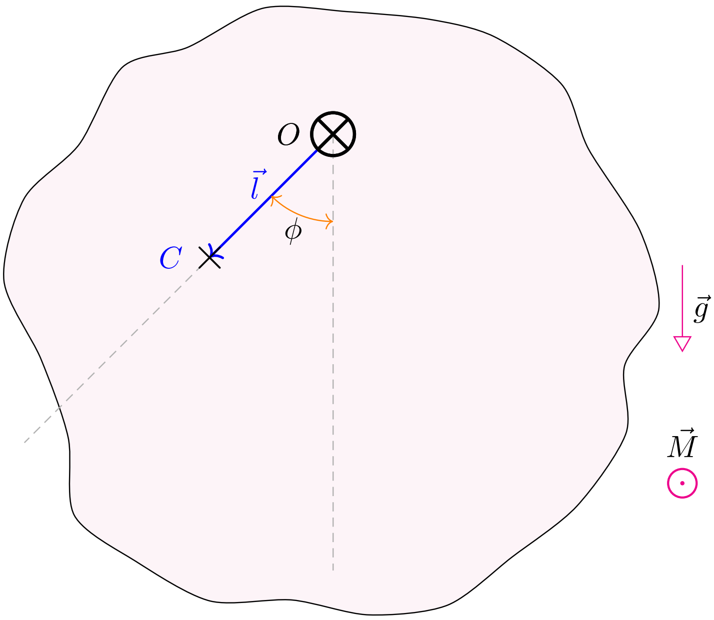
Пусть точка O' совпадает с точкой C – центром масс. Относительно неё $\vec{R}'_c = 0$, тогда

$$2\int\limits_{(m)} (\vec{r}'_\perp, \vec{d}) dm = 0 \tag{15}$$

И получаем окончательно доказанную теорему Гюйгенса-Штейнера

$$I_o = I_c + md^2 \tag{16}$$

1.4 Физический маятник



Физический маятник – это твердое тело, закрепленное на оси и способное вращаться вокруг неё.
Известны I, m, l.
$l = OC$. $\phi(t) = ?$

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M} \tag{17}$$

$$\vec{M} = \int\limits_{(m)} [\vec{r} \times dm \cdot \vec{g}\,] = \left[\int\limits_{(m)} \vec{r} \cdot dm \times \vec{g}\right] = [\vec{R}_c \times m\vec{g}\,] \tag{18}$$

$$M_z = -mgl \sin\phi \tag{19}$$

$$I_o \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \tag{20}$$

$$I_o \ddot{\phi} = -mgl \sin\phi \tag{21}$$

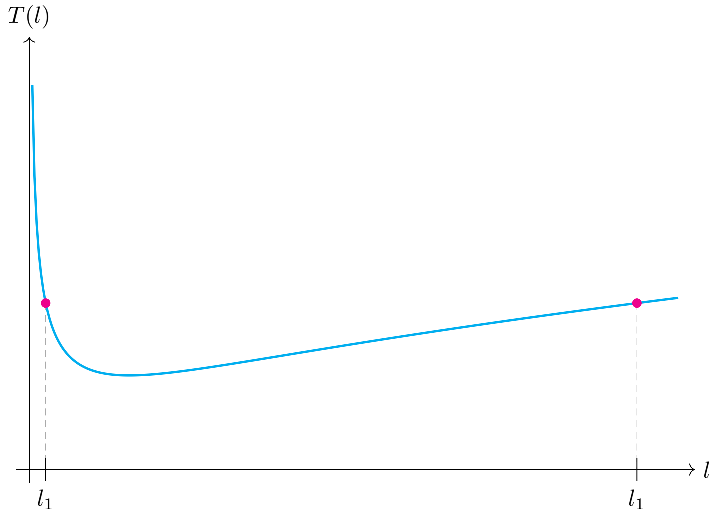
Для малых углов ($\phi << 1$)

$$\sin\phi \approx \phi \tag{22}$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{mgl}{I_o}\phi \tag{23}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{mgl}{I_o}\phi = 0 \tag{24}$$

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I_o} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_c + ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_c}{mgl} + \frac{l}{g}} \tag{25}$$



Найдём такой период колебаний математического маятника T_M, который будет совпадать с периодом колебаний Физического маятника T:

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{подвеса}}}{g}} \tag{26}$$

$$T_M = T \Rightarrow l_{\text{пр}} = l_{\text{подвеса}} \tag{27}$$

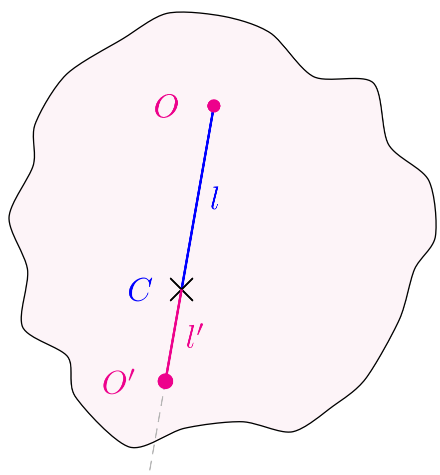
Приведенная длина $l_{\text{подвеса}}$ – это длина такого математического маятника, что $T_M = T$.

$$\frac{I_c}{ml} + l = l_{\text{пр}} \tag{28}$$

Отсюда, в частности, сразу видно, что $l_{\text{пр}} > l$.

Обозначим $l' = \frac{I_c}{ml}$. Тогда

$$l_{\text{пр}} = l + l' \tag{29}$$



$$OC = l, \quad CO' = l', \quad OO' = l_{\text{пр}} \tag{30}$$

1.4.1 Теорема Гюйгенса

Периоды колебаний физического маятника, подвешенного за одну из **взаимных (сопряженных) точек** O и O', совпадают:

$$T^{\text{ф}}_{(O)} = T^{\text{ф}}_{(O')} \tag{31}$$

Сопряженная точка, за которую подвешен маятник, называют **точкой подвеса**, вторую сопряженную точку - **центр качаний**.

Действительно. Предположим, что маятник подвешен за точку O. Тогда

$$l^{(O)}_{\text{пр}} = l + l' \Rightarrow T^{\text{ф}}_{(O)} = 2\pi\sqrt{\frac{l+l'}{g}} \tag{32}$$

Теперь предположим, что маятник подвешен за точку O'. Учтём, что

$$l' = \frac{I_c}{ml} \Rightarrow l = \frac{I_c}{ml'} \tag{33}$$

Тогда

$$l^{(O')}_{\text{пр}} = l' + \frac{I_c}{ml'} = l' + l \Rightarrow T^{\text{ф}}_{(O')} = 2\pi\sqrt{\frac{l+l'}{g}} \tag{34}$$

Отсюда – что и требовалось доказать,

$$T^{\text{ф}}_{(O)} = T^{\text{ф}}_{(O')} \tag{35}$$

2 Энергетические соотношения для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси