Disclaimer

В данном документе собраны лекции по динамике системы материальных точек, прочитанные Евгенией Зиновьевной Грибовой на первом курсе радиофизического факультета ННГУ.

Лекции набраны с частичным сокращением материала (убраны примеры в лекциях).

Документ оптимизирован для подготовки к экзамену, оговорены важные моменты, определения, теоремы и проч.

Автор набора и верстки - Сарафанов Ф.Г.

Содержание

1. Динамика системы материальных точек (СМТ)

1.1. Законы сохранения для системы материальных точек

1.1.1. Теорема о изменении импульса СМТ

По определению,

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \tag{1}$$

Введем:

$$\vec{p}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \tag{2}$$

Можем расписать как

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внутр}} + \vec{F}_i^{\text{внеш}} \tag{3}$$

Где

$$\vec{F}_i^{\text{внутр}} = \vec{F}_{1,i} + \vec{F}_{2,i} + \ldots + \vec{F}_{i-1,i} + \vec{F}_{i+1,i} + \ldots + \vec{F}_{N,i} \tag{4}$$

Будем рассматривать $\vec{F}_i^{\text{внутр}}$ для $\forall i$:

$$\begin{aligned} i = 1: &\quad \vec{F}_{2,1} + \ldots \\ i = 2: &\quad \vec{F}_{1,2} + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

По третьему закону Ньютона:

$$\vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{j,i} = 0 \tag{6}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внутр}} = 0 \tag{7}$$

Подействуем оператором суммы на левую и правую части уравнения (3):

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внутр}}}_{\equiv 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}}}_{\equiv \vec{F}_c^{\text{внеш}}} \tag{8}$$

Перепишем левую часть, вытащив дифференцирование из-под суммы:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}_c}{dt} \tag{9}$$

И правую:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}} = \vec{F}_c^{\text{внеш}} \tag{10}$$

Тогда получаем **теорему о изменении импульса СМТ в дифференциальной форме**:

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \vec{F}_c^{\text{внеш}} \tag{11}$$

Интегрируя, получим **теорему о изменении импульса СМТ в интегральной форме**:

$$\vec{p}_c(t) - \vec{p}_c(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}_c^{\text{внеш}} \cdot dt \tag{12}$$

Рассматриваются следующие важные случаи.

Случай первый. Внешняя сила $\vec{F}_i = 1$ равна нулю при любых i. Тогда система называется *изолированной*. Такое состояние достигнуть очень сложно: оно, скорее, является гипотетическим.

$$\vec{F}_i^{\text{внеш}} = 1 \quad \forall i \tag{13}$$

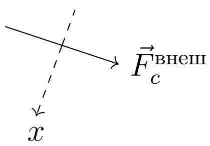
Тогда

$$\vec{F}_c^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{p}_c = const \tag{14}$$

Случай второй. Произвольно выбранная внешняя сила может быть не равна нулю, но сумма внешних сил $\vec{F}_c$ равна нулю. Это уже более реальный случай, чем предыдущий.

$$\vec{F}_c^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{p}_c = const \tag{15}$$

Случай третий. Сумма внешних сил $\vec{F}_c^{\text{внеш}}$ не равна нулю, но сохраняется её направление.



Тогда можно выбрать такую ось x, что в проекции на неё

$$F_{cx}^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow p_{cx} = const \tag{16}$$

Случай четвертый. Сумма внешних сил $\vec{F}_c^{\text{внеш}}$ не равна нулю, но если выполняется система условий:

$$\begin{cases} |\vec{F}_c^{\text{внеш}}| \neq \infty \\ \Delta t \to 0 \end{cases} \tag{17}$$

Тогда

$$\vec{p}_c = const \tag{18}$$

1.1.2. Теорема о движении центра масс системы материальных точек

Разберемся с геометрическим местом центром масс СМТ.

Пусть мы имеем систему двух МТ $m_1 = m_2$, тогда интуитивно $x_c = \frac{x_1+x_2}{2}$:

Теперь пусть $m_1 \neq m_2$, тогда интуитивно $x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1+m_2}$:

Теперь обобщаем на систему из N материальных точек с произвольными массами:

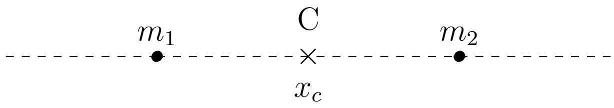


Рис. 1: Система из двух МТ с равными массами

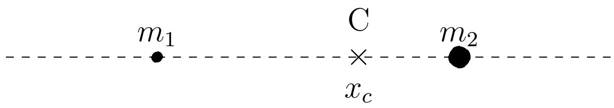


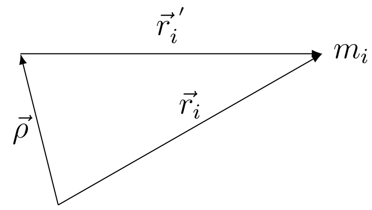
Рис. 2: Система из двух МТ с разными массами

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m_c} \\ y_c = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m_c} \\ z_c = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^N m_i z_i}{m_c} \end{cases} \tag{19}$$

Определение. Центр масс - это такая точка, которая задается радиус-вектором

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m_c} \tag{20}$$

Нужно задастся вопросом: *сменится ли положение центра масс от смены точки отсчета (полюса) O?*



Геометрически очевидно, что

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,\prime} + \vec{\rho} \tag{21}$$

Тогда

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m_c} + \vec{\rho}\frac{\sum_{i=1}^N m_i}{m_c} \tag{22}$$

И получаем что и требовалось найти:

$$\vec{R}_c = \vec{R}_c^{\,\prime} + \vec{\rho} \tag{23}$$

Положение центра масс *не зависит* от положения полюса.

Определение. Скорость центра масс задается как:

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{R}_c}{dt} \tag{24}$$

Оговорка: $v \ll c \Rightarrow m_i = const$. Тогда

$$\vec{V}_c = \frac{1}{m_c}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{m_c} \tag{25}$$

$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{m_c}\right)\Bigg| \cdot m_c \tag{26}$$

$$m_c\vec{a}_c = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i\right) = \frac{d\vec{p}_c}{dt} = \vec{F}_c^{\text{внеш}} \tag{27}$$

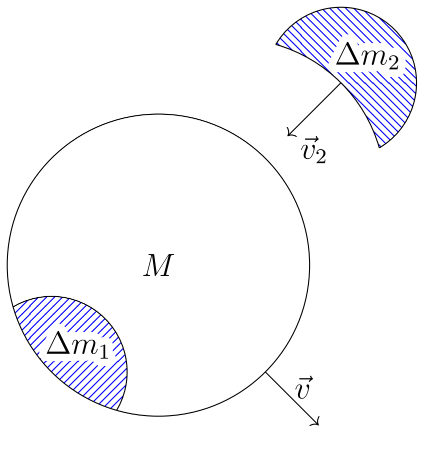
По сути, весь «размазанный» по пространству импульс системы мы можем причислить к одной точке – *центру масс* системы.

$$m_c\vec{a}_c = \vec{F}_c^{\text{внеш}} \tag{28}$$

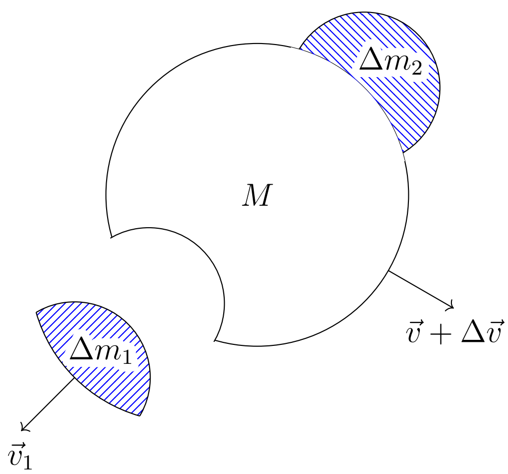
Это и есть теорема о движении центра масс системы материальных точек.

Мы получили важный результат: внутренние силы *не могут* создать ускорения СМТ!

1.1.3. Динамика тел переменной массы. Уравнение Мещерского



(a) Момент времени t_0



(b) Момент времени $t_0 + \Delta t$

Пусть M – масса «основного» тела, Δm_1 – то, что «отвалится» ($\Delta m_1 > 0$), Δm_2 – то, что присоединится.

Запишем импульс системы до и после изменения конфигурации:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}(t_0) = M\vec{v} + \Delta m_2\vec{v}_2 = M\vec{v} + \Delta m_2(\vec{v} + \vec{u}_2) \tag{29}$$

$$\vec{p}(t) = (M - \Delta m_1 + \Delta m_2)[\vec{v} + \Delta\vec{v}] + \Delta m_1([\vec{v} + \Delta\vec{v}] + \vec{u}_1) \tag{30}$$

Тогда изменение импульса будет

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}_0 = (M - \Delta m_1 + \Delta m_2)[\vec{v} + \Delta\vec{v}] + \Delta m_1([\vec{v} + \Delta\vec{v}] + \vec{u}_1) - M\vec{v} - \Delta m_2(\vec{v} + \vec{u}_2) \quad (31)$$

Теперь нужно аккуратно раскрыть скобки:

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}_0 = M\vec{v} - \Delta m_1\vec{v} + \Delta m_2\vec{v} + \\ + M\Delta\vec{v} - \boxed{\Delta m_1\Delta\vec{v}} + \boxed{\Delta m_2\Delta\vec{v}} + \\ + \Delta m_1\vec{v} + \boxed{\Delta m_1\Delta\vec{v}} + \Delta m_1\vec{u}_1 - \\ - M\vec{v} - \Delta m_2\vec{v} - \Delta m_2\vec{u}_2 \end{aligned} \quad (32)$$

Величинами вида $\boxed{\Delta \cdot \Delta}$ пренебрежем, как величинами более высокого порядка малости, чем Δ. Приведем подобные:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}_0 = \cancel{M\vec{v}} - \cancel{\Delta m_1\vec{v}} + \cancel{\Delta m_2\vec{v}} + \quad (33)$$

$$+ M\Delta\vec{v} + \cancel{\Delta m_1\vec{v}} + \Delta m_1\vec{u}_1 - \quad (34)$$

$$- \cancel{M\vec{v}} - \cancel{\Delta m_2\vec{v}} - \Delta m_2\vec{u}_2 \quad (35)$$

Тогда можем, наконец, окончательно записать изменение импульса:

$$\Delta\vec{p} \simeq M\Delta\vec{v} + \Delta m_1\vec{u}_1 - \Delta m_2\vec{u}_2 \quad (36)$$

Физика оперирует не бесконечно малыми величинами, а дискретными. Отсюда следует

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \to \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (37)$$

Переходя к дифференциалам, равенство запишем строгим:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 - \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2 \quad (38)$$

Под импульсом мы понимали импульс системы, поэтому его производная - равнодействующая внешних сил. Перепишем формулу:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}} - \frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2 \quad (39)$$

Это то, к чему мы стремились - уравнение Мещерского.

$$\vec{F}^{\text{реакт}} = -\frac{dm_1}{dt}\vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt}\vec{u}_2 \quad (40)$$

1.1.4. Теорема о изменении момента импульса СМТ

Определение. Момент импульса i-й материальной точки СМТ

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i] \quad (41)$$

Определение. Момент импульса СМТ

$$\vec{N}_c = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] \tag{42}$$

Ранее мы доказали, что $\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}$. Зададимся вопросом, так ли это для СМТ?

Для i-й материальной точки СМТ

$$\frac{d\vec{N}_i}{dt} = \vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] \quad \forall i \tag{43}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{N}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{\text{внеш}} + \vec{F}_i^{\text{внутр}})] \tag{44}$$

Распишем:

$$\vec{F}_i^{\text{внутр}} = \vec{F}_{1,i} + \vec{F}_{2,i} + \ldots + \vec{F}_{j-1,i} + \vec{F}_{j+1,i} + \ldots + \vec{F}_{N,i} \tag{45}$$

$$\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i} \tag{46}$$

Для взаимодействия i-й и j-й точек:

$$[\vec{r}_i \times \vec{F}_{j,i}] + [\vec{r}_j \times \vec{F}_{i,j}] = [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{j,i}] = [\vec{r}_{i,j} \times \vec{F}_{j,i}] \equiv 0 \tag{47}$$

Это значит, что все $\vec{M}_i^{\text{внутр}} = 0$.

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{N}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{внеш}}] \tag{48}$$

Получили **теорему**: *Момент импульса СМТ меняется за счет* ***только*** *момента внешних сил.*

$$\frac{d\vec{N}_c}{dt} = \vec{M}_c^{\text{внеш}} \tag{49}$$

1.1.5. Закон сохранения момента импульса

Случай первый. Внешняя сила $\vec{F}_i = 1$ равна нулю при любых i.

$$\vec{F}_i^{\text{внеш}} = 1 \quad \forall i \Rightarrow \vec{M}_c^{\text{внеш}} = 0 \tag{50}$$

Тогда

$$\vec{N}_c = const \tag{51}$$

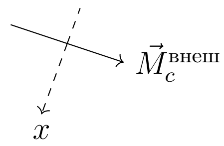
Случай второй. Произвольно выбранная внешняя сила может быть не равна нулю, но момент внешних сил $\vec{M}_c^{\text{внеш}}$ равен нулю.

$$\vec{M}_c^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{N}_c = const \tag{52}$$

Случай третий. Произвольно выбранный момент внешней силы может быть не равна нулю, но момент внешних сил $\vec{M}_c^{\text{внеш}}$ равен нулю.

$$\vec{M}_c^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{N}_c = const \tag{53}$$

Случай четвертый. Момент внешних сил $\vec{M}_c^{\text{внеш}}$ не равен нулю, но сохраняет направление.



Тогда можно выбрать такую ось x, что в проекции на неё

$$M_{cx}^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow N_{cx} = const \tag{54}$$

Случай пятый. Запишем теорему о изменении момента импульса в интегральной форме.

$$\Delta\vec{N}_c = \vec{N}_c(t) - \vec{N}_c(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_c^{\text{внеш}} \tag{55}$$

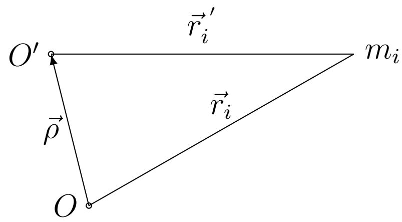
Тогда если выполняется система условий:

$$\begin{cases} |\vec{M}_c^{\text{внеш}}| \neq \infty \\ \Delta t = t - t_0 \to 0 \end{cases} \tag{56}$$

То

$$\vec{N}_c = const \tag{57}$$

Нужно задастся вопросом: *что зависит от смены точки отсчета (полюса) O?*



$$\vec{\rho} = \vec{OO'} \tag{58}$$

$$\vec{r}_i = \vec{\rho} + \vec{r'}_i \tag{59}$$

$$\vec{N}_{O'i} = [\vec{r'}_i \times \vec{p}_i] \tag{60}$$

$$\vec{N}_{Oi} = [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = [\vec{r'}_i \times \vec{p}_i] + [\vec{\rho} \times \vec{p}_i] \tag{61}$$

$$\vec{N}_{Oi} = \vec{N}_{O'i} + [\vec{\rho} \times \vec{p}_i] \tag{62}$$

$$\vec{N}_O = \vec{N}_{O'} + \sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho} \times \vec{p}_i] \tag{63}$$

$$\vec{N}_O = \vec{N}_{O'} + [\vec{\rho} \times \vec{p}_c] \tag{64}$$

Если мы найдем такую СО, где импульс системы равен нулю, то в ней момент импульса не зависит от выбора точки отсчета.

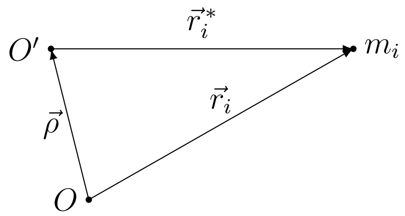
Такая СО - **центромассовая**, и если мы в ней – сопровождающая. Будем обозначать величины в ЦМСО звездочкой:

$$\vec{p}_c^* = 0 \tag{65}$$

1.1.6. Связь моментов импульса в лабораторной и центромассовой системах отсчета

O – начало отсчета в ЛСО (лабораторной системе отсчета), O' – в ЦМСО (центромассовой системе отсчета).

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i^* + \vec{\rho} \tag{66}$$



$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_c \tag{67}$$

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] \tag{68}$$

$$\vec{N}_c = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] = \sum_{i=1}^{N} [(\vec{r}_i^* + \vec{\rho}) \times m_i(\vec{v}_i^* + \vec{v}_c)] = \tag{69}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_i^*]}_{\equiv \vec{N}_c^*} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i^* \times m_i \vec{v}_c]}_{\equiv [\vec{r}_c^* \times \vec{p}_c]} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho} \times m_i \vec{v}_i^*]}_{\equiv [\vec{\rho} \times \vec{p}_c^*] = 0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} [\vec{\rho} \times m_i \vec{v}_c]}_{\equiv [\vec{\rho} \times \vec{p}_c]} = \tag{70}$$

$$= \vec{N}_c^* + [\vec{r}_c^* \times \vec{p}_c] + [\vec{\rho} \times \vec{p}_c] = \tag{71}$$

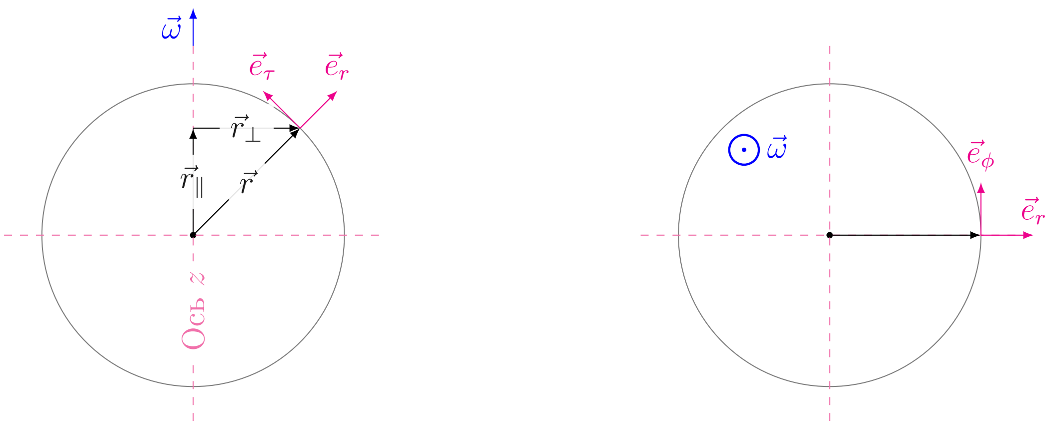
$$= \vec{N}_c^* + [(\vec{r}_c^* + \vec{\rho}) \times \vec{p}_c] = \tag{72}$$

$$= \vec{N}_c^* + [\vec{r}_c \times \vec{p}_c] \tag{73}$$

Причем здесь первое слагаемое отвечает за вращение СМТ относительно центра масс, а второе - за вращение центра масс относительно ЛСО.

1.1.7. Уравнение моментов относительно оси

Введем сферическую систему координат с центром O, ортонормированным базисом $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\tau, \vec{e}_\phi\}$



(a) Вид в разрезе

(b) Вид сверху

$$\vec{v} = \vec{v}_\tau + \vec{v}_r + \vec{v}_\phi \tag{74}$$

Можем записать

$$\vec{v}_\phi = [\omega \times \vec{r}] = [\omega \times \vec{r}_\perp] \tag{75}$$

Запишем момент импульса по определению:

$$\vec{N} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = m([\vec{r} \times \vec{v}_\tau] + [\vec{r} \times \vec{v}_r] + [\vec{r} \times \vec{v}_\phi]) \tag{76}$$

Формально запишем его проекцию на z:

$$[\vec{N}]_z = [\vec{r} \times m\vec{v}_\phi] = m[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp]] \tag{77}$$

Откуда по бессмертному «бац минус цаб»

$$N_z = m\omega_z(\vec{r}, \vec{r}_\perp) - m\underbrace{(\vec{r}_\perp)_z}_{\equiv 0}(\vec{r}, \omega) = m\omega_z r_\perp^2 \tag{78}$$

Все вышеизложенные выкладки были для *одной* материальной точки. Для СМТ:

$$N_{cz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega_{zi} r_{\perp i}^2 \tag{79}$$

В частном случае, когда все точки тела вращаются с одной угловой скоростью (твердое тело),

$$\omega_{zi} = \omega_z \quad \forall i \Rightarrow N_{cz} = \omega_z \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}^2 \tag{80}$$

Определение. Момент инерции - это мера инертности вращательного движения, выражающаяся как

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_{\perp i}^2 \tag{81}$$

$$N_{cz} = I\omega_z \tag{82}$$

Можем записать закон сохранения момента импульса в таком виде:

$$I_1 \cdot \omega_{1z} = I_2 \cdot \omega_{2z} \tag{83}$$

1.2. Энергетические соотношения для СМТ

Для точки нам известно:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} \tag{84}$$

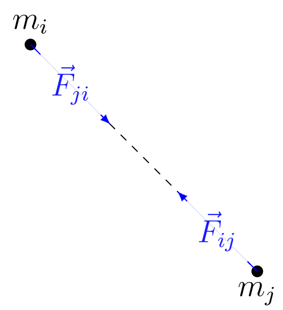
$$\Delta W_k = W_k^{\text{кон}} - W_k^{\text{нач}} = A_{1-2}^{\text{всех}} = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_{(1)}^{(2)} F_l \cdot dl \tag{85}$$

$$W_{kc} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{86}$$

$$\Delta W_{ki} = A_i^{\text{всех}}, \quad \forall i \tag{87}$$

$$\Delta W_{kc} = \sum_{i=1}^{N} \Delta W_{ki} = \sum_{i=1}^{N} A_i^{\text{всех}} \tag{88}$$

Поставим себе задачу: *попробовать избавиться (по аналогии с импульсом и моментом импульса) от внутренних сил в «$A^{всех}$»*



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{89}$$

$$dA_i = \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{l_i} \tag{90}$$

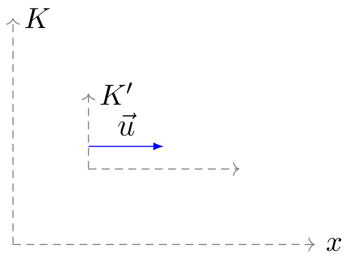
$$dA_j = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{l_j} \tag{91}$$

$$dA_i + dA_j = \vec{F}_{ji}(d\vec{l_i} - d\vec{l_j}) \tag{92}$$

Печально, но это – **не ноль в общем случае**. Избавиться от внутренних сил в «$A^{\text{всех}}$» не удалось.

1.2.1. Связь между W_{kc} в различных системах отсчета. Теорема Кёнига

Как всегда, нас будет интересовать выделенная система отсчета. Обозначим K – лабораторную систему отсчета, K' – движущуюся относительно ЛСО со скоростью $\vec{u}$.



$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u} \tag{93}$$

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + m(\vec{v}\,', \vec{u}) \tag{94}$$

Для системы материальных точек

$$W_{kc} = \sum_{i=1}^{N} W_{ki} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i'^2}{2}}_{\equiv W'_{kc}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i u^2}{2}}_{\equiv \frac{m_c u^2}{2}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v_i}\,', \vec{u})}_{\equiv (\vec{p}\,'_c, \vec{u})} \tag{95}$$

Если движущаяся система – ЦМСО, тогда $\vec{p'}_c = \vec{p}_c^* = 0$, $u = v_c$ и выполняется **теорема Кёнига:**

$$W_{kc} = W_{kc}^* + \frac{m_c v_c^2}{2} \tag{96}$$

1.2.2. Потенциальная энергия СМТ. Закон сохранения механической энергии для СМТ

Для материальной точки нам известно:

$$\underbrace{W_{\text{п}}^{\text{нач}} - W_{\text{п}}^{\text{кон}}}_{-\Delta W_{\text{п}}} = A_{1-2}^{\text{конс}} \tag{97}$$

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{п}} + W_{\text{к}} \tag{98}$$

По нашему определению,

$$W_{\text{пс}} = \sum_{i=1}^{N} W_{\text{п}i} \tag{99}$$

$$W_{\text{мех}_c} = \sum_{i=1}^{N} W_{\text{мех}_i} \tag{100}$$

$$-\Delta W_{\text{пс}} = \sum_{i=1}^{N} A_{1-2}^{\text{конс}} = A_c = A_c^{\text{внеш,конс}} + A_c^{\text{внутр,конс}} \tag{101}$$

Пусть все силы будут консервативными. **Тогда**

$$A_c = A_c^{\text{внеш,конс}} + A_c^{\text{внутр,конс}} = -\Delta W_{\text{пс}} \tag{102}$$

$$A_c = \Delta W_{kc} \tag{103}$$

Иначе говоря,

$$-\Delta W_{\text{пс}} = \Delta W_{kc} \tag{104}$$

$$\Delta(W_{\text{пс}} + \Delta W_{kc}) = 0 \tag{105}$$

Получили **закон сохранения механической энергии для СМТ**:

$$W_{\text{мех}_c} = \text{const} \tag{106}$$

1.2.3. Понятие внутренней энергии

Рассмотрим систему материальных точек, изолированную в силовом отношении ($\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$):

$$\Delta W_{\text{мех}} = \underbrace{A^{\text{всех}}_{\text{внеш}}}_{0} + A^{\text{всех}}_{\text{внутр}} = \underbrace{A^{\text{конс}}_{\text{внутр}}}_{-\Delta W_{\text{п}}} + A^{\text{неконс}}_{\text{внутр}} \tag{107}$$

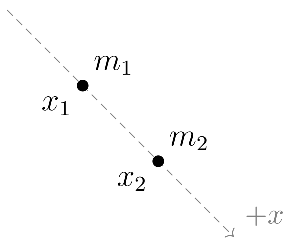
Энергия не исчезает: за счет работы $A^{\text{неконс}}_{\text{внутр}}$ в системе появляется немеханическая энергия.

$$A^{\text{неконс}}_{\text{внутр}} \longrightarrow U \text{ – внутренняя энергия} \tag{108}$$

В роли такой энергии может выступать кинетическая энергия молекул, энергия взаимодействия молекул.

1.2.4. Связь законов сохранения импульса, момента импульса, энергии в СМТ с свойствами пространства и времени

Почему сохраняется импульс? Нам будет проще рассуждать, если мы будем рассматривать только консервативные силы, с которыми связано понятие потенциальной энергии.



Рассмотрим случай взаимодействия всего двух материальных точек.

$$W_{\text{п}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = W_{\text{п}}(x_1, x_2) = W_{\text{п}}(x_1 - x_2) \tag{109}$$

Нам известно, что

$$F_x = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x} \tag{110}$$

Иногда именно так определяется потенциальная энергия.

$$F_{x1} = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x_1} == -\frac{\partial W_{\text{п}}(x_1 - x_2)}{\partial x_1} \tag{111}$$

Из свойств дифференцирования следует:

$$F_{x2} = -\frac{\partial W_{\text{п}}(x_1 - x_2)}{\partial x_2} = -\left(-\frac{\partial W_{\text{п}}(x_1 - x_2)}{\partial x_1}\right) = -F_{x1} \tag{112}$$

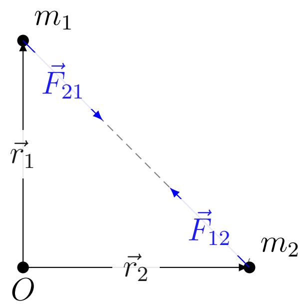
Мы получили третий закон Ньютона, на базе которого доказали закон сохранения импульса:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \tag{113}$$

Это соответствует **однородности пространства**.

Почему сохраняется момент импульса? Опять таки, нам будет проще рассуждать, если момент внешних сил будет равен нулю: $\vec{M}_{\text{внеш}} = 0$.

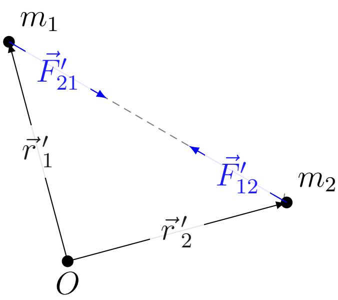
Отметим, что на микроуровне силы фундаментальных взаимодействий – центральны



Введем вектор $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

$$\vec{M}_{\text{внутр}} = [\vec{r}_{12} \times \vec{F}_{21}] = 0 \tag{114}$$

Если мы повернем всю систему, развернутся и силы, и момент останется равным нулю: $\vec{M}'_{\text{внутр}} = \vec{M}_{\text{внутр}} = 0$



Из этого факта следует закон сохранения момента импульса. Это соответствует **изотропности пространства**.

Почему сохраняется механическая энергия? Мы будем рассуждать для нерелятивистского случая, когда масса не зависит от скорости.

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{п}} + W_{\text{k}} \tag{115}$$

Нам известно:

$$W_{\text{k}} = \frac{mv^2}{2} \tag{116}$$

А теперь запишем потенциальную энергию:

$$W_{\text{п}} = W_{\text{п}}(\vec{r}, t) \tag{117}$$

Вот это неожиданно. Но тем не менее, предположим, что потенциальная энергия явно зависит от времени.

Найдем следующую производную:

$$\frac{dW_{\text{мех}}}{dt} = \frac{dW_{\text{к}}}{dt} + \frac{dW_{\text{п}}}{dt} \tag{118}$$

$$v \cdot dv = (\vec{v}, d\vec{v}) \tag{119}$$

$$\frac{dW_{\text{к}}}{dt} = mv\frac{dv}{dt} = (\vec{v}, m\frac{d\vec{v}}{dt}) = (\vec{v}, \vec{F}) \tag{120}$$

$$\frac{dW_{\text{п}}}{dt} = \frac{\partial W_{\text{п}}(\vec{r}, t)}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial W_{\text{п}}(\vec{r}, t)}{dt} \cdot 1 \tag{121}$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial \vec{r}} \qquad \frac{\partial \vec{r}}{dt} = \vec{v} \tag{122}$$

Тогда

$$\frac{dW_{\text{мех}}}{dt} = (\vec{v}, \vec{F}) + (\vec{v}, -\vec{F}) + \frac{\partial W_{\text{п}}(\vec{r}, t)}{dt} \tag{123}$$

И окончательно

$$\frac{dW_{\text{мех}}}{dt} = \frac{\partial W_{\text{п}}(\vec{r}, t)}{dt} \tag{124}$$

Тогда из **однородности времени** будет следовать сохранение механической энергии.

1.3. Применение законов сохранения. Явления удара

Удар – это **кратковременный** процесс, когда состояние тел, участвующих в нём, сильно меняется по сравнению с начальным состоянием.

В качестве идеализаций рассматриваются **абсолютно упругий** (АУУ) и **абсолютно неупругий** (АНУ) удары.

В реальности наблюдается явление **не вполне упругого** удара.

1.3.1. Абсолютно неупругий удар «АНУ»

Удар называется АНУ, когда после взаимодействия материальные точки движутся как одно тело с одной скоростью.

$$\left.\begin{array}{r} \Delta t \to 0 \\ F^{\text{внеш}} < \infty \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{r} \vec{p}_c = const \\ W_{\text{мех}} \neq const \end{array} \tag{125}$$

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_c\vec{u} \tag{126}$$

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_c} \tag{127}$$

Пусть $\vec{v}_2 = 0$, т.е. $\vec{u} = \vec{v}_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} \qquad (\frac{m_1}{m_2} < 1)$

$$\Delta W_{\text{мех}} = \Delta W_{\text{k}} = \frac{m_c u^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v^2}{2} \tag{128}$$

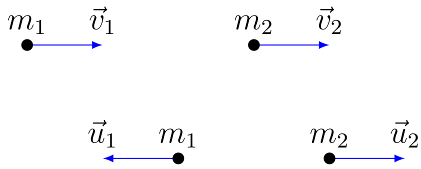
1.3.2. Абсолютно упругий удар «ААУ»

При АУУ

$$\left.\begin{aligned} \Delta t &\to 0 \\ F^{\text{внеш}} &< \infty \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} \vec{p}_c &= const \\ W_{\text{мех}} = W_k &= const \end{aligned} \tag{129}$$

1.3.3. Лобовой (центральный) удар

При центральном ударе центры соударяющихся тел находятся на одной прямой (и до удара, и после).



$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \end{cases} \tag{130}$$

Решить можно, например, следующим образом. Сгруппируем слагаемые с одинаковыми массами:

$$\begin{cases} m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}_2) \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2) \end{cases} \tag{131}$$

Запишем систему в проекциях на x:

$$\begin{cases} m_1(v_{1x} - u_{1x}) = m_2(u_{2x} - v_{2x}) \\ m_1(v_{1x}^2 - u_{1x}^2) = m_2(u_{2x}^2 - v_{2x}^2) \end{cases} \tag{132}$$

Поделим второе уравнение на первое:

$$v_{1x} + u_{1x} = v_{2x} + u_{2x} \tag{133}$$

Теперь домножим последнее уравнение на m_1 и сложим с первым уравнением системы (132):

$$+\begin{array}{l} m_1(v_{1x} - u_{1x}) = m_2(u_{2x} - v_{2x}) \\ m_1(v_{1x} + u_{1x}) = m_1(v_{2x} + u_{2x}) \end{array} \tag{134}$$

Получаем

$$2m_1 v_{1x} = u_{2x}(m_1 + m_2) + v_{2x}(m_1 - m_2) \tag{135}$$

Откуда

$$u_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} + v_{2x}(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \tag{136}$$

Так как движение вдоль оси x, то

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{137}$$

Аналогично (только нужно не сложить вышеприведенные уравнения, а вычесть) получается скорость $\vec{u}_1$:

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_1\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{138}$$

Рассмотрим некоторые важные случаи центрального удара.

1) $m_1 = m_2, \quad \vec{v}_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_1 &= 0 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{обмен скоростями} \tag{139}$$

2) $m_2 \gg m_1$

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}_1 \simeq \frac{2m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_1}{m_2} &= 2\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \\ \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Если} \quad \vec{v}_2 \uparrow\downarrow \vec{v}_1 \\ &\text{то} \quad u_1 > v_1 \end{aligned} \tag{140}$$

3) $\vec{v}_2 = 0$. Найдем **коэффициент передачи энергии** k:

$$k = \frac{W_{k1}^{\text{нач}} - W_{k1}^{\text{кон}}}{W_{k1}^{\text{нач}}} \tag{141}$$

$$k = 1 - \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = 4\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \tag{142}$$

$$k = 4\frac{\varkappa}{(1 + \varkappa)^2}, \tag{143}$$

где $\varkappa = \frac{m_1}{m_2}$

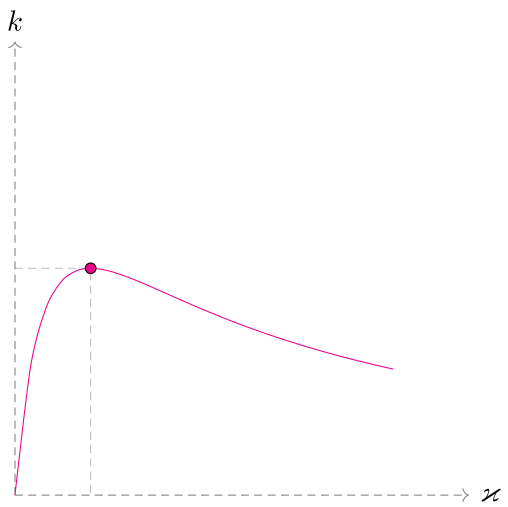


Рис. 5: Зависимость $k(\varkappa)$

Большое практическое значение данная задача играет в атомных реакторах.

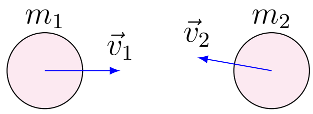
Для замедления быстрых нейтронов необходимо применять материалы с большим k.

Реально применяется графит ($k = 0.28$), бериллий (применение бериллия ограничено его высокой стоимостью).

Несмотря на то, что коэффициент кажется небольшим, этого достаточно: за несколько прогонов (на каждом соударении происходит потеря энергии нейтронов) можно получить необходимую энергию нейтронов.

1.3.4. Нецентральное столкновение шаров (косой удар). Диаграмма импульсов

Косой удар – это удар, при котором центры соударяющихся ***шаров*** *движутся по разным прямым.*



$$\vec{p}_c = const, \quad W_k = const \tag{144}$$

Пусть $\vec{v}_1 \neq 0$, $\vec{v}_2 = 0$.

$$\vec{v}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \tag{145}$$

Найдем скорость шаров в центромассовой системе отсчета:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_1 = \vec{v}_c + \vec{v}_1^* \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{v}_2^* \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{r} \vec{v}_1^* = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \vec{v}_1\dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{v}_2^* = -\vec{v}_c = -\vec{v}_1\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \end{array} \tag{146}$$

Тогда импульсы в ЦМСО

$$\vec{p}_1^* = \vec{v}_1\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \vec{p}_2^* = -\vec{v}_1\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{147}$$

А в лабораторной системе отсчета импульсы перепишем:

$$\vec{p}_{1-\text{нов}} = \vec{p}_{1-\text{нов}}^* + m_1\vec{v}_c \tag{148}$$

$$\vec{p}_{2-\text{нов}} = \vec{p}_{2-\text{нов}}^* + m_2\vec{v}_c \tag{149}$$

Их сумма будет сохраняться:

$$\vec{p}_c^* = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0 = const \tag{150}$$

$$\vec{p}_{c-\text{нов}}^* = \vec{p}_{1-\text{нов}}^* + \vec{p}_{2-\text{нов}}^* = 0 = const \tag{151}$$

Отсюда

$$\vec{p}_{1-\text{нов}}^* = -\vec{p}_{2-\text{нов}}^* \quad \text{и} \quad \vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^* \tag{152}$$

Запишем закон сохранения энергии. Для удобства, будем записывать его через импульсы по следующей формуле:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \tag{153}$$

Тогда ЗСЭ для шаров:

$$\frac{\vec{p}_1^{*2}}{m_1} + \frac{\vec{p}_2^{*2}}{m_2} = \frac{\vec{p}_{1-\text{нов}}^{*2}}{m_1} + \frac{\vec{p}_{2-\text{нов}}^{*2}}{m_2} \tag{154}$$

С учетом (152):

$$\vec{p}_1^{*2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \vec{p}_{1-\text{нов}}^{*2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{155}$$

Отсюда

$$|\vec{p}_1^{*2}| = |\vec{p}_{1-\text{нов}}^{*2}| \tag{156}$$

Итак, теперь все готово для построения векторной диаграммы импульсов. Остается собрать формулы.

Из уравнения (147) имеем

$$|\vec{p}_1^*| = m_2 v_c \tag{157}$$

Из уравнения (156) дополняется предыдущее равенство:

$$|\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_{1-\text{нов}}^*| = m_2 v_c \tag{158}$$

Из (152):

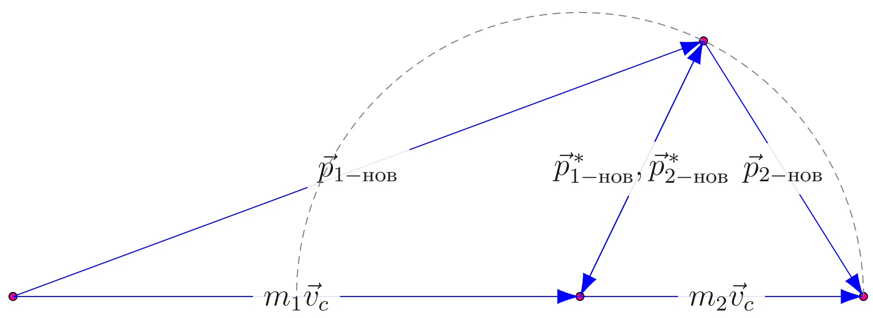
$$\vec{p}_{1-\text{нов}}^* = -\vec{p}_{2-\text{нов}}^* \quad \text{и} \quad \vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^* \tag{159}$$

Из (148,149):

$$\vec{p}_{1-\text{нов}} = \vec{p}_{1-\text{нов}}^* + m_1 \vec{v}_c \tag{160}$$

$$\vec{p}_{2-\text{нов}} = \vec{p}_{2-\text{нов}}^* + m_2 \vec{v}_c \tag{161}$$

Возьмем случай, когда $m_1 > m_2$:



Это и есть диаграмма импульсов.

1.4. Закон Бернулли для стационарного потока идеальной жидкости

Определение 1. Жидкость называется **идеальной**, если в ней отсутствует вязкое трение $(\eta = 0)$

Определение 2. **Частицей среды** называется малый элемент объема, в пределах которого характеристики течения (скорость, давление) можно считать постоянными.

Определение 3. **Поле скоростей** – это распределение скоростей в пространстве и времени.

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \tag{162}$$

Определение 4. Течение называется **стационарным**, если в нем скорость и давление не зависят от времени.

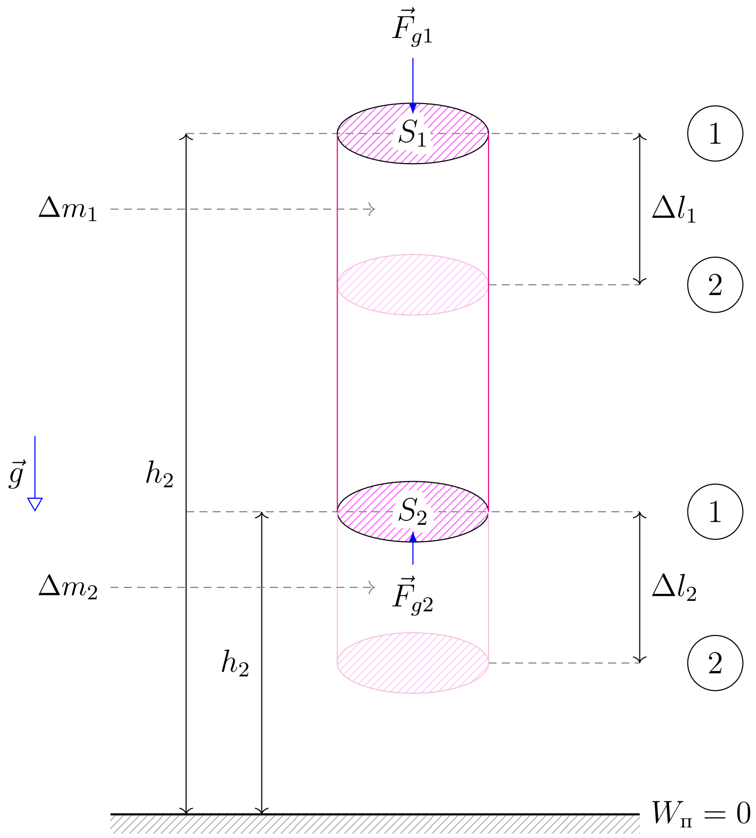
$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}) \qquad p = p(\vec{r}) \tag{163}$$

Определение 5. Линия тока жидкости – это линия, касательная к которой в каждой из её точек совпадает с вектором скорости в этой точке.

Определение 6. Трубка тока – это трубка, составленная из линий тока, проходящих через точки небольшого замкнутого контура.

Определение 7. Несжимаемой жидкостью называется жидкость, плотность которой постоянна.

Мы будем выводить формулы для несжимаемой жидкости.



$$\Delta W_{мех} = \Delta W_{мех}^{2-2'} + \Delta W_{мех}^{1-1'} = \frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} - \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} + \Delta m_2 g h_2 - \Delta m_1 g h_1 \tag{164}$$

Из стационарности будет следовать $\Delta m_1 = \Delta m_2$, из несжимаемости – $\rho_1 = \rho_2$

$$A = A_{давл1} + A_{давл2} = F_{g1} \cdot \Delta l_1 - F_{g2} \cdot \Delta l_2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 \tag{165}$$

Так как

$$S_1 \Delta l_1 = \Delta V_1 = \frac{\Delta m_1}{\rho_1} \tag{166}$$

То

$$A = (p_1 - p_2)\frac{\Delta m}{\rho} \tag{167}$$

$$\frac{\Delta m_2 v_2^2}{2} + \Delta m_2 g h_2 - \frac{\Delta m_1 v_1^2}{2} - \Delta m_1 g h_1 = p_1 \frac{\Delta m}{\rho} - p_2 \frac{\Delta m}{\rho} \tag{168}$$

После совсем небольших преобразований мы получим **закон Бернулли**:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \tag{169}$$

Закон справедлив *вдоль выбранной линии тока.*

1) p_1 – внешнее (дополнительное) давление

2) $\rho g h$ – гидростатическое давление

3) $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамическое давление (динамический напор)

Попутно получили уравнение неразрывности несжимаемой жидкости:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \tag{170}$$