3.а $(U+Ri)|_{x=0} = 0$ (заземление через акт. сопрот.)

3.б $U|_{x=0} = -L_0 i_t|_{x=0}$ (— // — активн. индукт.)

3.в $-C_0 U_t|_{x=0} = i|_{x=0}$

Задача Штурма-Лиувилля

$X = X(x)$

(1) $\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\lambda\rho(x) - q(x))X = 0 \qquad x\in(0,l)$

Это краевая задача

Регулярная задача — задача, где можно задать граничн. усл. на концах отрезка

$P(x)\in C^1(0,l) \qquad \rho(x), q(x) \in C(0,l)$

$P(x) \geq P_0 > 0$, $x\in[0,l]$

$\rho(x) \geq \rho_0 > 0$, $x\in[0,l]$

условия для регулярной задачи Шт.-Л.

(2) $\alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0) = 0$, $\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha_1^2+\beta_1^2 \neq 0$

(3) $\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0$, α_1

Те значения параметра λ, при которых ур-ние (1) имеет нетривиал. решение, удовл. граничн. усл. (2) и (3), наз-ся собствен. значениями, а соответств. решения собствен. ф-ции

$X = 0$ — тривиальное решение

Задача Шт.-Л. заключ. в отыскании всех собствен. знач. и собствен. ф-ций.

$L_{2\rho}(0,l)$ — пр-во ф-ций, облад. св-вом

$\int_0^l f^2(x)\rho(x)\,dx < \infty$ интеграл сх-ся

$\rho(x)$ - весовая ф-ция

$$(f(x), g(x)) = \int_0^l f(x) g(x) \rho(x) dx$$

скалярное произв.

норма в пр-ве $L_{2\rho}$

$$\|f(x)\|^2 = (f(x), f(x)) = \int_0^l f^2(x) \rho(x) dx$$

λ - собствен. знач.

X - собствен. ф-ция

$$\|X_\lambda(x)\|^2 = \int_0^l X_\lambda^2(x) \rho(x) dx$$

этот интеграл больше нуля

Ф-ция наз-ся нормированная на единицу, если ее норма равняется единице

$$\|X_\lambda(x)\| = 1$$

Если λ собств. знач., то $CX_\lambda(x)$ - собствен. ф-ция

Это позволяет каждому λ поставить в соответств. собствен. ф-цию, нормир. на единицу.

$\|X_\lambda(x)\| = H$ пусть норма равна H, тогда

$$\left\|\frac{X_\lambda}{\sqrt{H}}\right\| = 1$$

Свойства собствен значений собствен. ф-ций

1. Каждому собствен. значению соответств одна с точностью до множителя собств. ф-ция

Док-во (от противного)

Предположим λ - собств. знач., $X_\lambda(x)$ - собств. ф-ция

$\tilde{X}_\lambda(x)$ - собств знач.

Граничн. усл. (2) удовл. $X_\lambda(x)$ и $\bar{X}_\lambda(x)$

$$\begin{cases} \alpha_1 X'_\lambda(0) - \beta_1 X_\lambda(0) = 0 \\ \alpha_1 \bar{X}'_\lambda(0) - \beta_1 \bar{X}_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

Рассматр. с-му от-но α_1 и β_1, лин. однород. система имеет нетрив. решение, т.к. $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, тогда определитель с-мы равен нулю

$$\Delta = \begin{vmatrix} X'_\lambda(0) & -X_\lambda(0) \\ \bar{X}'_\lambda(0) & -\bar{X}_\lambda(0) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = -X'_\lambda(0)\bar{X}_\lambda(0) - X_\lambda(0)\bar{X}'_\lambda(0)$$

$$\Delta = -W(X_\lambda(x), \bar{X}_\lambda(x))\big|_{w=0}$$

Если W в одной точке равен нулю, то он тождеств. равен нулю

$$W(X_\lambda(x), \bar{X}_\lambda(x)) \equiv 0$$

если $W = 0$, тогда эти ф-ции лин. зависимы

$$X_\lambda = c\bar{X}(x)$$

2. Собствен. ф-ции соответств. различным собств. значениям ортогональны на промежутке $(0, l)$ с весом $\rho(x)$

Пусть λ_n – собств. знач. $\sim X_n(x)$ – собств. ф-ция

λ_m – —"— $\sim X_m(x)$ – собств. ф-ция

Если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то $(X_m, X_n) = \int_0^l X_n(x) X_m(x)\rho(x)dx = 0$

Док-во

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right)+(\lambda_n\rho(x)-q(x))X_n=0 \quad \Big| \, X_m(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_m}{dx}\right)+(\lambda_m\rho(x)-q(x))X_m=0 \quad \Big| \, X_n(x)$$

$$\int_0^l\left\{X_m(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right)-X_n(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_m}{dx}\right)\right\}dx+$$
$$+(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)\cdot X_m(x)\rho(x)\,dx=0$$

$$p(x)\frac{dX_n}{dx}X_m(x)\Big|_0^l-\cancel{\int_0^l p(x)\frac{dX_n}{dx}\frac{dX_m}{dx}dx}-$$
$$-p(x)\frac{dX_m}{dx}X_n\Big|_0^l+\cancel{\int_0^l p(x)\frac{dX_m}{dx}\cdot\frac{dX_n}{dx}dx}+$$
$$+(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)\cdot X_m(x)\rho(x)\,dx=0$$

(интегрирование по частям)

$$p(l)(X_n'(l)\cdot X_m(l)-X_m'(l)X_n(l))-$$
$$-p(0)(X_n'(0)X_m(0)-X_m'(0)\cdot X_n(0))+$$
$$+(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_n(x)X_m(x)\rho(x)\,dx$$

$$\begin{cases}\alpha_1X_n'(0)-\beta_1X_n(0)=0\\ \alpha_1X_m'(0)-\beta_1X_m(0)=0\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}X_n'(0) & -X_n(0)\\ X_m'(0) & -X_m(0)\end{vmatrix}=$$

$$=-X_n'(0)X_m(0)-X_m'(0)X_n(0)=0$$

это коэфф. перед $p(0)$

Если рассмотреть (3) гран. усл., то получим, что коэфф перед $p(l)$ равен 0

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx=0$$

Если $\lambda_n\neq\lambda_m$, то $\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx=0$

3. Все собствен. значения вещественны

Док-во (от противного)

Предположим, что

$\lambda_0=\lambda_0'+i\lambda_0''$, $\lambda_0''\neq 0$ – собств. значен.

а $X_{\lambda_0}(x)$ – собств. ф-ция

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_{\lambda_0}}{dx}\right)+\left((\lambda_0'+i\lambda_0'')\rho(x)-q(x)\right)X_{\lambda_0}(x)=0$$

$$\alpha_1X'_{\lambda_0}(0)-\beta_1X_{\lambda_0}(0)=0$$

$$\alpha_2X'_{\lambda_0}(l)-\alpha_2X_{\lambda_0}(l)=0$$

все коэфф. и ф-ции в ур. ($\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,p(x),q(x),\rho(x)$) вещественн.

Возьмем комплексное сопряжение

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\overline{X}_{\lambda_0}}{dx}\right)+\left((\lambda_0'-i\lambda_0'')\rho(x)-q(x)\right)\overline{X}_{\lambda_0}(x)=0$$

$$\overline{\lambda_0}=\lambda_0'-i\lambda_0''$$

$$X_{\overline{\lambda_0}}(x)=\overline{X}_{\lambda_0}(x)$$

$\lambda_0\neq\overline{\lambda_0}$, тогда по 2 св-ву

$$\int_0^l X_{\lambda_0}(x)X_{\overline{\lambda_0}}(x)\rho(x)\,dx=0$$

$$\int_0^l X_{\lambda_0}(x)\overline{X_{\lambda_0}(x)}\rho(x)\,dx=0$$

$$\int_0^l |X_{\lambda_0}(x)|^2\rho(x)\,dx=0$$ противоречие

4. Если $q(x) \geq 0$, то все собств. знач. неотриц.

Док-во

Пусть λ_n – собствен. значение, $X_n(x)$ соотв собств. ф-ция, нормир. на единицу

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right) + (\lambda_n p(x) - q(x))X_n = 0 \Big| \cdot X_n(0) \text{ и } \int_0^l$$

$$\int_0^l X_n \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right)dx + \lambda_n \underbrace{\int_0^l p(x) X_n^2 dx}_{=1} -$$

$$- \int_0^l q_n X_n^2 dx = 0$$

$$\lambda_n = -\int_0^l X_n(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right)dx + \int_0^l q(x)X_n^2(x)dx =$$

$$= -X_n(x)p(x)\frac{dX_n}{dx}\Big|_0^l - \int_0^l \frac{dX_n}{dx}p(x)\frac{dX_n}{dx}dx +$$

$$+ \int_0^l q(x) X_n^2(x) dx =$$

$$= -p(l)X_n(l)X_n'(l) + p_0 X_n'(0)X_n(0) +$$

$$+ \underbrace{\int_0^l p(x)\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^l q(x)X_n^2(x)dx}_{\substack{\geq 0 \\ q(x) \geq 0}}$$

$\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$

$$X_n'(0) = \frac{\beta_1 X_n(0)}{\alpha_1} \quad \text{из (2)}$$

$$X_n'(l) = -\frac{\beta_2 X_n(l)}{\alpha_2} \quad \text{из (3)}$$

$$\lambda_n = p(l)\frac{\beta_2}{\alpha_2}X_n^2(l) + p_0\frac{\beta_1}{\alpha_1}X_n^2(0) + \int_0^l p(x)\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx +$$

$$+ \int_0^l q(x) X_n^2 dx \geq 0$$

5. $\exists$ счетное мн-во счет собств. значений, которое можно расположить в порядке возраст.

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$

Предельная точка собствен. значений нах-ся на бесконечности

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

6. Теорема Стеклова

Пусть $f(x) \in C^2(0, \ell) \cap C^1[0, \ell]$ и удовл. гранич. условиям

$$\alpha_1 f'(0) - \beta_1 f(0) = 0$$

$$\alpha_2 f'(\ell) + \beta_2 f(\ell) = 0$$

Тогда ф-цию $f(x)$ можно разложить в ряд по собствен. ф-циям задачи (1-3)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \quad (4)$$

с коэфф. $$a_n = \frac{\int_0^\ell f(x) X_n(x) \rho(x)\, dx}{\int_0^\ell X_n^2(x) \rho(x)\, dx} = \frac{(f(x), X_n(x))}{\|X_n\|^2} \quad (5)$$

И этот ряд сх-ся к ф-ции $f(x)$ абсолютно и равномерно

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n X_n$$

равномерная сх-ть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad |f(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [0, \ell]$$

$(4) \times X_m(x) \rho(x)$ и $\int$

$$\int_0^\ell f(x) X_m \rho(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^\ell X_n(x) X_m(x) \rho(x)\, dx}_{=0, \text{ если } n \neq m} =$$

$$= a_n \int_0^\ell X_m^2(x) \rho(x)\, dx$$

$$a_m = \frac{\int_0^l f(x) X_m(x) \rho(x) dx}{\int_0^l X_m^2(x) \rho(x) dx}$$

7. Теорема Стеклова (II)

Пусть $f(x) \in L_{2,\rho}(0,l) \rightarrow \int_0^l f^2(x)\rho(x)dx < \infty$

Тогда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x)$

$$a_n = \frac{(f(x), X_n(x))}{\|X_n\|^2}$$

И этот ряд сх-ся к функции $f(x)$ по норме пр-ва $L_{2,\rho}(0,l)$

Сх-ся по норме пр-ва это

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \|f(x) - S_n(x)\|_{L_{2,\rho}} < \varepsilon \quad n \geq N(\varepsilon)$

$\int_0^l (f(x) - S_n(x))^2 \rho(x) dx < \varepsilon^2$

сх-ть в среднем

Метод разделения переменных

Применим для решения начал., начальн.-краевых задач, ур-ний гиперболич. и параболич. типа, для решения ~~начальн.~~ краевых задач эллиптич. типа

Условия применимости

1. Задача должна быть линейной

лин. ур-ние, нач. и граничн. условия

2. В однородном ур-нии, соответств. задаче, и однородн. гранич. условиях должны разделятся переменные

Принцип дискретной суперпозиции

Пусть 1) $\hat{L}U = 0$ — лин. дифф. ур-ние

$\hat{L}$ — лин. дифф. оператор любой

Пример

$$\hat{L} = \frac{d}{dx}$$

$$\hat{L} = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + (\lambda\rho - q(x))$$

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Оператор линейный, если

$$\hat{L}(C_1U_1 + C_2U_2) = C_1\hat{L}(U_1) + C_2\hat{L}(U_2)$$

2) U_k, $k = \overline{1, \infty}$ — решения ур-ния

Тогда

$U = \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k U_k$ также решение ур-ния, если все производн. входящ. в ур-ние можно вычислять перестановкой дифференцирования и суммирования

Док-во

$$\hat{L}\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_kU_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{L}(C_kU_k) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \underbrace{\hat{L}(U_k)}_{=0} = 0$$

Пример

Решение задачи о свободных колебаний струны методом разделения переменных.

(1) $U_{tt} - a^2U_{xx} = 0$, $0 < x < l$, $t > 0$

(2) $U|_{t=0} = \varphi(x)$

(3) $U_t|_{t=0} = \psi(x)$

(4) $U|_{x=0} = 0$

(5) $U|_{x=l} = 0$

Будем искать решение ур-ния (1) в виде $U = X(x)T(t)$ (6)

подставим в (1)

$$XT'' - a^2X''T = 0 \quad | : a^2XT$$

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

левая часть не зависит от перемен. x, правая часть не зависит от t, значит это константа

$-\lambda$ - выбрано для удобства, чтобы получить задачу Штурма - Лиувилля

$$T'' + a^2\lambda T = 0 \quad (7)$$

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (8)$$

это значит мы разделили переменные вместо ур-ния в частн. произв. получили 2 ур-ния в обыкн.

Поделим перемен. в граничн. условиях

$$T(t)X(0) = 0$$

$T(t)$ - нетождествен. ноль $\Rightarrow X(0) = 0 \ (9)$

$T(t)X(\ell) = 0 \Rightarrow X(\ell) = 0 \ (10)$ раздел. перемен. в граничн. условиях

(8) - (10) пример задачи Штурма - Лиувилля

Задача (8) - (10)

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\ell}\right)^2, \quad n \in N$$

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{\ell}x$$

Найден. λ_n подставляем в ур-ние 7

$$T_n'' + \left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 T_n = 0 \quad (11)$$

разные ур-ния $\Rightarrow$ разные решения

$$\omega_n = \frac{a\pi n}{\ell}$$

$$T_n(t) = A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t \quad (12)$$

Найден. X_n и T_n подставляем в ф-лу (6)

$$U_n(x,t) = X_n T_n = (A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \ n\in N$$

все функции $U_n(x,t)$ удовл. ур-нию (1) и граничн. условиям (4) и (5)

Применяем принцип дискретной суперпозиции

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)\sin\frac{\pi n}{l}x \quad (13)$$

при равн. сх-ти - это решение ур-ния

Подберем A_n и B_n так, чтобы выполнялись нач. условия (2), (3)

$$(2) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\sin\frac{\pi n}{l}x}_{X_n(x)} = \varphi(x)$$ ряд Фурье

Используем теорему Стеклова

$$A_n = \frac{\int_0^l \varphi(x)X_n(x)\rho(x)\,dx}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx \quad (14)$$

$$(3) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n\sin\frac{\pi n}{l}x = \psi(x)$$

разложение $\psi(x)$ в ряд по собствен. ф-циям

$$\omega_n B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$$

$$B_n = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx \quad (15)$$

Ответ задачи это ряд (13) с коэфф (14) и (15)

Метод характеристик использ. только для решения волнового ~~ур~~ ур-ния гипербол. типа, но дает решение в явном виде

А метод разд. перемен. позволяет найти решение в любой момент t

Физическая интерпретация

$$U_n(x,t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\left(\underbrace{\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}}_{\cos\varphi_n}\cos\omega_n t + \underbrace{\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}}_{\sin\varphi_n}\sin\omega_n t\right)\cdot$$

$$\cdot \sin\frac{\pi n}{l}x =$$

$$= \sqrt{A_n^2+B_n^2}\cos(\omega_n t - \varphi_n)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

стоячая волна = гармоника

$$U_n(x_0, t) = \sqrt{A_n^2+B_n^2}\sin\frac{\pi n}{l}x_0 \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

ω_n – собствен. частота колебаний струны

$$\sin\frac{\pi n}{l}x_0 = 0$$

$$\frac{\pi n}{l}x_0 = \pi k$$

$$x_0 = \frac{kl}{n}$$

в точках $U(x_0, t) = 0$ не происход. смещения, это неподвижные точки стоач. волны или узлы стояч

$$\sin\frac{\pi n}{l}x_0 = \pm 1$$

x_0 – пучности стоячей волны, в этих точках амплитуда гармонич. волны будет max

$$U_n(x, t_0) = \sqrt{A_n^2+B_n^2}\cos(\omega_n t_n - \varphi_n)\underbrace{\sin\frac{\pi n}{l}x}$$

профиль волны в любой момент времени

$$\cos(\omega_n t_0 - \varphi_n) = 0$$

$$U_n(x, t_0) = 0$$

t_0 – в эти моменты времени отклон. ноль, но скорость всех точек будет max

$$\cos(\omega_n t_0 - \varphi_n) = \pm 1$$

t_0 – будут max амплитуды, но скорость будет равна нулю

$$\omega_n = \frac{a\pi n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{l}$$ – определяет основной тон звуч. струны

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

T_0 – натяжение

ρ_0 – плотность стр., l – длина струн.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

при конструир. муз. инструментов использует эта ф-ла

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\rho_0\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right)dx =$$

$$= \frac{m\omega_n^2}{4}\left(A_n^2 + B_n^2\right)$$

$$m = \rho_0 l$$

Решение начально-краевой задачи
для ур-ний гиперболич. типа
(однородн. ур-ние и гранич. условия)

$$\rho(t)\,u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = 0,\quad 0<x<l,\ t>0 \quad (1)$$

$$p(x) \geqslant p_0 > 0,\quad x\in[0,l]$$

$$\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0,\quad x\in[0,l]$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (3)$$

$$(\alpha_1 u_x - \beta_1 u)|_{x=0} = 0 \quad (4)$$

$$(\alpha_2 u_x + \beta_2 u)|_{x=l} = 0 \quad (5)$$

$$u = X(x)\cdot T(t) \quad (6)$$

$$\rho(x)XT'' - T\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + q(x)XT = 0 \,\Big|\, : XT\rho(x)$$

$$\frac{T''}{T} = \frac{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) - q(x)X}{\rho(x)X} = -\lambda$$

$$T'' + \lambda T = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\lambda\rho(x) - q(x))X = 0 \quad (8)$$

$$(4) \rightarrow T(t)\left(\alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0)\right) = 0$$

$$\alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0) = 0 \quad (9)$$

$$(5) \rightarrow T(t)\left(\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l)\right) = 0$$

$$\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \quad (10)$$

Задача (8-10) решена найдены все собств. знач. и ф-ции λ_n и X_n

$T_n'' + \lambda_n T_n = 0$, предполагаем $\lambda_n > 0$

$T_n = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t)$

$(6) \to \quad U_n = (A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t)) \cdot X_n(x), n \in N \quad (11)$ (1

все ф-ции (11) удовлетв. ур-нию (1) и гранич. усл. (4) и (5).

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n} t) X_n(x) \quad (12)$$

Подбираем A_n и B_n так, чтобы удовл. нач. услов. (1) и (2)

$$(2) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi(x)$$

по теореме Стеклова $A_n = \dfrac{\int_0^l \varphi(x) X_n(x) p(x) dx}{\|X_n\|^2}$ (13)

$$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n \sqrt{\lambda_n} \sin\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sqrt{\lambda_n} \cos\sqrt{\lambda_n} t) X_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} t) X_n(x) = \psi(x)$$

$$B_n \sqrt{\lambda_n} = \frac{\int_0^l \psi(x) X_n(x) p(x) dx}{\|X_n\|^2}$$

$$B_n = \frac{\int_0^l \psi(x) X_n(x) p(x) dx}{\|X_n\|^2 \sqrt{\lambda_n}}$$

Решение задачи это (12) с коэффиц. (13) и (14)

Решение начально-краевой задачи для неоднородного ур-ния с однородными гранич. условия. Метод разложения по собствен. функциям

(1) $\rho(x) U_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right) + q(x) U = f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0$

$U|_{t=0} = \varphi(x)$ (2)

$U_t|_{t=0} = \psi(x)$ (3)

$(\alpha_1 U_x - \beta_1 U)|_{x=0} = 0$ (4)

$(\alpha_2 U_x + \beta_2 U)|_{x=l} = 0$ (5)

Если ур-ние неоднородное, то переменные разделить нельзя

Выпишем соотв. однородн. ур-ние

$\rho(x) U_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right) + q(x) U = 0$

и разделим перемен.

$U(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\lambda \rho(x) - q(x)) X = 0$ (6)

нужно ур-ние только для $X(x)$, ~~нельз~~ не нужно выписывать для T - это ошибка

$\alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0) = 0$ (7)

$\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0$ (8)

Задачу (6-8) решили, нашли λ_n и $X_n(x)$

Предполагаем $\lambda_n > 0$

$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) X_n(x)$ (9)

коэфф. зависят от t, нам U нужно найти, поэтому теорема Стеклова не поможет

все ф-ции (9) удовлетв. граничн. усл. (4) и (5)

Подберем $C_n(t)$ так, чтобы ряд удовл. ур-нию (1) и нач. усл. (2-3)

(1) $\Rightarrow p(x)\sum_{n=1}^{\infty} C_n''(t)X_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t)\Big[\underbrace{\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dX}{dx}\Big) - q(x)X_n(x)}_{=-\lambda_n \rho(x) X_n}\Big]$

$= f(x,t)$

Если подставляем X_n в ур-ние (6) и соотв. знач. λ_n, то получается тождество

$$\frac{d}{dx}\Big(p(x)\frac{dX}{dx}\Big) + (\lambda_n \rho(x) - q(x))X_n \equiv 0$$

$$\rho(x)\sum_{n=1}^{\infty} C_n''(t)X_n(x) + \rho(x)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n C_n(t)X_n(x) = f(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(C_n''(t) + \lambda_n C_n(t))X_n(x) = \frac{f(x,t)}{\rho(x)}$$

правая часть известная и разложена в ряд по собствен. функциям.

$$C_n''(t) + \lambda_n C_n(t) = \frac{\int_0^l \frac{f(x,t)}{\rho(x)} X_n \cdot \rho(x)\,dx}{\|X_n\|^2}$$

$$f_n(t) = \frac{\int_0^l \frac{f(x,t)}{\cancel{\rho(x)}} X_n \cdot \cancel{\rho(x)}\,dx}{\|X_n\|^2} \quad (10)$$

$$C_n''(t) + \lambda_n C_n(t) = f_n(t) \quad (11) \quad \text{ОДУ}$$

В (9) подставляем (2)

(2) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n(0)X_n(0) = \varphi(x) \Rightarrow C_n(0) = \dfrac{\int_0^l \varphi(x)X_n(x)\rho(x)\,dx}{\|X_n\|^2}$

$$\alpha_n = \frac{\int_0^l \varphi(x)X_n(x)\rho(x)\,dx}{\|X_n\|^2} \quad (12)$$

$C_n(0) = \alpha_n$ (13) получаем первое условие для ур-ния (11)

(3) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(0)X_n(x) = \psi(x)$

$$\beta_n = \frac{\int_0^\ell \psi(x) X_n(x) \rho(x) dx}{\|X_n\|^2} \quad (14)$$

$$C_n'(0) = \beta_n \quad (15)$$

Если ф. C_n удовл. (13) (15), то ряд удовл. усл (2), (3)

Если

Решаем задачу Коши (11), (13), (15)

$$C_n'' + \lambda_n C_n = f_n(t)$$

$$C_n'' + \lambda_n C_n = 0 \quad (\lambda_n \geqslant 0)$$ вариация произв. постоян.

$$C_n = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \quad (16)$$

$$C_n(t) = A_n(t) \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n} t)$$

$$C_n'(t) = \cancel{A_n'(t) \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n'(t) \sin(\sqrt{\lambda_n} t)} -$$

$$- A_n(t) \sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n(t) \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} t)$$

$$\boxed{A_n'(t) \cos\sqrt{\lambda_n} t + B_n'(t) \sin\sqrt{\lambda_n} t = 0} \quad (17)$$

$$C_n''(t) = - A_n'(t) \sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n'(t) \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} t) +$$

$$+ A_n(t) \lambda_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) - B_n(t) \lambda_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t)$$

$$- A_n'(t) \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n'(t) \cos(\sqrt{\lambda_n} t) = \frac{f_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (18)$$

(17) – (18) с-ма ур-ний для нахождения $A_n(t)$ и $B_n(t)$

$$A_n'(t) = - \frac{f_n(t) \sin\sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} \qquad A_n(t) = - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\xi) \sin(\sqrt{\lambda_n} \xi) d\xi + a_n$$

$$B_n'(t) = \frac{f_n(t) \cos\sqrt{\lambda_n} t}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\xi) \sin(\sqrt{\lambda_n} \xi) d\xi + b_n$$

Подставляем в (16)

$$C_n = a_n \cos\sqrt{\lambda_n} t + b_n \sin\sqrt{\lambda_n} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\xi)\Big\{-\cos\sqrt{\lambda_n} t \sin(\sqrt{\lambda_n}\xi)$$

$$+ \sin(\sqrt{\lambda_n} t)\cos\sqrt{\lambda_n}\xi\Big\} d\xi =$$

$$= a_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin\sqrt{\lambda_n} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\xi) \sin(\sqrt{\lambda_n} t - \sqrt{\lambda_n}\xi) d\xi$$

~~от~~ это решение подстав. в (13) и (15)

$$(13) \Rightarrow a_n = \alpha_n$$

$$(15) \Rightarrow$$

$$C_n'(t) = -\sqrt{\lambda_n} a_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + \sqrt{\lambda_n} b_n \cos\sqrt{\lambda_n} t +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} f_n(\xi) \sin\sqrt{\lambda_n}(t-\xi)\Big|_{\xi=t} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\xi) \sqrt{\lambda_n} \cos\sqrt{\lambda_n}(t-\xi) d\xi$$

$$C_n'(t) = \sqrt{\lambda_n} b_n = \beta_n$$

$$b_n = \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}}$$

Найден. a_n и b_n подстав. в C_n затем все в V

$$u(x,t) = \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos\sqrt{\lambda_n} t + \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n} t\right) X_n(x)}^{V} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\xi) \sin\sqrt{\lambda_n}(t-\xi) d\xi}_{W(x,t)}$$

Выделим $V(x,t)$ и $W(x,t)$, можно показать $V(x,t)$ удовл. однор. ур-нию и нач. усл.

$$\rho(x) V_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial V}{\partial x}\right) + q(x) V = 0$$

$$V|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$V_t|_{t=0} = \psi(x)$$

$$(\alpha_1 V_x - \beta_1 V)|_{x=0} = 0$$

$$(\alpha_2 V_x + \beta_2 V)|_{x=l} = 0$$

$$\rho(x) W_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + q(x) W(t) = \ (x,t)$$
$$W|_{t=0} = 0$$
$$W_t|_{t=0} = 0$$
$$(\alpha_1 W_x - \beta_1 W)|_{x=0} = 0$$
$$(\alpha_2 W_x + \beta_2 W)|_{x=l} = 0$$

Сведение нач.-краевой задачи с неоднородными гранич. усл. к задаче с однородн. гранич. усл.

$$\rho(x) U_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right) + q(x)U = f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0 \quad (1)$$
$$U|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$
$$U_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (3)$$
$$(\alpha_1 U_x - \beta_1 U)|_{x=0} = \mu_1(x) \quad (4)$$
$$(\alpha_2 U_x + \beta_2 U)|_{x=l} = \mu_2(x) \quad (5)$$

Решение в виде $U = \vartheta + w$ (6)

$$(\alpha_1 \vartheta_x - \beta_1 \vartheta)|_{x=0} = \mu_1(x)$$
$$(\alpha_2 \vartheta_x + \beta_2 \vartheta)|_{x=l} = \mu_2(x)$$

таких ф-ций ϑ - бесчислен. мн-во, от выбора ϑ будет лучше исслед. U.

В большинстве случаев $\vartheta = A(t)\cdot x + B(t)$ (7) ~~мн~~ можно найти в лин. виде

$$\begin{cases} \alpha_1 A(t) - \beta_1 B(t) = \mu_1(t) \\ \alpha_2 A(t) + \beta_2 (A(t) l + B(t)) = \mu_2(t) \end{cases}$$

Укажем случай, когда в лин. виде ф-ции найти нельзя

$$\begin{cases} \vartheta_x|_{x=0} = \mu_1(t) \\ \vartheta_x|_{x=l} = \mu_2(t) \end{cases}$$

ищем в виде квадрат. ф-ции $\vartheta = A(t)x^2 + B(t)x$ (7a)

$\mu_1 \neq \mu_2$

Ф-цию ϑ нашли

Сформулируем задачу для ω (6) подст. в (1)

$$\rho(x)\vartheta_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + q(x)\vartheta +$$ конкретн. ф-ции

$$+\rho(x)\omega_{tt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + q(x)\omega = f(x,t)$$

$$\rho(x)\omega_{tt} + \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + q(\;)\omega = f_1(x,t)$$

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \left(\rho\vartheta_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) + q(x)\vartheta\right)$$

Можно найти такую ф-цию ϑ так, чтобы $f_1(x,t) = 0$

$$\omega = u - \vartheta$$

$$\omega|_{t=0} = u|_{t=0} - \vartheta|_{t=0} = \varphi(x) - \vartheta|_{t=0}$$

$$\omega_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - \vartheta_t|_{t=0} = \psi(x) - \vartheta_t|_{t=0}$$

(6) подставим в (4)

$$\underbrace{(\alpha_1 \vartheta_x - \beta_1 \vartheta)|_{x=0}}_{\mu_1(t)} + (\alpha_1 \omega_x - \beta_1 \omega)|_{x=0} = \mu_1(t)$$

$$(\alpha_1 \omega_x - \beta_1 \omega)|_{x=0} = 0$$

$$(\alpha_2 \omega_x + \beta_2 \omega)|_{x=l} = 0$$

Если правая часть 0 разделяем переменные, если не ноль представляем решение в виде ряда

Метод разделения переменных в многомерном случае

Однородное ур-ние с однородн. граничн. условиями

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = u(x,t)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\rho(x)U_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}U) + q(x)U = f(x,t) \quad (1)$$

(1) $\operatorname{grad}U = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_3} \right\}$

$$\vec{A}(x,t) = \{A_1, \dots, A_n\}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

$$\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}U) = k(x)\Delta U + (\operatorname{grad}K, \operatorname{grad}U)$$

$$\rho(x)U_{tt} - (\operatorname{grad}K, \operatorname{grad}U) + k(x)\Delta U + q(x)U = f(x,t)$$

$) = 0$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^3}{\partial x_3^3}$$

$$\rho(x) \geq \rho_0 > 0, \; x \in Q, \; Q \subset \mathbb{R}^n$$

$$k(x) \geq k_0 > 0, \; x \in Q, \; Q \subset \mathbb{R}^n$$

В этом случае ур-ние (1) явл.-ся ур-нием гиперболич. типа. Тип определяется в конкретн. точке, главная часть - часть со старшими произв. Этой главн. части в соотв. ставим квадрат. форму

x_1, x_2, x_n - другие перемен.

$$\omega = \rho(x_0)t^2 - k(x_0)(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2)$$

$$\omega = \rho(x_0)t^2 - k(x_0)\sum_{t=2}^{n+1} t_i^2$$

Сформулируем нач. краевую задачу ур-ние (1)

$$\rho(x)U_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}U) + q(x)U = f(x,t), \; x \in Q, \; t > 0 \quad (1)$$

Решить ур-ние в обл. $x \in Q, t > 0$

$U|_{t=0} = \varphi(x)$ (2)

$U_t|_{t=0} = \psi(x)$ (3)

$\left(\alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U\right)\Big|_{\partial Q} = \mu(x,t)$ (4)

$\frac{\partial U}{\partial n}$ - произв. по направл.

$\vec{n}$ - вектор нормали к Q

$x \in \partial Q$, $t > 0$ x - связано на границе ∂Q - граница обл. Q

как правило это не пишут

Q - полубесконечный цилиндр в пр-ве $\mathbb{R}^n$

Реализации метода раздел. перемен.
на решение однородн. ур-ния
с однородн. гранич. усл. 9

$$\rho(x)U_{tt} - \mathrm{div}(k(x)\,\mathrm{grad}\,U) + q(x)U = 0 \quad (1)$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$

$$U_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (3)$$

$$\left(\alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U\right)\Big|_{\partial Q} = 0 \ (4),\ x \in \partial Q,\ t > 0$$

Разделить сразу все перемен. невозможно
Ищем решение в виде

$$U = T(t)\cdot F(x_1, \dots, x_n) = T(t)\cdot F(x) \quad (5)$$

$$\rho(x)T''F(x) - T(t)\,\mathrm{div}(k(x)\,\mathrm{grad}\,F) + q(x)T(t)F(x) = 0 \ \Big| : \rho(x)T(t)F(x)$$

$$\frac{T''}{T} = \frac{\mathrm{div}(k(x)\,\mathrm{grad}\,F) - q(x)F(x)}{\rho(x)F} = -\lambda$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (\text{ОДУ}) \quad (6)$$

$$\mathrm{div}(k(x)\,\mathrm{grad}\,F) + (\lambda\rho(x) - q(x))F = 0 \quad (7) \ (\text{ур-ние в частных произв})$$

$$T(t)\left(\alpha \frac{\partial F}{\partial n} + \beta F\right)\Big|_{\partial Q} = 0$$

$$T(t) \not\equiv 0$$

$$\left(\alpha\cdot \frac{\partial F}{\partial n} + \beta F\right)\Big|_{\partial Q} = 0 \quad (8)$$

~~Обобщение~~ задача (7)–(8) на собств. значения
обобщ. случай одномерной задачи Штурма-Лиувилля
Св-ва собствен. знач.

1. $\exists$ счетное мн-во различн. собств. знач.
   $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$
   $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$

2. $\lambda_n \neq \lambda_m$ $\quad \int\limits_Q \dots \int F_n(x)F_m(x)\,dx = 0$

Различн. знач. λ соотв. ортогональн. собств. ф-ции

3. Каждому собств. знач. λ_n может соотв. конечное число лин. независим. собств. ф-ций

$\lambda_1 \sim F_1^{(1)}, F_1^{(2)}, \ldots, F_1^{(s)}$

Разным собств. знач. может соотв. разное кол-во собств. ф-ций
значен.

Ф-ции $F_1^{(1)}, F_1^{(2)}, \ldots, F_1^{(s)}$ не обязат. ортогон. между собой ортогонал.

Ортогонализ. Шмидта

$F_1^{(1)}, \quad (F_1^{(1)}, F_1^{(2)}) \neq 0$

$\tilde{F}_1^{(2)} = F_1^{(1)} + C_1 F_1^{(2)}$

$(F_1^{(1)}, \tilde{F}_1^{(2)}) = 0$

$F(x)$

$(F_1^{(1)}, \tilde{F}_1^{(2)}) = (F_1^{(1)}, F_1^{(1)}) + C_1 (F_1^{(1)}, F_1^{(2)}) = 0$

$C_1 = -\dfrac{\| F_1^{(1)} \|^2}{(F_1^{(1)}, F_1^{(2)})}$

всегда можем выбрать, так, чтобы $F_1^{(1)}, \ldots, F_1^{(n)}$ были ортогональны между собой

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & = & \lambda_2 & = \ldots = & \lambda_s & < & \lambda_{s+1} \\ \tilde{F}_1^{(1)} & & \tilde{F}_1^{(2)} & & \tilde{F}_1^{(s)} & & \end{array}$$

каждому числу λ пишем кол-во ф-ции равное его ~~порядку~~ кратности (она может быть различна)

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \\ \tilde{F}_1^{(1)} \end{array}$$

$\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$

$\lambda_0 = \lambda_1 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$

4. Теорема Стеклова

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k F_k(x)$$

$F_k(x)$ – различные собствен. ф-ции

$$C_k = \frac{\int_Q \Phi(x) F_k(x) \rho(x) dx}{\int_Q F_k^2(x) \rho(x) dx}$$

Предполагаем, что все λ_k и F_k найдены

$\lambda_k > 0$ найден. знач. подстав. в (6)

$$T_k'' + \lambda_k T_k = 0$$

$$T_k = a_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k} t$$

$$U_k = (a_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k} t) \cdot F_k$$

используем принцип дискретн. суперпозиции

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos\sqrt{\lambda_k} t + b_k \sin\sqrt{\lambda_k} t) F_k(x) \quad (9)$$

ряд (9) удовл. (1) и граничн. усл (4)

$$U|_{t=0} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k F_k(x) = \varphi(x)$$

$$a_k = \frac{\int_Q \varphi(x) F_k(x) \rho(x) dx}{\|F_k\|^2}$$

$$U_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} F_k(x) = \psi(x)$$

$$b_k = \frac{\int_Q \psi(x) F_k(x) \rho(x) dx}{\sqrt{\lambda_k} \|F_k\|^2}$$

Решение задачи это ряд (9)

Цилиндрические ф-ции

$y = y(x)$ x – одномерная перемен.

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

ур-ние Бесселя, или ур-ние для цилиндр. ф-ций.

$$\underline{xy'' + y'} + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(xy') + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0$$

$$x\frac{d}{dx}(xy') + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x) = 0$$

$p(x_0) = 0$ x_0 - особая точка ДУ, если $p(x_0) = 0$

Для ур-ния Бесселя $x = 0$ особая точка

$$y(x) = x^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0 \quad (2)$$

решение обобщенное

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma}$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma-1}(n+\sigma)$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma}$$

$$\frac{d}{dx}(xy') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)^2 x^{n+\sigma-1}$$

$$x\frac{d}{dx}(xy') = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)^2 x^{n+\sigma}$$

$$x^2 y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{k+\sigma} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+\sigma}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\sigma)^2 x^{n+\sigma} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+\sigma} - \nu^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\sigma} = 0$$

$n=0:\quad a_0\sigma^2 - \nu^2 a_0 = 0 \quad (3)$

$n=1:\quad a_1(1+\sigma)^2 - \nu^2 a_1 = 0 \quad (4)$

$n\geq 2:\quad a_n(n+\sigma)^2 + a_{n-2} - \nu^2 a_n = 0 \quad (5)$

$(3) \Rightarrow a_0(\sigma^2-\nu^2) = 0 \Rightarrow \sigma = \pm\nu$

$a_0 \neq 0$

$\sigma = \nu$

$(4) \Rightarrow a_1((1+\nu)^2-\nu^2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$(5) \Rightarrow a_n[(n+\nu)^2-\nu^2] = -a_{n-2}$

$a_n(n^2+2n\nu] = -a_{n-2}$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)} \quad (6)$$

1) $n = 2k+1$

$$a_{2k+1} = -\frac{a_{2k-1}}{(2k+1)(2k+1+2\nu)}$$

$a_1 = 0$

$$a_3 = \frac{-a_1}{3(3+2\nu)} = 0 \Rightarrow a_{2k+1} = 0$$

2) $n=2k$

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2k(2k+2\nu)} = -\frac{a_{2(k-1)}}{2^2k(k+\nu)}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2\cdot 1(1+\nu)}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{2^2\cdot 2(2+\nu)} = \frac{a_0}{2^4\, 1\cdot 2(2+\nu)(1+\nu)}$$

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}\,1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k(k+\nu)\cdots(1+\nu)}$$

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$\Gamma(z)$ - мероморфная функция - особые точки только полюса

$z = 0, -1, -2, \ldots$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)(k+\nu)\ldots\underbrace{(2+\nu)\underbrace{(1+\nu)\Gamma(1+\nu)}_{\Gamma(2+\nu)}}_{\Gamma(3+\nu)}} =$$

$$= (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$y = \sum_{k=0}^\infty a_{2k} x^{2k+\nu} + \sum_{k=0}^\infty \underbrace{a_{2k+1}}_{=0} x^{2k+1+\nu} =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \quad (7)$$

$R = \infty$ радиус сходимости ряда

$$J_\nu(z) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$z, \nu \in \mathbb{C}$

Ф-ция Бесселя имеет особенности от параметра ν

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^\infty \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \quad (8)$$

(8) также явл-ся решением

Запишем как ведут себя эти ф-ции при $x \to \infty$

$x \to 0$

$$J_\nu(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{x}{\Gamma(\nu+1)}, \quad x \to 0$$

$$J_{-\nu}(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{x}{\Gamma(1-\nu)}$$

$\nu = m$

$$J_m(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{x}{\Gamma(m+1)}$$

$$J_{-m}(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \frac{x}{\underbrace{\Gamma(1-m)}_{\to\infty}} = 0$$

Нужно исследовать др. членов ряда, ничего нельзя сказать.

$\nu \neq m$

J_m и J_{-m} явл-ся лин. независимыми

$\nu = 0$ решения J_m и J_{-m} совпадают

Ф-ции (7) и (8) явл-ся лин. независимыми, если $m \notin \mathbb{Z}$

$$J_{-m}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-m+1)} =$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} (-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-m+1)} = [k-m=n]$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2m}}{\Gamma(m+n+1)\Gamma(n+1)} =$$

$$= (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+m+1)} = (-1)^m J_m(x)$$

Для любых двух решений y_1, y_2

$$x W(y_1, y_2) = \text{const}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x W(y_1, y_2)\right) = 0$$

$\times W(J_\nu(x), J_{-\nu}(x)) = \frac{2}{\pi} \sin \nu\pi$

W - вронскиан

Функция Неймана

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J(x)}{\sin\nu\pi} \quad \nu \neq m$$

$$N_m(x) = \frac{J_m(x)\cos m\pi - J_{-m}(x)}{\sin m\pi} = \frac{J_m(x)(-1)^m - J_{-m}(x)}{\sin m\pi}$$

$= \frac{0}{0}$ неопределенность

$$N_m(x) = \lim_{\nu \to m} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

$$W(J_\nu(x), N_\nu(x)) = W\left(J_\nu(x), J_x(x)\operatorname{ctg}\nu\pi - \frac{1}{\sin\nu\pi} J_{-\nu}(x)\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}\nu\pi \underbrace{W(J_\nu(x), J_\nu(x))}_{=0} -$$

$$- \frac{1}{\sin\nu\pi} \underbrace{W(J_\nu(x), J_{-\nu}(x))}_{\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu} = \frac{2}{\pi x}$$

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)$$

2-порядок ур-ния решение в виде двух лин. независим. ф-ций

$x \to 0$

$$N_n(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \frac{\Gamma(n)}{\pi}, \ n \geq 1$$

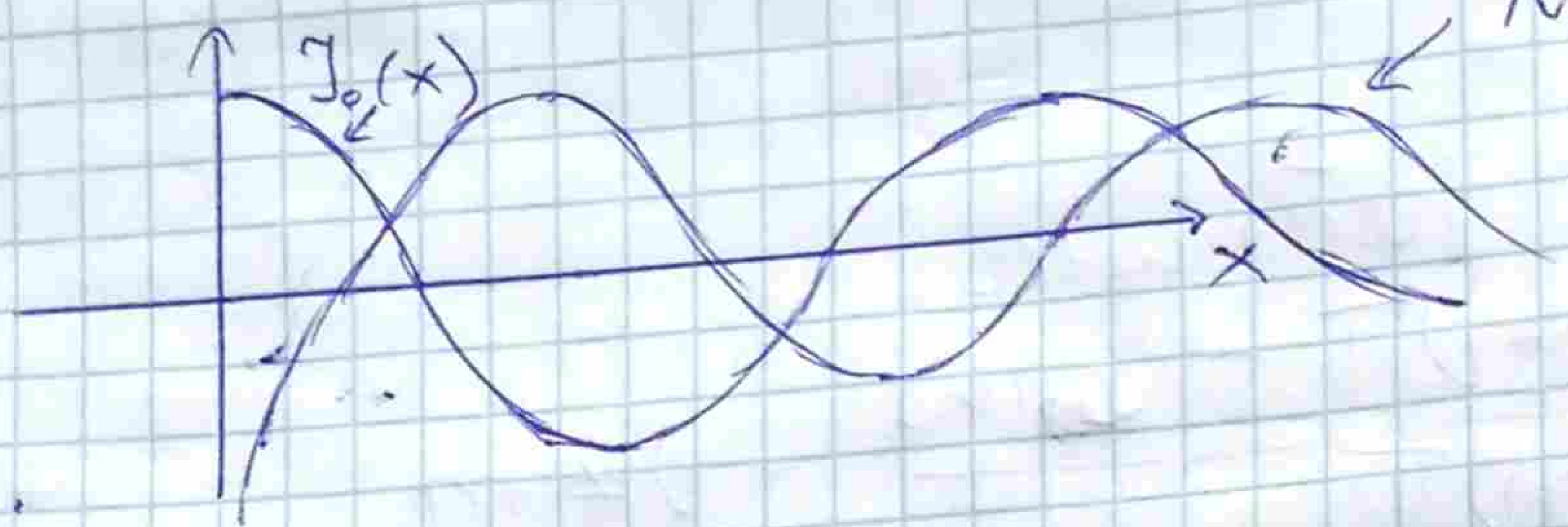
$$N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln\frac{x}{2}$$

Ф-ция Неймана при любых коэфф. и при $x \to 0$ неограничена

$x \to +\infty$

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$



$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$$ ф-ции Ханкеля

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

Уравнение параболич. типа

Ур-ние распростр. тепла в пр-ве

$\rho = \rho(x, y, z)$ – плотность

$c = c(x, y, z)$ – теплоемкость

$k = k(x, y, z)$ – коэфф. теплопров.

$f = f(x, y, z, t)$ – плотность источников тепла

$u = u(x, y, z, t) = u(M, t)$ – температура

$-\iint\limits_S k(M) \frac{\partial u}{\partial n} dS$ – поток тепла

направл. распр. тепла ф-ция убывающ.

$$\iiint\limits_Q c(M)\rho(M)\left(u(M, t_2) - u(M, t_1)\right) dV =$$

кол-во тепла

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{\partial Q} k(M) \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_Q f(M) dV$$

внешняя нормаль

$$u(M, t_2) - u(M, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$$

$$\iint\limits_{\partial Q} k(M) \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint\limits_Q \operatorname{div}(k(M) \cdot \operatorname{grad} u) dV$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_Q c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_Q \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u)\, dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_Q f(M,t)\, dV$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_Q \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u) - f(M,t)\right) dV = 0$$

Если $\int$ от непр. ф-ции по $\forall$ обл. обращ. в ноль, то тогда подинт. ф-ция тожд. ноль

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u) - f(M,t) = 0$$

ур-ние теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - (\operatorname{grad} k, \operatorname{grad} u) - f(M,t) = 0$$

$$\begin{cases} c(M) \equiv c_0 > 0 \\ \rho(M) \equiv \rho_0 > 0 \\ k(M) \equiv k_0 > 0 \end{cases} \qquad \frac{k_0}{c_0\rho_0} = a^2$$

$$u_t - a^2 \Delta u = f(M,t)$$

это пример ур-ния параб. типа

Типы граничных условий

$Q \subset \mathbb{R}^3$ $\qquad \partial Q$ – граница обл.

1. $u|_{\partial Q} = \mu(x,y,z,t)$

2. $k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = \mu(x,y,z,t)$ поток поступает в обл. Q

$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = \mu(x,y,z,t)$ уходит из обл. Q

чн. сл. $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0$ граница теплоизолирован.

3. $u(M,t)\big|_{\partial Q} = T_0$ теплообмен. с окруж. средой

$u_0(x,y,z,t)$ темп. окр. среды

$$k\frac{\partial U}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = h(U_0 - U)\Big|_{\partial Q}$$

$$\left(k\frac{\partial U}{\partial n} + hU\right)\Big|_{\partial Q} = hU_0$$

Постановка задач для ур-ния теплопр.

Начальная задача

Найти решение ур-ния в обл. $M \subset R^3$, $t > 0$

удовл. нач. усл.

$$U\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

$$U_t - a^2 \Delta U = f(M, t), \quad M \subset R^3, \quad t > 0$$

$$U\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

Начально-краевая (смеш.) задача

Найти решение ур-ния

$U_t - a^2 \Delta U = f(M, t)$ в обл. $M \in Q$, $t > 0$

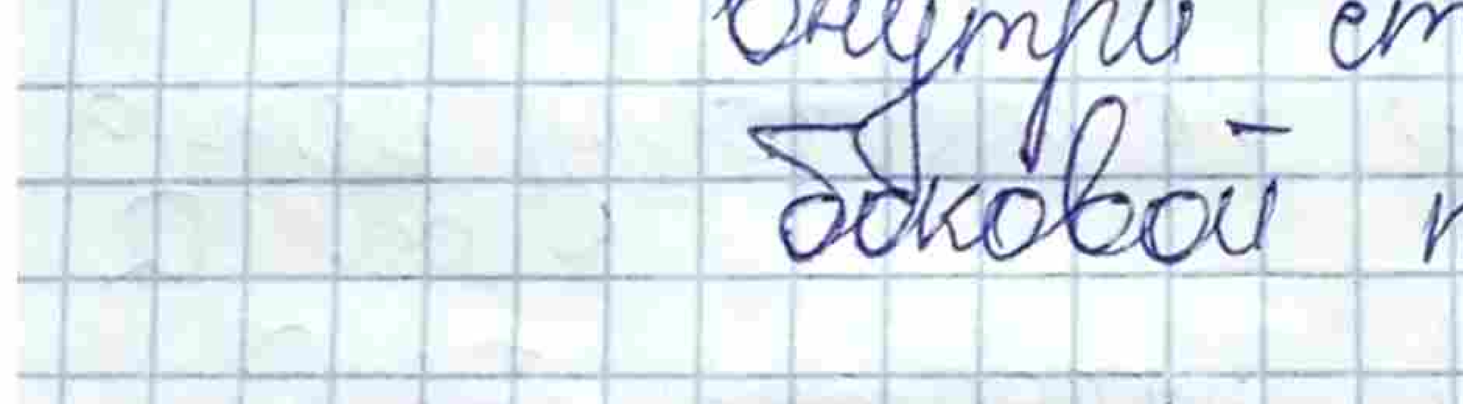
удовл. нач. усл.

$$U\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

и граничн. усл.

$$\left(\alpha\frac{\partial U}{\partial n} + \beta U\right)\Big|_{\partial Q} = \mu(x, y, z, t)$$

Уравнение распростр. тепла внутри стержня с теплоизолир. боковой пов-тью



$\rho = \rho(x)$

$c = c(x)$

$k = k(x)$

$U = U(x, t)$

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t)$$

ур-ние распр. тепла внутри стержня

$c \equiv c_0$, $k \equiv k_0$, $\rho \equiv \rho_0$

$$u_t - a^2 u_{xx} = \frac{f(x,t)}{c_0\rho_0}$$

Типы гран. усл.

1. $u|_{x=0} = \mu_1(t)$ задана темп.

2.1 $-k \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_1(t)$

$k \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \mu_2(t)$ поток тепла как на рис.

2.2. $u_x|_{x=0} = 0$ конец теплоизолиров.

3.1 $-k u_x|_{x=0} = h(u_0 - u)|_{x=0}$ $\quad u_0|_{x=0} > u|_{x=0}$

$(k u_x - h u)|_{x=0} = -h u_0$

3.2 $u_0|_{x=0} < u|_{x=0}$

$k u_x|_{x=0} = h(u - u_0)|_{x=0}$

$x = l$

$u_0|_{x=l} > u|_{x=l}$

$k u_x|_{x=l} = h(u_0 - u)|_{x=l}$

$(k u_x + h u)|_{x=l} = h u_0$

1. Нач. задача

Найти решение ур-ния

$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ в обл. $-\infty < x < \infty$, $t > 0$

удовл. нач. усл.

$u|_{t=0} = \varphi(x)$

2. Нач. краевая задача для огранич.

Найти решение ур-ния

$U_t - a^2 U_{xx} = f(x,t)$, $0<x, \ell$, $t>0$

удовл. нач. и гран. усл.

$U|_{t=0} = \varphi(x)$

$(\alpha_1 U_x - \beta_1 U)|_{x=0} = \mu_1(t)$

$(\alpha_2 U_x + \beta_2 U)|_{x=0} = \mu_2(t)$

Решение нач. задачи для одног. ур-ния теплопров. методом преобр. Фурье

(1) $U_t - a^2 U_{xx} = 0$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$

(2) $U|_{t=0} = \varphi(x)$

Пусть $f(x)$ - абсолютн. интегр. ф-ция на $(-\infty, +\infty)$, тогда

$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = F(k)$ наз-ся преобраз. Фурье (3)

k - волновое число

Если сх-ся $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ ф-ция $f(x)$ абсолютн. интегрир.

(3) несобст. интеграл.

$|f(x) e^{-ikx}| = |f(x)|$

$|f(x)|$ абсол. интегр, тогда (3) сх-ся равномерно по признаку Вейерштрасса

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{kx} dk$ (4)

обратн. преобр. Фурье

$F(k)$ не всегда обсалют. интегр. обратное преобр. сущ., если

1. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$

2. $f(x)$ имеет конечное число максимумов и минимумов.

(4) разложение ф-ции $f(x)$ в интеграл Фурье

Ур-ние (1) $\Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$ и $\int dx$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_t e^{-ikx} dx - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_{xx} e^{-ikx} dx = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_t\, e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)\, e^{-ikx} dx}_{F(k,t)} \Big)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_{xx} e^{-ikx} dx = \underbrace{U_x e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} (-ik) U_x e^{-ikx} dx \ominus$$

Предполагаем U_x при $x = \pm\infty$ обращ. в ноль

$$\ominus\, ik \Big(\underbrace{U\, e^{-ikx} \Big|_{+\infty}^{-\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} (-ik)\, U e^{-ikx} dx \Big) =$$

$$= -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)\, e^{-ikx} dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F(k,t) + a^2 k^2 F(k,t) = 0 \quad (5)$$

гран. усл. (2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$ и $\int dx$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U\big|_{t=0} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-ikx} dx$$

Обозначим $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-ikx} dx = h(k)$

$$\underbrace{\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x,t)\, e^{-ikx} dx \Big)}_{F(k,t)} \Big|_{t=0} = h(k)$$

$F(k,0) = h(k)$ (6)

Метод разложения в интеграл Фурье

Предположим

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,t)\, e^{ikx}\, dk \quad (7)$$

Подставим (7) в (1)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial t} e^{ikx} dk - a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (ik)^2 F(k,t) e^{ikx} dk =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + a^2 k^2 F\right) e^{ikx} dk = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + a^2 k^2 F = 0 \quad (5)$$

Подставим (7) в (2)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,0)\, e^{ikx}\, dk = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(\cancel{k})\, e^{-ikx}\, dk$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,0)\, e^{ikx}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{ikx}\, dk \quad (6)$$

Преобр. Фурье использ. только для $x \in R$ и для ур-ние с постоян. коэфф.

Решим задачу (5) и (6)

$$p + a^2k^2 = 0$$

$$p = -a^2k^2$$

$$F(k,t) = C(k)\, e^{-a^2k^2t}$$ общее решение

$$F(k,0) = C(k) = h(k)$$

$$F(k,t) = h(k)\, e^{-a^2k^2t}$$

$F(k,t)$ подставляем в (7)

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-a^2k^2t} e^{ikx}\, dk$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x-\xi, t) =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad (3)$$

формула Пуассона

Теорема о $\exists$ решения задачи

Пусть 1) $\varphi(x) \in C(x)$

2) $|\varphi(x)| \le M$

Тогда ф-ла (3) определяет классическое решение задачи (1), (2). Это решение будет ограничено при всех $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$

$|u(x,t)| \le M$

и имеет производные <u>всех порядков</u> по x и t в обл. $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ (особенность ур-ний параб. типа, решение более гладкое, чем нач. ф-ция)

Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$G(x-\xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

фундам. решение

1. $G_t - a^2 G_{xx} = 0$ опред. распред. темп. в стержне, котор. вызв. мгновен. точечн. источником тепла, помещ. в т. $x = \xi$

$G|_{t=0} = \delta(x-\xi)$

фундам. решение ур-ния теплопр. - это решение этой начал. задачи

$x = \xi$

$$G|_{x=\xi} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$$

$$\lim_{x \to 0} G|_{x=\xi} = \infty$$

$x \ne \xi$

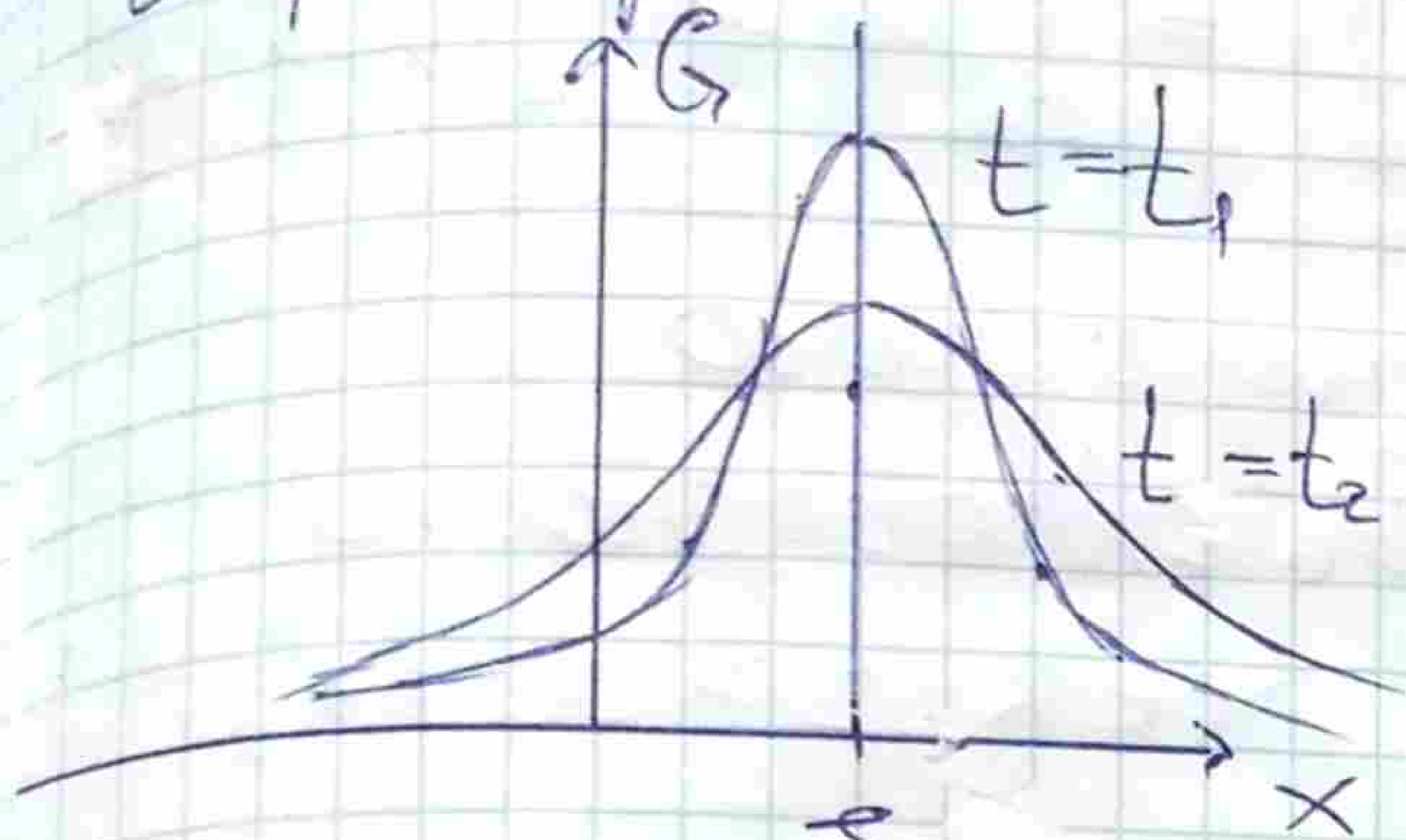
$$\lim_{t \to 0} G = \lim_{t \to 0} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{\eta \to \infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\eta}}{e^{\frac{(x-\xi)^2}{4a^2}\eta}} = 0$$

правило Лопиталя

2. Строим график $G(x, t=\mathrm{const})$

t- фиксировано



$G > 0$

$G \to 0, \quad x \to \pm\infty$

$$G_x = \frac{2(x-\xi)}{4a^2t} \cdot \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$$

$$G_x = 0 \Rightarrow x = \xi$$

$$G\big|_{x=\xi} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$$

температура сразу отлична от нуля

Скорость распростр. тепла в этой модели равна бесконечности

$t_2 > t_1$

3. $$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi), t)\,dx = \qquad \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = \eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\eta^2} 2a\sqrt{t}\,d\eta = \qquad dx = 2a\sqrt{t}\,d\eta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 1$$

4. $G(x-\xi, t)$ имеет производные всех порядков по x и t в обл. $x \in \mathbb{R}, t > 0$

гладкость улучшается

Замечание

Ф-ла (3) можно рассматривать как непрер. суперпозицию решений однородного ур-ния

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x-\xi, t)\,d\xi$$

непр. суперпозиц. решения (интеграл), $\underset{\text{решение}}{G(x-\xi, t)}$

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \varphi(\xi) \underbrace{(G_t - a^2 G_{xx})}_{=0} = 0$$

$$u|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, G|_{t=0}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \delta(x-\xi)\, d\xi = \varphi(x)$$

Решение неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, \; t > 0 \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

Составим вспомогат. задачу

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \; t > t' \quad (3)$$

$$v|_{t=t'} = f(x,t') \quad (4)$$

$$v(x,t,t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,t')\, G(x-\xi, t-t')\, d\xi \quad (5)$$

Если v решение (3), (4), то

$$u = \int_0^t v(x,t,t')\, dt' \quad (6)$$ — решение (1), (2)

$$u_t = v|_{t'=t} + \int_0^t v_t\, dt' = f(x,t) + \int_0^t v_t\, dt'$$

$$u_{xx} = \int_0^t v_{xx}\, dt'$$

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) + \int_0^t \underbrace{(v_t - a^2 v_{xx})}_{=0}\, dt'$$

Для того, чтобы записать решение (1), (2), нужно подставить ф-лу (5) в (6)

Неоднородное ур-ние с ненулевым нач. условием

$P(x)$
$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \quad x \in R, \; t > 0$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)}$$

$$u_t^{(1)} - a^2 u_{xx}^{(1)} = 0 \qquad u_t^{(2)} - a^2 u_{tt}^{(2)} = f(x,t)$$
$$u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x) \qquad u^{(2)}|_{t=0} = 0$$

возможно в силу лин. задачи

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x-\xi, t)\, d\xi + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t') G(x-\xi, t-t')\, d\xi$$

скорость распр. тепла ∞ интегрир. в бесконечн. пределах

О единствен. решения начал. задачи для ур-ния теплопроводности

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

1) $u \equiv 0$ это решение
2) Пусть $f(t) \in C^\infty$, $\text{supp} f(t) = [0; 1]$ носитель ф-ции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \; t \ge 1 \\ e^{-\frac{1}{1-4(t-\frac{1}{2})^2}} & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(n)}(t)$$ покажем что это решение

$$U|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(n)}(0) = 0$$

$$U_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(n+1)}(t)$$

$$U_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n-1)\, x^{2n-2}}{(2n)!} f^{(n)}(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} f^{(n)}(t) \ominus$$

$$\ominus \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} f^{(k+1)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(n+1)}$$

$$U_t = U_{xx}$$

Есть решение отличное от нуля

$t = const$ (характеристика ур-ния теплопроводности)

Теорема единствен. для задачи (1), (2)

В классе ф-ций $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < T$ огранич. в полосе решение задачи (1), (2) если $\exists$, то только одно

Начальная задача для ур-ния теплопроводности в 3d пр-ве

$n = 3$

$U = U(x, y, z, t)$

$$U_t - a^2 \Delta U = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; t > 0$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

Лемма
Пусть в нач. задаче для однородн. ур-ния

$u_t - a^2 \Delta u = 0$

нач. ф-ция имеет специал. вид

$u|_{t=0} = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$

тогда реш. задачи имеет вид

$u(x,y,z,t) = u^{(1)}(x,t)\cdot u^{(2)}(y,t)\cdot u^{(3)}(z,t)$

где $u^{(1)}(x,t)$ - реш. зад.

$u_t^{(1)} - a^2 u_{xx}^{(1)} = 0$

$u^{(1)}|_{t=0} = \varphi_1(x)$

$u^{(2)}(y,t)$ - реш. зад.

$u_t^{(2)} - a^2 u_{yy}^{(2)} = 0$

$u^{(2)}|_{t=0} = \varphi_2(y)$

Док-во

$u|_{t=0} = u^{(1)}|_{t=0}\, u^{(2)}|_{t=0}\cdot u^{(3)}|_{t=0} = \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\cdot\varphi_3(z)$

$u_t = u_t^{(1)}u^{(2)}u^{(3)} + u^{(1)}u_t^{(2)}u^{(3)} + u^{(1)}u^{(2)}u_t^{(3)}$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{xx}^{(1)}u^{(2)}u^{(3)} + u^{(1)}u_{yy}^{(2)}u^{(3)} +$
$+ u^{(1)}u^{(2)}u_{zz}^{(3)}$

$u_t - a^2\Delta u = (\underbrace{u_t^{(1)} - a^2 u_{xx}^{(1)}}_{=0})u^{(2)}u^{(3)} +$
$+ (\underbrace{u_t^{(2)} - a^2 u_{yy}^{(2)}}_{=0})u^{(1)}u^{(3)} + u^{(1)}u^{(2)}(\underbrace{u_t^{(3)} - a^2 u_{zz}^{(3)}}_{=0}) = 0$

Функция Грина для трехмерного ур-ния теплопроводности

$M(x,y,z),\quad M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$G = G(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t) = G(M, M_0, t)$$

$$G_t - a^2 G_{xx} = 0, \quad M \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$

$$G|_{t=0} = \delta(M, M_0)$$

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(M)\,\delta(M, M_0)\,d\tau = \varphi(M_0)$$

$$\delta(M, M_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

в декартовой прямоуг. с-ме к-т это прямое произв. δ-функций

$n = 1$ $\quad G_1 = G_1(x, x_0, t)$

$$G_{1t} - a^2 G_{1xx} = 0$$

$$G_1|_{t=0} = \delta(x - x_0)$$

$$G_1 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$$

$n = 3$ $\quad G(M, M_0, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4a^2 t}} \cdot$

$$\cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4a^2 t}} = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2 t}\right)$$

Решение начальной задачи

$$U_t - a^2 \Delta U = 0 \qquad P(\xi, \eta, \zeta)$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$$

$$U(M, t) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(P)\, G(M, P)\, dV_P$$ интегрир. по P

$$U_t - a^2 \Delta U = \iiint \varphi(P)\,(G_t - a^2 \Delta G)\, dV_P = 0$$

$$U|_{t=0} = \iiint\limits_{R^3} \varphi(P)\, G|_{t=0}\, dV_P = \iiint \varphi(P)\,\delta(M, P)\, dV_P = \varphi(M)$$

Аналогично можно док-ть

$$U_t - a^2 \Delta U = f(M, t), \quad M \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0$$

$$U|_{t=0} = 0$$

$$U(M,t) = \int_0^t dt' \iiint_{R^3} f(P,t')\, G(M,P,t,t')\, dV_P$$

Начально-краевая задача о распределении температуры внутри полуогранич. стержня с простейшими граничн. условием

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0 \quad (1)$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$

$$U|_{x=0} = 0 \quad (3)$$

Используем метод продолжений

Лемма

Пусть $V = V(x,t)$ — решение нач. задачи для ур-ния теплопров.

$$V_t - a^2 V_{xx} = 0$$

$$V|_{t=0} = F(x)$$

Нач. ф-цией которой яв-ся нечетной

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Тогда $V|_{x=0} = 0$, $t > 0$

$$V(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, G(x-\xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi =$$

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = \eta$$

$$d\xi = 2a\sqrt{t}\, d\eta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + 2a\sqrt{t}\,\eta)\, e^{-\eta^2}\, d\eta$$

$$V|_{t=0} = \lim V(x,t)$$

$$v|_{x=0} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{F(\xi)}_{\text{нечетн.}} \underbrace{e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}}_{\text{четная}} d\xi = 0$$

Ф-ции v и u совпадают в общей части

$x > 0, \ t > 0$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) G(x-\xi, t) d\xi =$$

Где ф-ция $F(\ )$ получается из ф-ции $\varphi(x)$ нечетным продолжением на ось $x < 0$

$$= \int_{-\infty}^{0} \underbrace{F(\xi)}_{-\varphi(-\xi)} G(x-\xi, t) d\xi + \int_{0}^{\infty} \underbrace{F(\xi)}_{\varphi(\xi)} G(x-\xi, t) dt =$$

$-\xi = \eta$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(-\xi) \cdot G(x-\xi, t) d\xi = -\int_{+\infty}^{0} \varphi(\eta) G(x+\eta, t)(-d\eta) =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \varphi(\eta) G(x+\eta, t) d\eta = -\int_{0}^{\infty} \varphi(\xi) G(x+\xi, t) d\xi$$

$$= \int_{0}^{\infty} \varphi(\xi) \left[G(x-\xi, t) - G(x+\xi, t) \right]$$

$$\tilde{G}(x, \xi, t) = G(x-\xi, t) - G(x+\xi, t)$$

Ф-ция Грина нач.-краев. задачи (фунд. решение)

$$u(x,t) = \int_{0}^{\infty} \varphi(\xi) \tilde{G}(x, \xi, t) d\xi$$

Покажем, что $\tilde{G}$ яв-ся решением ур-ния теплопроводности, т.к. $\tilde{G}$ это разность двух решений

$$\tilde{G}_t - a^2 \tilde{G}_{xx} = 0$$

$$\tilde{G}|_{t=0} = \delta(x-\xi)$$

$$\tilde{G}|_{x=0} = 0$$

$$\tilde{G}|_{t=0} = \delta(x-\xi) - \underbrace{\delta(x+\xi)}_{\to 0} = \delta(x-\xi)$$

$\delta(x+\xi)$ имеет носитель, где $x+\xi=0$, но $x>0,\ \xi\geq 0$

$$\tilde{G}|_{x=0} = G(-\xi,t) - G(\xi,t) = 0$$

exp, где ξ входит во 2 степени

Решение нач. краевой задачи для неоднор. ур-ния теплопр. с нул. нач. усл. и прост. граничн. усл.

$$U_t - a^2 U_{xx} = f(x,t),\quad x>0,\ t>0$$

$$U|_{t=0} = 0$$

$$U|_{x=0} = 0$$

$$U(x,t) = \int_0^t dt' \int_0^\infty d\xi\, f(\xi,t')\, \tilde{G}(x,\xi,t-t')$$

Замечание

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0,\quad x>0,\ t>0$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$U_x|_{x=0} = 0 \quad \text{(конец теплоизолир.)}$$

Эта задача ~ нач. задаче, в которой $\varphi(x)$ продолж. на отриц. ось четно

Можно показать

$$U(x,t) = \int_0^\infty \varphi(\xi)\, \tilde{\tilde{G}}(x,\xi,t)\, dt$$

где $\tilde{\tilde{G}}(x,\xi,t) = G(x-\xi,t) + G(x+\xi,t)$

Ф-ция Грина для такой задачи

$$\tilde{\tilde{G}}_t - a^2 \tilde{\tilde{G}}_{xx} = 0$$

$$\tilde{\tilde{G}}|_{t=0} = \delta(x-\xi)$$

$$\tilde{\tilde{G}}_x|_{x=0} = 0$$

$$U_t - a^2 U_{xx} = f(x,t)$$
$$U|_{t=0} = 0$$
$$U|_{x=0} = 0$$
$$U(x,t) = \int_0^t dt' \int_0^\infty d\xi\, f(\xi, t')\, \tilde{\tilde{G}}(x, \xi, t-t')$$

Нач. краевая задача
для огранич. стержня

$$U_t - a^2 U_{xx} = 0 \quad (1)$$
$$U|_{t=0} = \varphi(x) \quad (2)$$
$$U|_{x=0} = 0 \quad (3)$$
$$U|_{x=\ell} = 0 \quad (4)$$

Решение с помощью метода разделения переменных

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{\ell}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{\ell}x \quad (5)$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx \quad (6)$$

$$G = G(x, \xi, t)$$
$$G_t - a^2 G_{xx} = 0$$
$$G|_{t=0} = \delta(x-\xi)$$
$$G|_{x=0} = 0$$
$$G|_{x=\ell} = 0$$

Эту ф-цию G можно найти методом разд. перемен.

$$G(x,\xi,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{\infty}\delta(x-\xi)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\sin\frac{\pi n}{l}\xi$$

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\frac{\pi n}{l}x \quad (7)$$

Выразим (5) через ф-цию Грина

в ряд (5) подставим (6)

$$u(x,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\,\exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{\pi n}{l}x$$

$$=\int_0^l d\xi\,\varphi(\xi)\underbrace{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t\right)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\frac{\pi n}{l}x}_{(7)\ G(x,\xi,t)}=$$

$$=\int_0^l \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\,d\xi$$

Можно показать

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),\quad 0<x<l,\ t>0$$

$$u|_{t=0}=0$$

$$u|_{x=0}=0$$

$$u|_{x=l}=0$$

$$u(x,t)=\int_0^t dt'\int_0^l f(\xi,t')G(x,\xi,t-t')\,d\xi$$

Если в задаче меняется нач. усл., то меняется ~~ф~~ ф-ция Грина

Уравнение эллиптич. типа

$n=2$

$u_{xx}+u_{yy}=0$ (ур-ние Лапласа)

$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$ (ур-ние Пуассона)

$n=3$

$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = f(x, y, z)$$

Фундамент. решение ур-ния Лапласа

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta U = 0 \quad (1)$$

$$U = U(r) \quad (2)$$

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

чтобы найти решение, нужно сосчитать $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(U(r))$ и подстав. в (1)

$$U_{x_i} = U_r \frac{\partial r}{\partial x_i} = U_r \cdot \frac{(x_i - x_i^0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}} =$$

$$= U_r \frac{(x_i - x_i^0)}{r}$$

$$\cancel{U_x \frac{(x_i - x_i^0)}{r}} \quad U_{x_i x_i} = U_{rr} \cdot \left(\frac{x_i - x_i^0}{r}\right)^2 +$$

$$+ U_r \left(\frac{1}{r} - \frac{(x_i - x_i^0)}{r^2} \frac{(x_i - x_i^0)}{r}\right)$$

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_i} = \frac{U_{rr}}{r^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}_{= r^2} +$$

$$+ \frac{U_r}{r} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{U_r}{r^3} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}_{= r^2} =$$

$$= U_{rr} + \frac{n U_r}{r} - \frac{U_r}{r} = 0$$

$$U_{rr} + \frac{(n-1)}{r} U_r = 0$$

$$U_r = V$$

$$V_r + \frac{(n-1)}{r} V = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{(n-1)}{r} dr$$

$$\ln|V| = -(n-1)\ln r + \ln|C_1|$$

$$V = \frac{C_1}{r^{n-1}}$$

$$U_r = \frac{C_1}{r^{n-1}}$$

$n=2$ $\quad U_r = \frac{C_1}{r} \quad U = C_1 \ln r + C_2$

$n \geq 3$ $\quad U_r = \frac{C_1}{r^{n-1}} \quad U = -\frac{C_1}{(n-2) r^{n-2}} + C_2$

$C_2 = 0$, $C_1 = -1$

$n=2$ $\quad U = \ln\frac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

$n=3$ $\quad U = \frac{1}{r_{MM_0}}$, $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$

потенц. электростат. поля т. з.

$n>3$ $\quad U = \frac{1}{(n-2) r^{n-2}}$, $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}$

$\frac{1}{r_{MM_0}}$ - локально интегр., поэтому эта ф-ция опред. обобщ. ф-цию

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = -4\pi\,\delta(M, M_0)$$

$$\delta(M, M_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$

$\Delta\varphi = -4\pi\rho$ потенц. электростат. поля

$\Delta\varphi = -4\pi\,\delta(M, M_0)$ (1), $\vec{k}(k_1, k_2, k_3)$

$\vec{r}(x, y, z)$

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi(\vec{r})\, e^{-i(\vec{k}, \vec{r})}\, dV$$

$d\vec{r} = dx\,dy\,dz$

преобраз. Фурье

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\vec k)\, e^{i(\vec k, \vec r)} \underbrace{dV}_{d\vec k} \quad (2)$$

обратное преобраз. Фурье

$$F(\vec k) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)\, e^{-i(\vec k, \vec r)} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dk_1 dk_2 dk_3} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-i(\vec k, \vec r_0)}$$

$$\delta(M, M_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec k, \vec r - \vec r_0)} dk_1 dk_2 dk_3 \quad (3)$$

Метод разложения в интеграл Фурье

подстав. (1) в (2) и (3)

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\vec k)\, \Delta\left(e^{i(\vec k, \vec r)}\right) dk_1 dk_2 dk_3 =$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\vec k)\left((ik_1)^2 + (ik_2)^2 + (ik_3)^2\right) e^{i(\vec k, \vec r)}\, d\, d\, dk_3 =$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} k^2 F(\vec k)\, e^{i(\vec k, \vec r)} dk_1 dk_2 dk_3 =$$

$$= -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec k, \vec r - \vec r_0)} dk_1 dk_2 dk_3$$

(3)

Коэфф. в преобр. Фурье равны

$$k^2 F(\vec k) = \frac{4\pi}{(\sqrt{2\pi})^3} e^{-i(\vec k, \vec r_0)}$$

Найдено $F(\vec k)$ подстав. в (2), получ. ответ

$$\varphi(\vec r) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\vec k, \vec r - \vec r_0)}}{k^2} dk_1 dk_2 dk_3 = $$

Подсчет в сферич. к-тах

$k_1 = k\cos\varphi\sin\theta$

$k_2 = k\sin\varphi\sin\theta$

$k_3 = k\cos\theta$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \; k^2 \sin\theta \cdot \frac{e^{ik((x-x_0)\cos\varphi\sin\theta + (y-y_0)\sin\varphi\sin\theta + (z-z_0)\cos\theta)}}{k^2} =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \; f(\alpha\cos\varphi\sin\theta + \beta\sin\varphi\sin\theta + \gamma\cos\theta)\sin\theta =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dk \int_{-1}^{1} e^{ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\,\xi}\,d\xi =$$

интеграл по симм. промежутку, использ. ф-лу Эйлера, cos – четная, sin – нечетная

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk \int_0^1 \cos(k r_{MM_0}\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk \left.\frac{\sin(k r_{MM_0}\xi)}{k r_{MM_0}}\right|_0^1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(k r_{MM_0})}{k r_{MM_0}}\,dk =$$

$$= \frac{1}{r_{MM_0}}\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin k r_{MM_0}}{k}\,dk}_{\text{интеграл Дирихле}} = \frac{1}{r_{MM_0}}$$

Интегральное представления дважды дифф. функций

$u \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$

$Q \subset R^3$ огранич. открыт обл.

∂Q – кусочно-гладкая ф-ция обл. Q

$$\iiint_Q (u\Delta v - v\Delta u)\,dV = \iint_{\partial Q}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

$$v = \frac{1}{r_{MM_0}}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = -4\pi\,\delta(M, M_0)$$

$$-4\pi \iiint_Q u\,\delta(M, M_0)\,dV - \iiint_Q \frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,dV =$$

$$= \iint_{\partial Q}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) - \frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

$$\iiint_Q u\,\delta(M, M_0)\,dV = \begin{cases} u(M_0), & M_0 \in Q \\ 0, & M_0 \notin Q \end{cases}$$

Пусть $M_0 \in Q$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial Q}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right)dS -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_Q \frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,dV$$

Гармонические функции

$n = 2$ $\quad Q \subset R^2$ $\quad \rho_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial Q}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}\cdot\frac{\partial u}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}\right)\right)dl -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint \Delta u \ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}\,dx\,dy$$

$n = 3$

Ф-ция $u = u(x, y, z) = u(M)$ наз-ся гармоническ. в окрест. обл. Q, если $\Delta u = 0$, $M \in Q$

Св-во

1. Гарм. в обл. Q ф-ция имеет в обл. Q произв. всех порядков $u \in C^\infty(Q)$

Док-во

Пусть $Q_1 \subset Q$

$M_0 \in Q_1$

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial Q_1} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial U}{\partial n} - U(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right) dS$$

$M_0 \in Q_1$

$M \in \partial Q_1$ интеграл не явл-ся несобствен.

$r_{M_0 M} \neq 0$ подинтеграл. ф-ция $\frac{1}{r_{MM_0}}$ по параметру x_0, y_0, z_0 дифф. сколько угодно раз, значит сам интеграл дифф. сколько угодно раз

2.

Пусть 1) $\Delta U = 0$, $M \in Q$

2) $Q_1 \subset Q$

Тогда

$$\iint\limits_{\partial Q_1} \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0$$

поток всегда равен нулю

Док-во

$$\iiint\limits_{Q_1} (U \underbrace{\Delta V}_{=0} - \underbrace{V \Delta U}_{=0}) dV = \iint\limits_{\partial Q_1} \left(U \underbrace{\frac{\partial V}{\partial n}}_{=0} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS$$

$\Delta U = 0$

$V \equiv 1$

$$\iint\limits_{\partial Q_1} \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0$$

3. Теорема о сферическом среднем гармон. ф-ции

1) Пусть $\Delta U = 0$, $M \in Q$

2) $S^r_{M_0} \subset Q$ сфера $\subset Q$

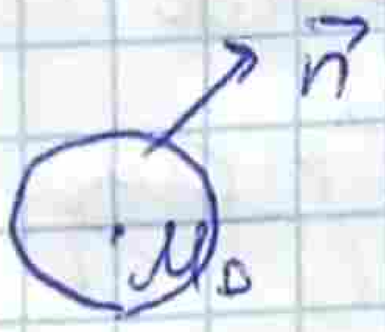
Тогда

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S^r_{M_0}} u(M)\,dS$$

Док-во

В интеграл. представл. для гармонич. ф-ции Q, возьмем сферу

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S^r_{M_0}} \left(\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right) dS =$$



$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = -\frac{1}{r^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi r}\iint\limits_{S^r_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS}_{=0} + \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S^r_{M_0}} u(M)\,dS$$

4. Значение гармонич. ф-ции в центре шара есть среднее арифмет. ее значений по шару

$$u(M_0) = \frac{3}{4\pi R^3}\iiint\limits_{Ш^R_{M_0}} u(M)\,dV, \quad Ш^R_{M_0} \subset Q$$

$$4\pi r^2 u(M_0) = \iint\limits_{S^r_{M_0}} u(M)\,dS$$

$$4\pi u(M_0)\int_0^R r^2\,dr = \int_0^R dr \iint\limits_{S^r_{M_0}} u(M)\,dS =$$

$$\frac{4\pi R^3}{3} u(M_0) = \iiint\limits_{Ш^R_{M_0}} u(M)\,dV$$

5. Принцип максимума и минимума для гармонич. ф-ции

Пусть 1) $\Delta U=0,\ M\in Q$

2) $U\in C(\overline{Q})$

3) $U\not\equiv const$

Тогда ф-ция U приним. наиб. и наим. знач. только на границе обл Q

$$|M|=\max_{M\in\overline{Q}} U(M)$$

Док-во от противн.

Пусть $\exists M_0\in Q$

$|M|=U(M_0)$

$S^r_{M_0}\subset Q$

$$U(M_0)\equiv \underline{|M|}=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S^r_{M_0}} U(M)\,dS \ \underline{\leqslant}$$

$U(M)\leq |M|$

$$\leqslant \frac{|M|}{4\pi r^2}\iint\limits_{S^r_{M_0}} dS = \underline{|M|}$$

знак $<$ не может быть, м.б. только $=$

$U(M)=|M|,\ M\in S^r_{M_0}$

r - любой, лишь бы $S^r_{M_0}\subset Q$

$U(M)\equiv |M|,\ M\in S^R_{M_0},\ S^R_{M_0}\subset Q$

Докажем

M^* - любая т. обл. Q

$U(M^*)\equiv M$

M_0 и M^* соедин. непр. линией в Q
пов-ть шара пересек. с линией M_0M^*

$$u(M_1) = u(M_0) = |M|$$

берем за центр сферы M_1, за конечн. число шагов дойдем до точки M^*

6. Гармонич. ф-ция в обл. Q не имеет внутри обл. Q ни локал. max, ни локал. min.

Пример Адамара

Задача Коши для ур-ния эллиптич. типа некорректно поставлена

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

$$u_x|_{x=0} = \frac{\sin ny}{n} \quad (3)$$

$$u(x,y) = X(x) \cdot \sin ny \quad (4)$$

$$(4) \to (1)$$

$$X'' \sin ny - n^2 X \sin ny = 0$$

$$X'' - n^2 X = 0 \quad (5)$$

$$u|_{x=0} = X(0) \sin ny = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

$$u_x|_{x=0} \quad X'(0) \cdot \sin ny = \frac{\sin ny}{n} \Rightarrow X'(0) = \frac{1}{n}$$

$$p^2 - n^2 = 0$$

$$p = \pm n$$

$$X = C_1 \operatorname{sh} nx + C_2 \operatorname{ch} nx$$

$$X(0) = C_2 = 0$$

$$X'(0) = nC_1 = \frac{1}{n} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{n^2}$$

$X(x) = \frac{\operatorname{sh} nx}{n^2}$

$U = \frac{\operatorname{sh} nx}{n^2} \sin ny$

Сформулируем еще одну задачу

$V = V(x,y)$

$V_{xx} + V_{yy} = 0$

$V|_{x=0} = 0 \qquad V \equiv 0$

$V_x|_{x=0} = 0$

Покажем, что в задаче Коши для ур-ния эллиптич. типа наруш. непрерывн. зависимость от входных данных

$| U_x|_{x=0} - V_x|_{x=0} | = \frac{|\sin ny|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

$n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$| U(x,y) - V(x,y) | = \left| \frac{\operatorname{sh} ny \cdot \sin ny}{n^2} \right|$

не рассматр. точки, где $\sin ny = 0$

при $n \to \infty$ $\operatorname{sh} ny$ растет существ. быстрее чем n^2 поэтому эта разница сколько угодно большой

Постановки задач для ур-ний эллиптич. типа

1. Внутр. задача Дирихле

Найти реш-ие ур-ния Пуассона

$U_{xx} + U_{yy} = f(x,y)$ (1) в обл. Q, удовл. усл. Дирихле $U|_{\partial Q} = \varphi(x,y)$ (2), где Q - огранич. обл. $Q \subset \mathbb{R}^2$

В задаче Коши обл. без самопересечения
~~В~~ задаче Дирихле Q - огранич обл.
тогда на $\mathbb{R}^2$ замык. кривой
$n = 3$ $M(x, y, z)$
Найти реш. ур-я
$\Delta f = f(M)$ в обл. Q
если
$u|_{\partial Q} = \varphi(M)$
Q - огранич. обл., $Q \subset \mathbb{R}^3$
2. ~~Задача~~ Внутр Задача Неймана
$n = 2$
Найти решение ур-я Пуассона
$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ в обл. Q
если $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = \varphi(x, y)$

$n = 3$, $Q \subset \mathbb{R}^3$
$\Delta u = f(M)$, $M \in Q$
$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = \varphi(M)$

Задача Дирихле
$n = 3$, $Q \subset \mathbb{R}^3$
$\Delta u = f(M)$ в обл. Q (1)
$u|_{\partial Q} = \varphi(M)$ (2)
$u(M) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$
ф-ция удовл. класс. реш.

Необходимо усл. удовл. класс. решению

$f(M) \in C(Q)$

$\varphi(M) \in C(Q)$

Если это невыпол., то нужно говорить об обобщ. решении

Теорема единств.

Если реш. задачи (1), (2) $\exists$, то оно единств.

Док-во

От против.

U_1, U_2

$V = U_1 - U_2$

$\Delta V = 0$

$V|_{\partial Q} = U_1|_{\partial Q} - U_2|_{\partial Q} = \varphi(M) - \varphi(M) = 0$

$V \in C^2(Q) \in C(\overline{Q})$

Ф-ция V - гармонич. ф-ция, можно применить принцип максимума

$V \equiv 0, \; M \in Q$

Теорема о непр. зависимости

Пусть U_1 и U_2 реш. одного и того же ур-ния $\Delta U = f(M)$, но удовл. различн. гранич. усл. $U^{(i)}|_{\partial Q} = \varphi_i(M)$

Тогда, если $|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| \le \varepsilon, \; M \in \partial Q$, то $|U^{(1)}(M) - U^{(2)}(M)| \le \varepsilon, \; M \in Q$

Док-во

Составим $v = u^{(1)} - u^{(2)}$

$\Delta v = 0$

$v|_{\partial Q} = \varphi_1(M) - \varphi_2(M)$

Принцип максимума и минимума

$-\varepsilon \le \varphi_1(M) - \varphi_2(M) \le \varepsilon \quad , M \in \partial Q$

$-\varepsilon \le u^{(1)}(M) - u^{(2)}(M) \le \varepsilon \quad , M \in Q$

Методы решения задачи Дирихле

1. Метод разд. перемен.
2. Метод ф-ции Грина
3. Метод теории потенциалов

Ф-ция Грина. Задача Дирихле

$n = 3$

$G = G(M, M_0)$ - ф-ция 6 перемен.

$\Delta G = -\delta(M, M_0) \quad (3)$

$G|_{\partial Q} = 0 \quad (4)$

$\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\,\delta(y - y_0)\cdot\delta(z - z_0)$

$$\iiint\limits_Q (u\Delta v - v\Delta u)\,dV = \iint\limits_{\partial Q}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

Функция u реш. (1), (2)

v реш. (3), (4)

$v = G(M, M_0)$

$- \iiint\limits_Q u\,\delta(M, M_0)\,dV - \iiint\limits_Q G(M, M_0)\,f(M)\,dV =$

$\iint\limits_{\partial Q} \varphi(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS$

$-u(M_0)$, если $M_0 \in Q$

$u(M_0) = - \iint\limits_{\partial Q} \varphi(M) \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} dS - \iiint\limits_Q f(M) G(M, M_0)\,dV$

решение в $\forall$ точке обл. Q

Второе опр. ф-ции Грина

Фундам. решение ур-ния Лапласа

$\frac{1}{r_{MM_0}}$

$\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = -4\pi\,\delta(M, M_0)$ (6)

Реш. (3), (4) будем искать в виде

$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}} + g(M, M_0)$ (7)

Сформул. задачу для $g(M, M_0)$

$\Delta G = \frac{1}{4\pi} \Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) + \Delta g = -\delta(M, M_0) + \Delta g =$
$= -\delta(M, M_0)$

$\Delta g = 0$ (8)

$G = G(M, M_0)$

Ф-ция G задачи Дирихле в обл. Q, наз-ся ф-ция, которая внутри об. Q

1) $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}} + g(M, M_0)$, $M \in Q$ для $\forall M_0$

2) $\Delta g = 0$, $M \in Q$

3) $G|_{\partial Q} = 0$

Если выполн. эти (3) усл. ль, то

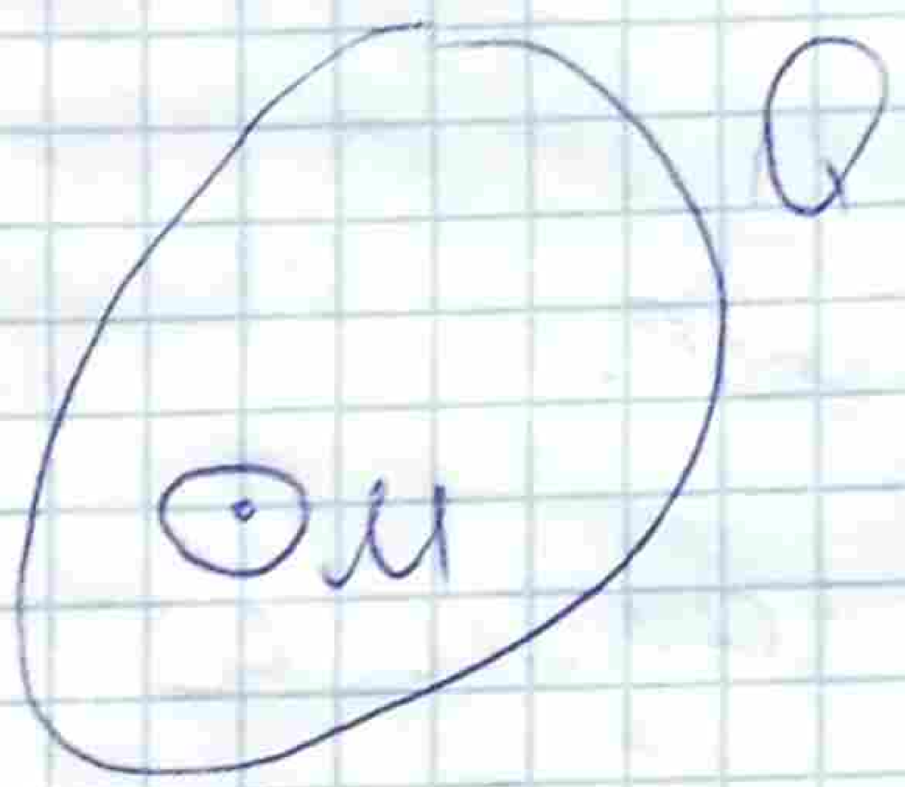
G это ф-ция Грина задачи Дирихле

ф-ция G строится для ∂Q

Св-ва ф-ции Грина

1. $G(M, M_0) > 0$, $M \in Q$

Док-во



S'_{M_0}

$G|_{S^{\varepsilon}_{M_0}} > 0$

Рассмотрим $Q - Ш^{\varepsilon}_{M_0}$

$\Delta G = 0$, $M \in Q - Ш^{\varepsilon}_{M_0}$

$Q|_{\partial Q} = 0$

$G|_{S^{\varepsilon}_{M_0}} > 0$

Примен. принцип max и min для гармонич. ф-ции $\Rightarrow$ $G(M, M_0) > 0$, $M \in Q - Ш^{\varepsilon}_{M_0}$

2. $G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}}$, $M \in Q$

Док-во

$\Delta g = 0$, $M \in Q$

$$g|_{\partial Q} = \underbrace{G|_{\partial Q}}_{=0} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_{MM_0}} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_{MM_0}}$$

Принц. max и min

$g(M, M_0) < 0$, $M \in Q -$

$G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}}$

3. $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\partial Q} < 0$

4. Ф-ция G симметрична

$$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$$

$$\iiint\limits_{Q} (u \Delta v - v \Delta u)\, dV = \iint\limits_{\partial Q} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$$

$$u = G(M, M_1)$$
$$v = G(M, M_2)$$

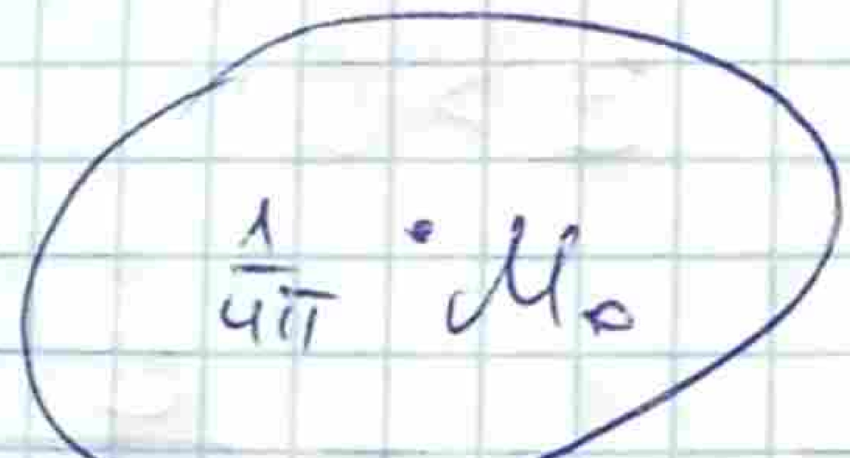
$$\iiint G(M, M_1) \underbrace{\Delta G(M, M_2)}_{= -\delta(M, M_2)} - G(M, M_2) \underbrace{\Delta G(M, M_1)}_{= -\delta(M, M_1)} dV = 0$$

$$-G(M_2, M_1) + G(M_1, M_2) = 0 \quad \blacksquare$$

из опред. δ-ф-ции

Физическая интерпретация
ф-ции Грина

Будем предполаг. Q огр. проводящ. пов-тью.



Внутрь помещ. заряд $\frac{1}{4\pi}$

Это заряд созд. потенц.

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_{MM_0}}$$

Заряды индуц. на гран. ∂Q, которые создают потенциал $g(M, M_0)$

$$G = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_{MM_0}} + g(M, M_0)$$

Пов-ть проводника равного потенц. заземл., тогда $G|_{\partial Q} = 0$

Это потенц. т.з. M_0 в обл. Q огранич. провод. заземл. пов-тью

Методы нахождения ф-ции Грина

1. Метод разд. перемен.
2. Метод отражений (физика метод изображ.)

Метод отражений

Работ. не для $\forall$ обл., обл. должна быть огранич. пл-тями и сферами

Индуц. зарядов заменим фикт. зарядами вне обл. Q, $M_i \notin Q$

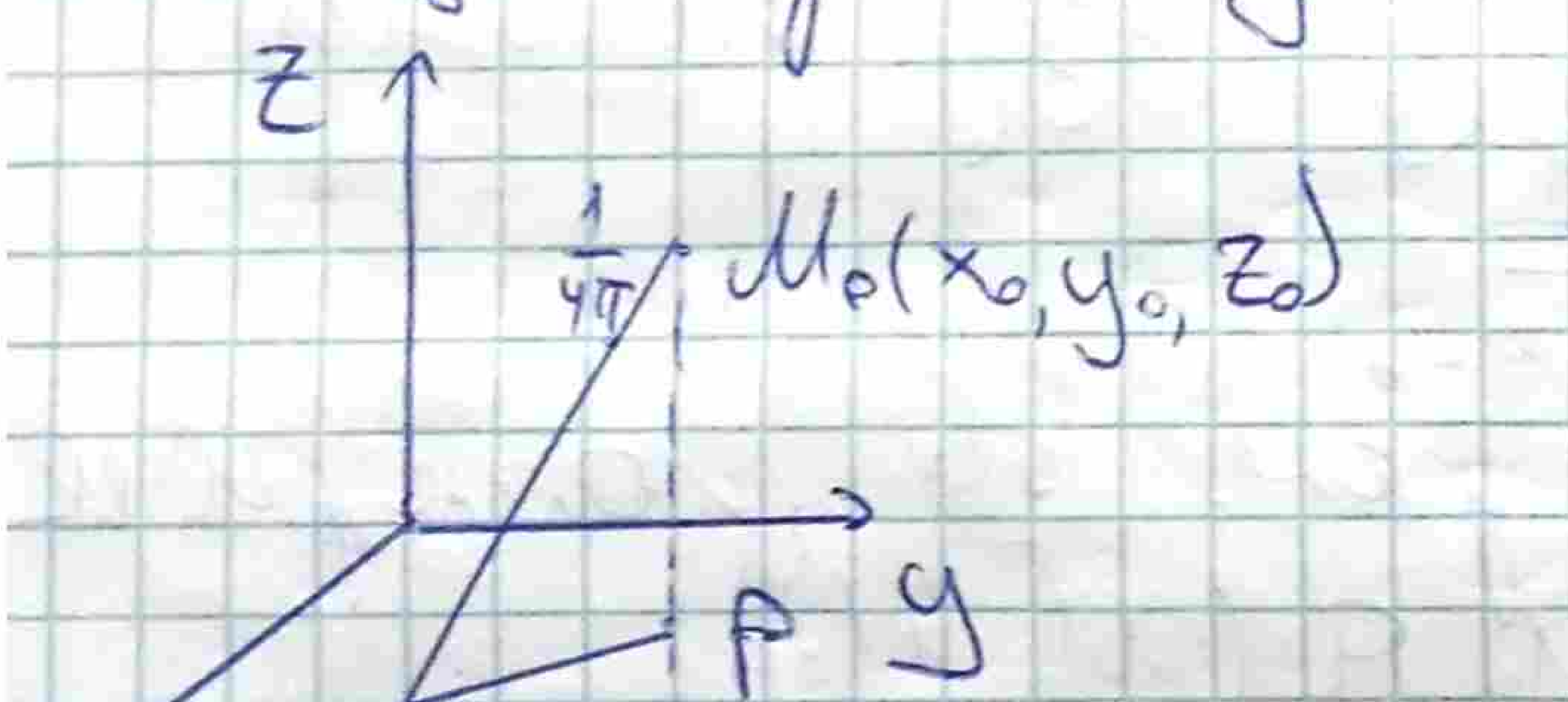
$$g = \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{r_{MM_i}}$$

Зарядов e_i и т. M_i подбир. так, чтобы

$G|_{\partial Q} = 0$

Пример

Ф-ция Грина для полупр-ва $z > 0$



$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{e}{r_{MM_0^*}}$$

$G|_{z=0} = 0$

Пусть $\bar{M}(x, y, 0)$

$\triangle \bar{M}M_0P = \triangle \bar{M}M^*P \Rightarrow r_{\bar{M}M_0} = r_{\bar{M}M_0^*}$

$$G(\bar{M}, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{\bar{M}M_0}} + \frac{e}{r_{\bar{M}M_0^*}} = \frac{1}{r_{\bar{M}M_0}}\left(\frac{1}{4\pi} + e\right) = 0$$

$e = -\frac{1}{4\pi}$

Найти решение ур-ния

$$\Delta U = 0, \quad z > 0$$

$$U|_{z=0} = F(x,y)$$

$$U(M_0) = -\iint\limits_{\partial Q} F(M)\,\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\,dS$$

нормаль внешняя

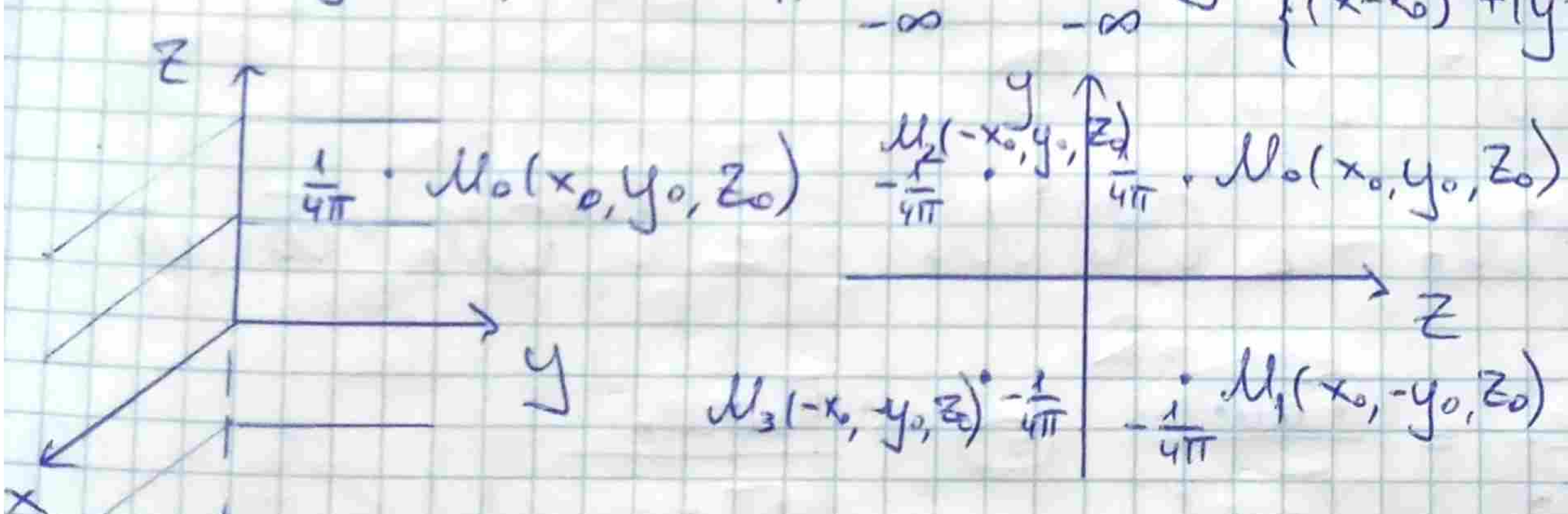
$$U(x_0,y_0,z_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, F(x,y)\left(-\frac{\partial G}{\partial z}\right)\Big|_{z=z_0}$$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{(z-z_0)}{r^{3/2}_{MM_0}} + \frac{(z+z_0)}{r^{3/2}_{MM_0^*}}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{z}{\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right\}^{3/2}}$$

$$U(x_0,y_0,z_0) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \frac{F(x,y)}{\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2\right\}^{3/2}}$$

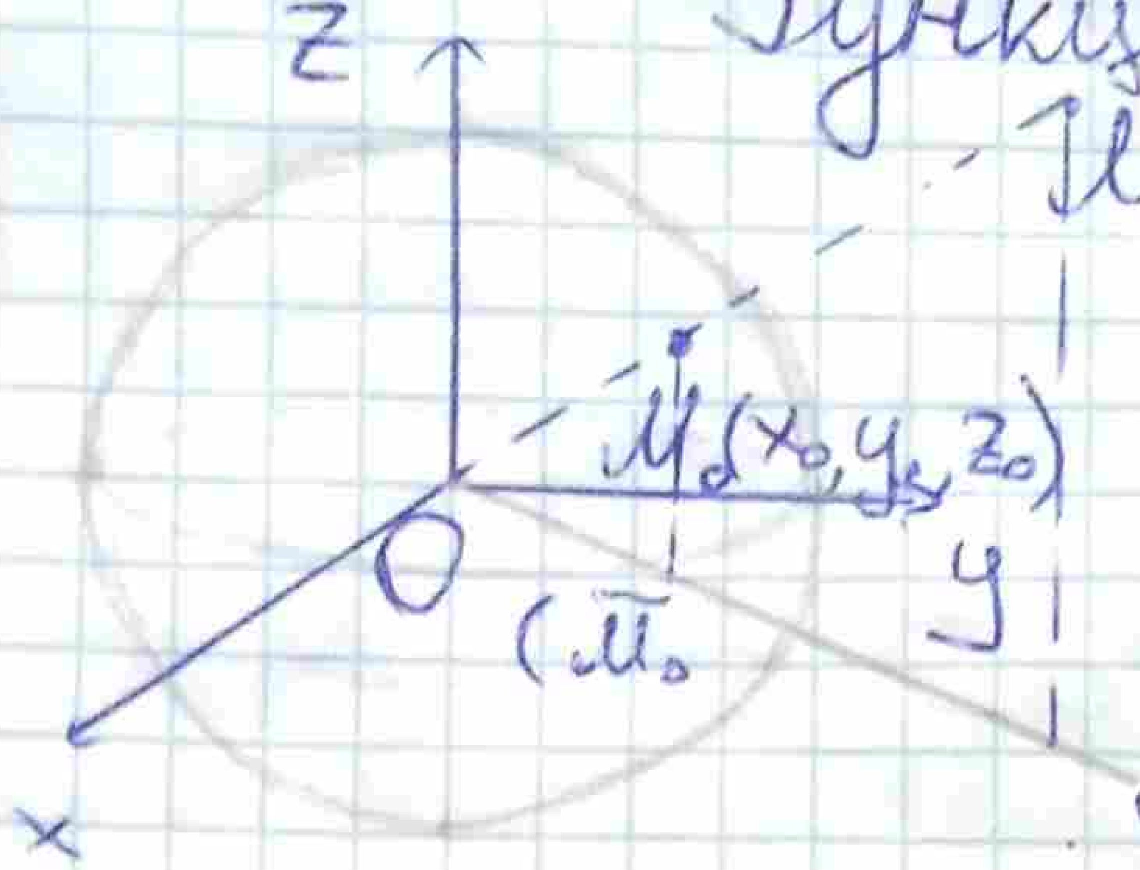


строим симметричные точки

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}} - \frac{1}{r_{MM_2}} + \frac{1}{r_{MM_3}}\right)$$

$$G|_{x=0} = 0, \quad G|_{y=0} = 0$$

Функция Грина для шара



$\bar{M}_1(x_1, y_1, 0)$

$$r_{OM_0} \cdot r_{OM_1} = R^2 \quad (1)$$

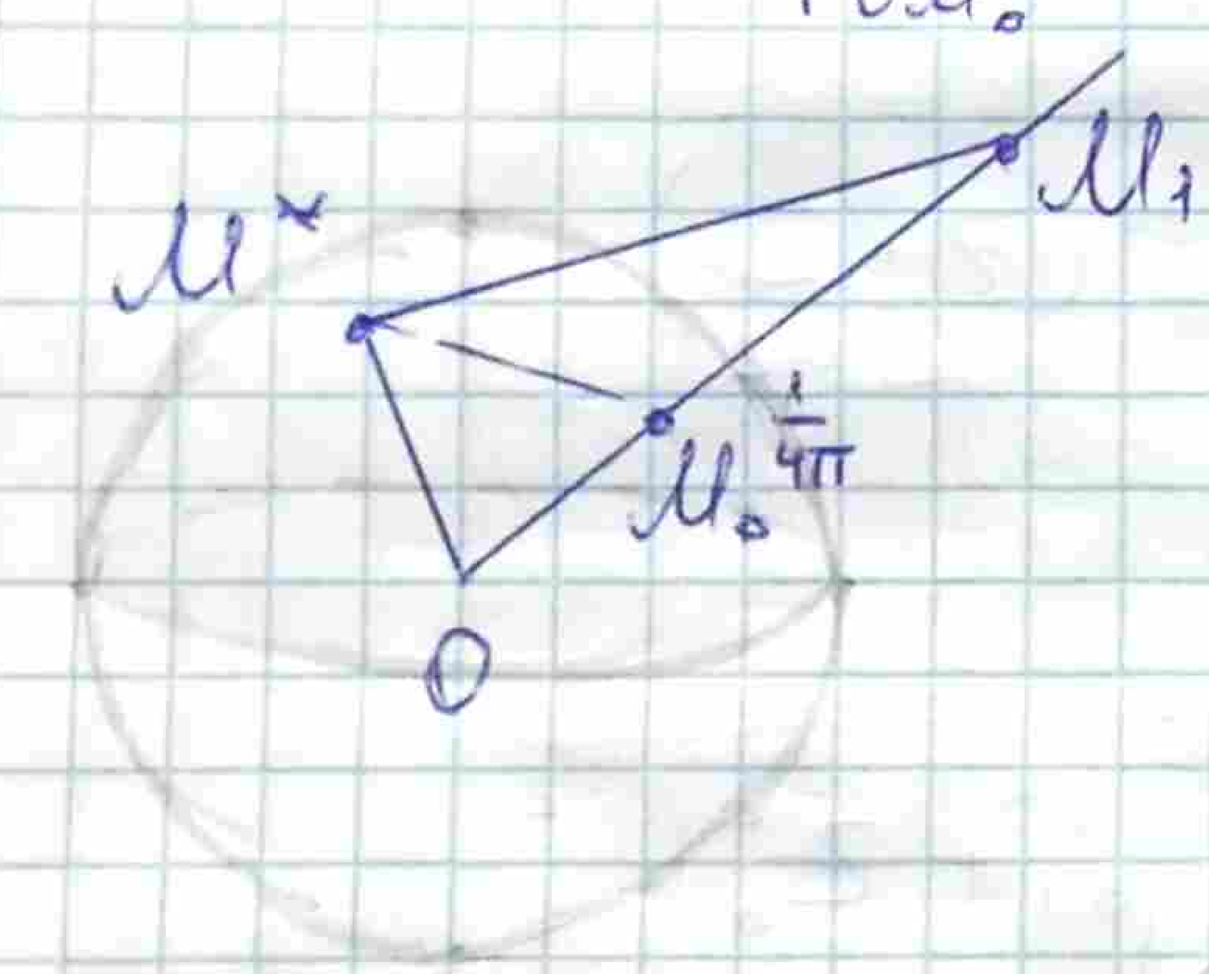
$$\triangle O\bar{M}_0 M_0 \sim \triangle O\bar{M}_1 M_1$$

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{r_{OM_1}}{r_{OM_0}}$$

$$z_1 = \frac{z_0 \cdot r_{OM_1}}{r_{OM_0}} = \frac{z_0 \cdot R^2}{r^2_{OM_0}}$$

$$x_1 = \frac{x_0 \cdot R^2}{r^2_{OM_0}}$$

$$y_1 = \frac{y_0 \cdot R^2}{r^2_{OM_0}}$$



$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}} + \underbrace{\frac{c}{r_{MM_1}}}_{g(M, M_1)}$$

$$\Delta g = 0, \; M \in Ш_0$$

$$G\Big|_{S_0^R} = 0$$

Пусть $M^* \in S_0^R$

$$G(M^*, M_0) = 0$$

$\triangle OM^*M_0 \sim \triangle OM^*M_1$, $\angle M^*OM_0$ – общий

$$\frac{r_{OM_0}}{\underbrace{r_{OM^*}}_{R}} = \frac{\overbrace{r_{OM^*}}^{R}}{r_{OM_1}} = \frac{r_{M^*M_0}}{r_{M^*M_1}}$$

$$r_{M^*M_1} = \frac{R}{r_{OM_0}} \cdot r_{M^*M_0} \quad (2)$$

$$G(M^*, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{M^*M_0}} + \frac{e}{r_{M^*M_1}} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{M^*M_0}} +$$

$$+ \frac{e\, r_{0M_0}}{R \cdot r_{M^*M_0}} = \frac{1}{r_{M^*M_0}}\left(\frac{1}{4\pi} + \frac{e\, r_{0M_0}}{R}\right) = 0$$

$$e = -\frac{1}{4\pi}\frac{R}{r_{0M_0}}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{r_{0M_0}} \cdot \frac{1}{r_{MM_1}}\right) \quad (3)$$

Ф-ция Грина для шара

Задача Дирихле для шара

$$\Delta U = 0, \quad M \in Ш_0^R$$

$$U\big|_{S_0^R} = F(\varphi, \theta)$$

$$U(M_0) = \iint F(M)\, \frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}\, dS$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = -\frac{1}{r_{MM_0}^2} \cdot \frac{\partial}{\partial n} r_{MM_0} =$$

$$= -\frac{1}{r_{MM_0}^2} \cdot (\operatorname{grad} r_{MM_0}, \vec{n}) \;=$$

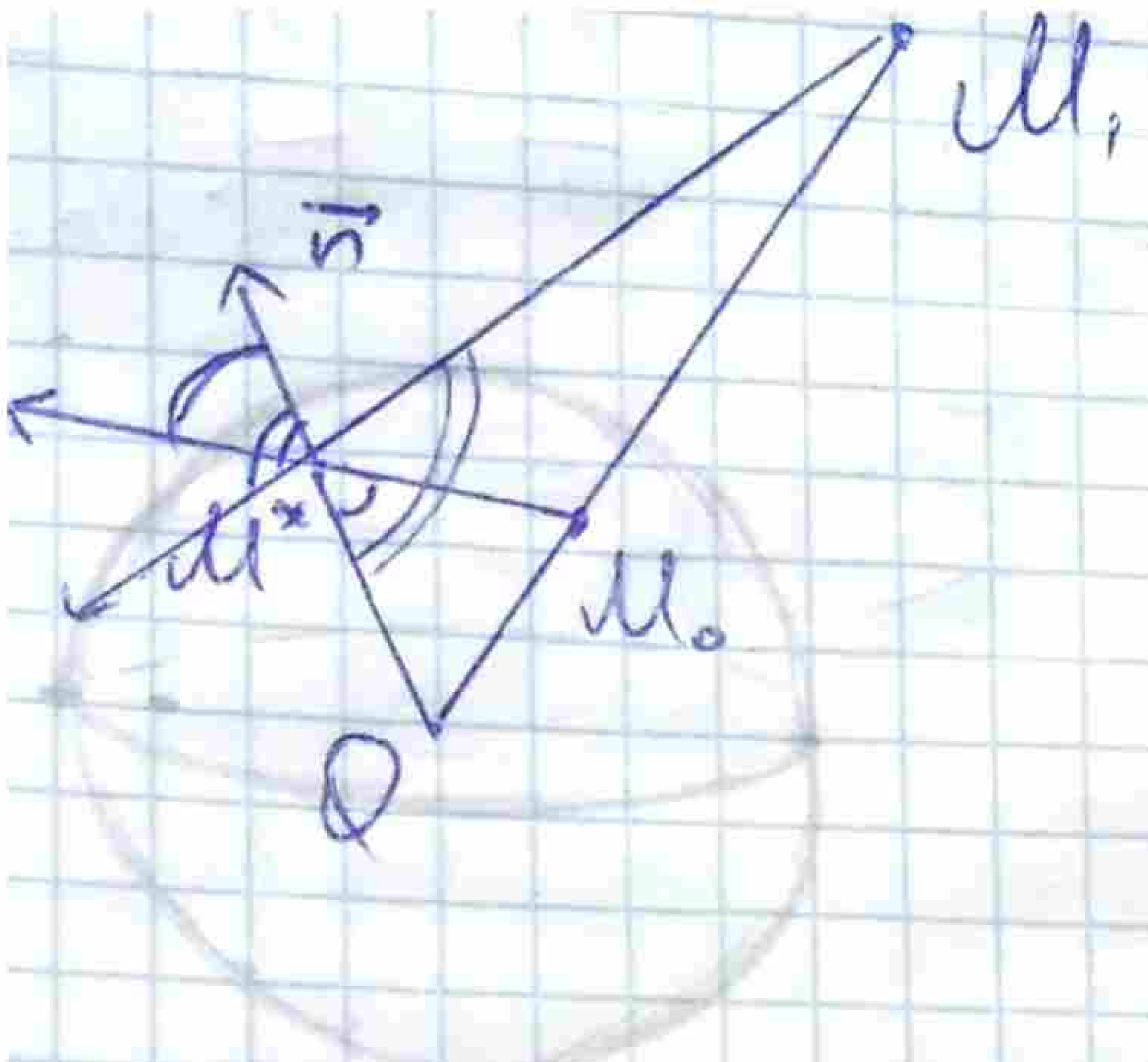
$$r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)}$$

$$\operatorname{grad} r_{MM_0} = \left\{\frac{x-x_0}{r_{MM_0}}, \frac{y-y_0}{r_{MM_0}}, \frac{z-z_0}{r_{MM_0}}\right\} = \frac{\vec{r}_{M_0M}}{r_{MM_0}}$$

$$= -\frac{1}{r_{MM_0}^3}(\vec{r}_{M_0M}, \vec{n}) = -\frac{1}{r_{MM_0}^2}\cos(\widehat{\vec{r}_{M_0M}, \vec{n}})$$

$$\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{r_{MM_0}^2} \cdot \cos(\widehat{\vec{r}_{M_0M}, \vec{n}}) + \frac{R}{r_{0M_0}} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{r_{MM_1}^2}\cos(\widehat{\vec{r}_{M_1M}, \vec{n}})\right)$$



ΔOM^*M_0:

$$r_{OM}^2 = R^2 + r_{M^*M_0}^2 - 2R\, r_{M^*M_0} \cos(\vec r_{M_0M^*}, \vec n)$$

$$\cos(\vec r_{M_0M^*}, \vec n) = \frac{R^2 + r_{M^*M_0}^2 - r_{OM_0}^2}{2R\, r_{M^*M_0}}$$

ΔOM^*M_1:

$$r_{OM_1}^2 = R^2 + r_{M^*M_1}^2 - 2R\, r_{M^*M_1} \cdot \cos(\vec r_{M^*M_1}, \vec n)$$

$$\cos(\vec r_{M^*M_1}, \vec n) = \frac{R^2 + r_{M^*M_1}^2 - r_{OM_1}^2}{2R\, r_{M^*M_1}} =$$

$$= \frac{\left(R^2 + \frac{R^2}{r_{OM_0}^2} \cdot r_{M^*M_0}^2 - \frac{R^4}{r_{OM_0}^2}\right) r_{OM_0}}{2R^2\, r_{M^*M_0}} =$$

$$= \frac{r_{OM_0}^2 + r_{M^*M_0}^2 - R^2}{2\, r_{OM_0} \cdot r_{M^*M_0}}$$

$$\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}\bigg|_{M=M^*} = \frac{1}{4\pi}\left(-\frac{1}{r_{M^*M_0}^2} \frac{R^2 + r_{M^*M_0}^2 - r_{OM_0}^2}{2R \cdot r_{M^*M_0}} + \frac{R}{r_{OM_0}} \cdot \frac{r_{OM_0}^2}{R^2 r_{M^*M_0}^2} \cdot \frac{r_{OM_0}^2 + r_{M^*M_0}^2 - R^2}{2\, r_{OM_0} \cdot r_{M^*M_0}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{r_{OM_0}^2 - R^2}{R \cdot r_{M^*M_0}^3}$$

$$u(M_0) = \iint\limits_{S_0^R} F(\varphi, \theta) \cdot \frac{1}{4\pi} \frac{r_{OM_0}^2 - R^2}{R \cdot r_{MM_0}^3} \cdot dS$$

$M_0(r_0, \theta_0, \varphi_0)$

$$\frac{\vec{r}_{OM_0}}{r_{OM_0}} = (\cos\varphi_0 \sin\theta_0,\ \sin\varphi_0 \sin\theta_0,\ \cos\theta_0)$$

$M(r, \theta, \varphi)$

$$\frac{\vec{r}_{OM}}{r_{OM}} = (\cos\varphi \sin\theta,\ \sin\varphi \sin\theta,\ \cos\theta)$$

$$\left(\frac{\vec{r}_{OM_0}}{r_{OM_0}}, \frac{\vec{r}_{OM}}{r_{OM}}\right) = \cos\gamma =$$

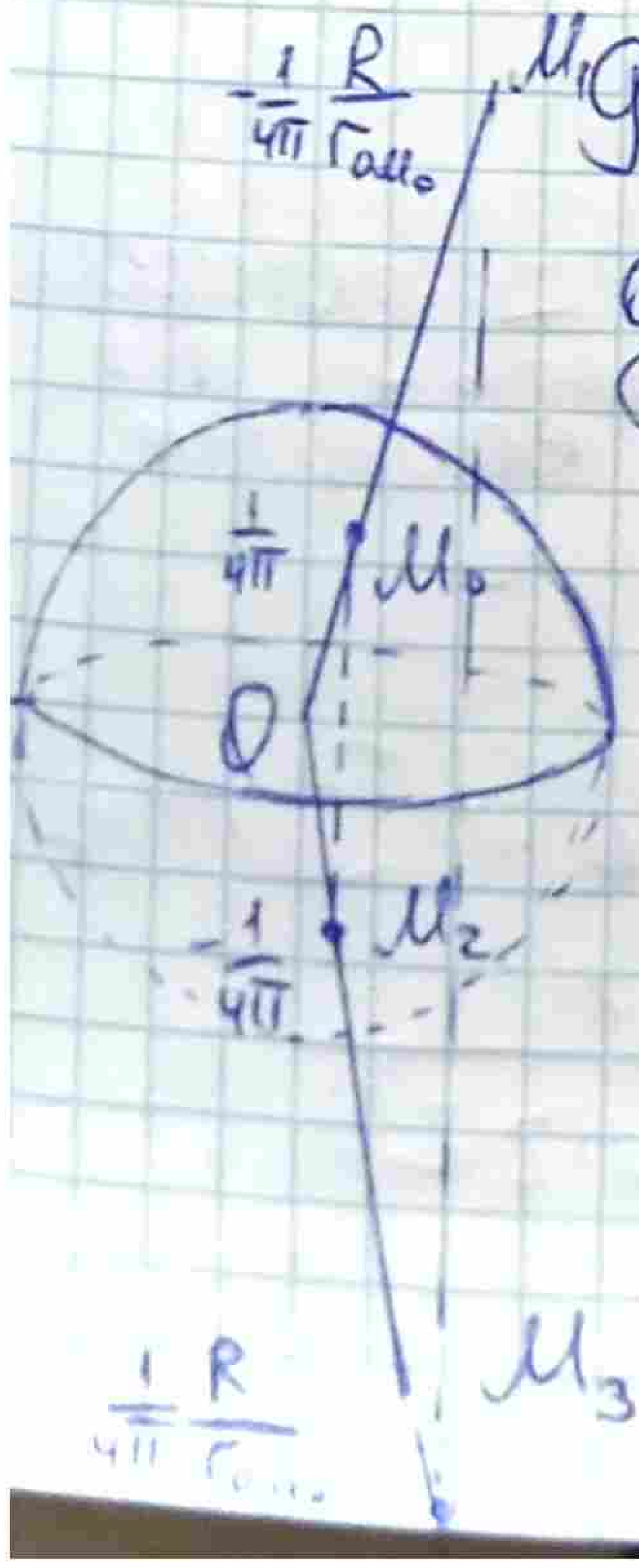
$$\cos\varphi_0 \sin\theta_0 \cos\varphi \sin\theta + \sin\varphi_0 \sin\theta_0 \sin\varphi \sin\theta +$$
$$+ \cos\theta_0 \cos\theta = \sin\theta_0 \sin\theta \cdot \cos(\varphi - \varphi_0) +$$
$$+ \cos\theta_0 \cos\theta$$

$\triangle OMM_0$:

$$r_{MM_0}^2 = R^2 + r_{OM_0}^2 - 2R\, r_{OM_0} \cdot \cos\gamma =$$

$$\cancel{U(r_0, \varphi_0, \theta_0)} = = R^2 + r_0^2 - 2R r_0 \cos\gamma$$

$$U(r_0, \varphi_0, \theta_0) = \frac{R^2 - r_0^2}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\ R^2 \sin\theta \frac{F(\varphi, \theta)}{\{R^2 + r_0^2 - 2R r_0 \cos\gamma\}^{3/2}}$$



Функция Грина для полусферы

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{r_{OM_0}} \cdot \frac{1}{r_{MM_2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{r_{MM_2}} + \frac{R}{r_{OM_0}} \cdot \frac{1}{r_{MM_3}}\right)$$

Функция Грина на плоскости. Решение задачи Дирихле на пл-ти

$n = 2$

$Q \subset R^2$

$M(x, y)$, $M(x_0, y_0)$

$r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

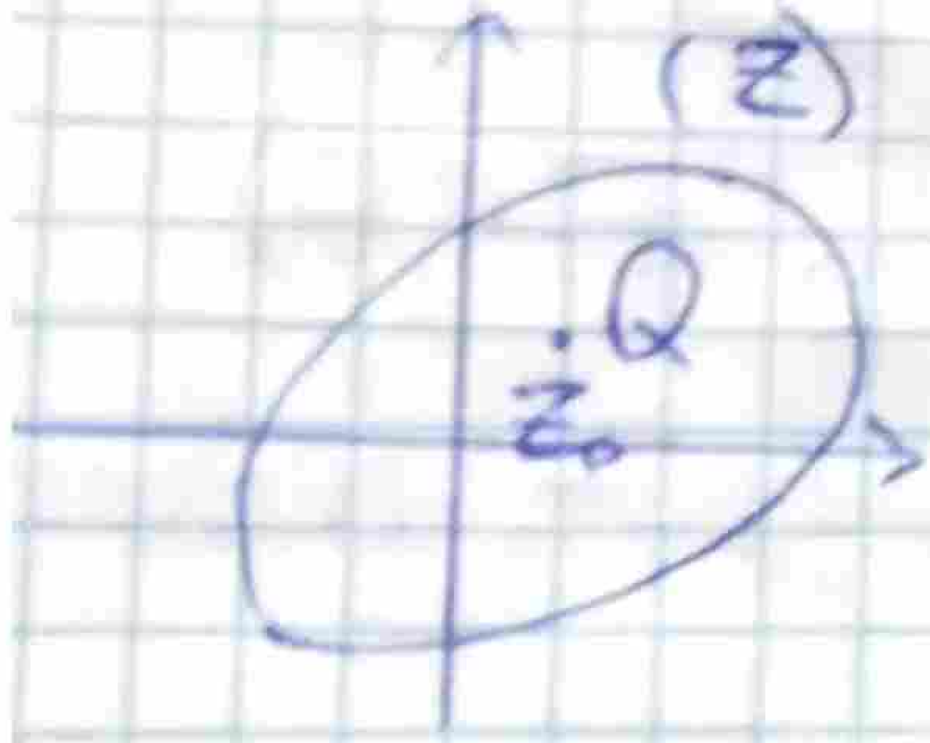
1) $G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + g(M, M_0)$

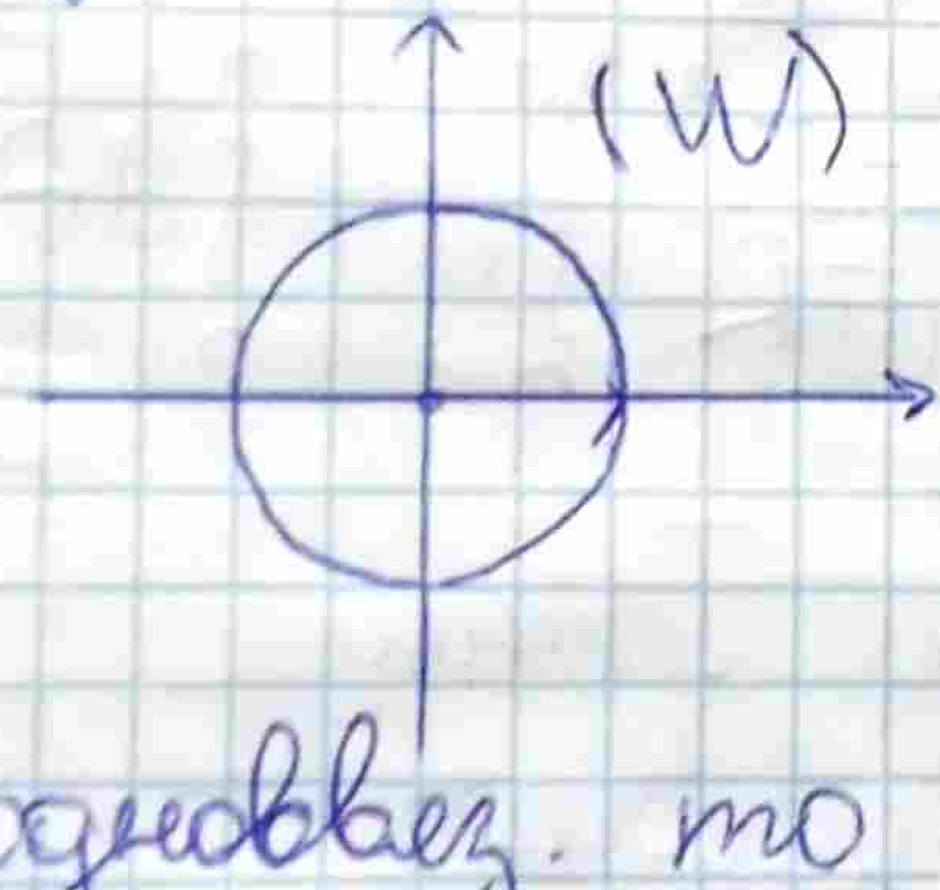
$M \in Q$, M_0 - фиксир. $M_0 \in Q$

2) $\Delta g = 0$, $M \in Q$

3) $G\big|_{\partial Q} = 0$

Метод построения ф-ции Грина с помощью конформных отображений





Если обл. Q - односвяз. то всегда $\exists$ конформн. отобр. этой пл-ти на ~~пл-ть~~ внутренность единичн. круга, при этом $z_0 \to (0,0)$

$W = W(z, z_0)$, $W(z_0, z_0) = 0$ по т. Римана

$G(x, y, x_0, y_0) = G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|W(z, z_0)|}$

обоснование

3) $\partial W \quad \partial Q \to |W| = 1$

$G|_{\partial Q} = \frac{1}{2\pi} \ln 1 = 0$

1) Отображение конформное

$W(z, z_0) = (z - z_0) f(z, z_0)$, $z \in Q$

$z = z_0$ – ноль первого порядка

$f(z, z_0) \neq 0$, $z \in Q$

$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - z_0||f(z, z_0)|} =$

$= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - z_0|} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z, z_0)|}}_{-g(z, z_0)}$

обоснование ф-лы (1)

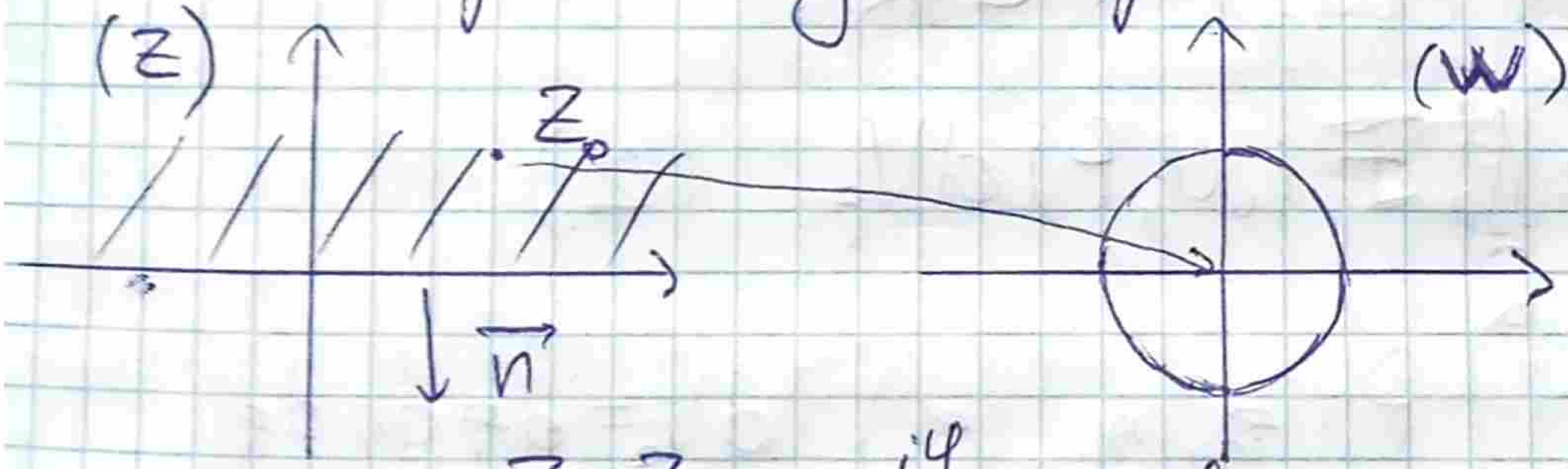
2) $\underbrace{\ln |f(z, z_0)|}_{\text{аналитич. в } Q} = \underbrace{\ln |f(z, z_0)|}_{\text{гармонич.}} + i \arg f(z, z_0)$

У аналитич. ф-ции Re часть гармоническая

$\Delta g = 0$

Пример

Ф-ция Грина для верхней полупл-ти $y > 0$



$W = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \cdot e^{i\varphi} \quad \forall \varphi$, $|e^{i\varphi}| = 1$

$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z - \bar{z}_0|}{|z - z_0|} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} =$

$= \frac{1}{4\pi} \left[\ln[(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2] - \ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right]$

Решить задачу Дирихле

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad y > 0$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x)$$

$$u(x_0, y_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi(x) \left.\frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial n}\right|_{y=0}$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2} - \frac{2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right]$$

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{dx}{(x-x_0)^2+y_0^2}$$

$x_0 \to x$, $y_0 \to y$

$x \to \xi$

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{d\xi}{(\xi-x)^2+y^2}$$

Теория потенциалов
Несобственные интегралы с параметром

$n = 3$

Q – огранич. обл. $Q \subset \mathbb{R}^3$

$$u(M) = \iiint_Q F(M, P)\, dV_P \quad (2)$$

$M(x, y, z)$, $P(\xi, \eta, \zeta)$, $dV_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta$

$$F|_{P=M} = \infty$$

Если $P \neq M$, то F – непрерывна

$$u(M_0) = \iiint_Q F(M_0, P)\, dV_P \quad (1)$$

интеграл сх-ся, если $T^{\varepsilon}_{M_0}$ – окрестность т. M_0 диаметром ε

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iiint\limits_{Q - T^{\varepsilon}_{M_0}} F(M_0, P)\, dV_P = \iiint\limits_{Q} F(M_0, P)\, dV_P$$

св-ва сх-ся интеграла

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon)$, что

$$\left| \iiint\limits_{T^{d}_{M_0}} F(M_0, P)\, dV_P \right| < \varepsilon$$

как только $d \le \delta$

Опред.

Интеграл (1) сх-ся равномерно в обл. Q если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon)$, что

$$\left| \iiint\limits_{T^{d}_{M_0}} F(M, P)\, dV_P \right| < \varepsilon$$

как только
1) $d \le \delta$
2) $r_{MM_0} \le \delta$

Теорема 1

Если н. и. сх-ся равномерно в т. M_0, то он явл-ся ф-цией непрерывной в т. M_0

Теорема 2

Пусть

1) $F(M, P)$ – дифф. по к-там т. M при $\forall P \neq M$
2) интеграл сх-ся в т. M_0
3) интеграл от производной сх-ся равномерно в т. M_0.

Тогда $\left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{M=M_0} = \iiint\limits_{Q} \left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{M=M_0} dV_P$

интеграл дифф. в т. M_0

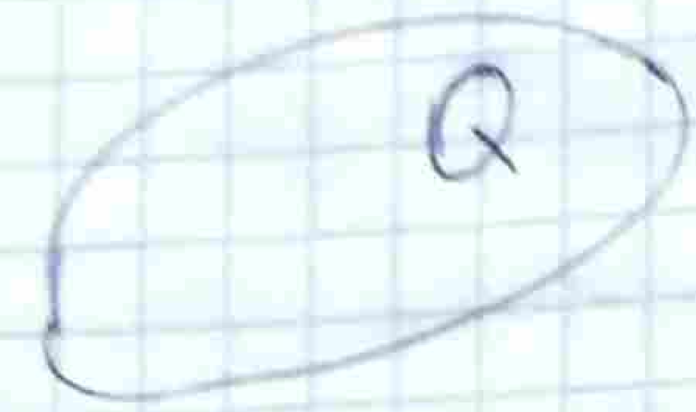
Объемной потенциал

e_1 e_2 e_n

P_1 P_2 P_n

$$U(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_{MP_i}}$$

потенциал электростат. поля



$\rho(P)$ – плотность заряда в обл. Q

$$\iiint_Q \rho(P)\, dV_P = e$$

$$U(M) = \iiint_Q \frac{\rho(P)\, dV_P}{r_{MP}}$$ – потенциал электростат. поля (1) объемный потенциал

$|\rho(P)| \leq A$

$\rho(P)$ интегрируема по Q

Св-ва

1) Объемной потенциал непрерывен всюду

$U(M) \in C(R^3)$

Док-во

в фиксир. т. M_0

а) $M_0 \notin \overline{Q}$

$r_{MM_0} \neq 0$ интеграл не яв-ся несобствен

подинтеграл. ф-ция непр. в т. M_0 значит сам интеграл непрерывен в т. M_0.

б) $M_0 \in \overline{Q}$

интеграл яв-ся несобствен.

Теорема 1

Достаточно док-ть равномерную сх-ть интеграла (1) в т. M_0

$$\left| \iiint\limits_{T^{\delta}_{M_0}} \frac{\rho(P)\,dV_P}{r_{MP}} \right| \le A \iiint\limits_{T^{\delta}_{M_0}} \frac{dV_P}{r_{MP}} \le$$

$r_{MM_0} \le \delta$

строим $Ш_M^{2\delta}$ ← радиус 2δ, $Q \subset Ш_M^{2\delta}$

$$\le A \iiint\limits_{Ш_M^{\delta}} \frac{dV}{r_{MP}} =$$

$$= A \int_0^{2\delta} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, r^2 \sin\theta \cdot \frac{1}{r} =$$

$$= A \cdot 4\pi \frac{(2\delta)^2}{2} = \varepsilon$$

нашли $\delta(\varepsilon)$

как расположена M по отнош. к обл. Q не играет роли

2) Объемный потенц. дифф. всюду, все производные можно вычислять перестановкой интегр. и дифф.

$U(M) \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Док-во по теореме 2

3) Объемный потенциал есть ф-ция гармоническая вне обл. $\overline{Q}$

$\Delta U = 0$, $M \in \overline{Q}$

Док-во

$M \in \overline{Q}$ интеграл не явл-ся несобствен. подинтегр. ф-ция дифф. сколько угодно раз, все произв. считаются перестановкой

$$\Delta U = \iiint\limits_Q \rho(P) \underbrace{\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)}_{=0} dV_P = 0$$

фунд. решение ур-ния Лапласа

4) $U(M) \to 0$, $M \to \infty$

Док-во

$$U(M) \overset{\text{т. о среднем}}{=} \frac{1}{r_{MP^*}} \iiint\limits_Q \rho(P)\, dV_P = \frac{e}{r_{MP^*}} \to 0$$

$P^* \in \overline{Q}$ $\quad e \quad$ при $M \to \infty$

5) Пусть $\rho(P)$ ф-ция дифф в Q и ее произв. огранич. в обл. Q

$\rho(P) \in C^2(Q)$

Тогда

$\Delta U = -4\pi \rho(M)$, $M \in Q$

без док-ва

$$\Delta U = \iiint\limits_Q \rho(P)\, \Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dV_P \ominus$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) = -4\pi\, \delta(M_0, M)$$

$$\ominus -4\pi \iiint\limits_Q \rho(P)\, \delta(M_0, M)\, dV_P = -4\pi \rho(M), M \in Q$$

формально, док-во труднее, есть условие на $\rho(P)$

Применение объемного потенциала

$\Delta U = f(M)$, $M \in Q$

$$\left(\alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U\right)\Big|_{\partial Q} = F(M)$$

Согласно (5) можно записать частное решени

$$U_r(M) = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_Q \frac{f(M)}{r_{MP}}\, dV_P$$

$u(M) = u_r(M) + V(M)$

сформулир. краевую задачу для $V(M)$

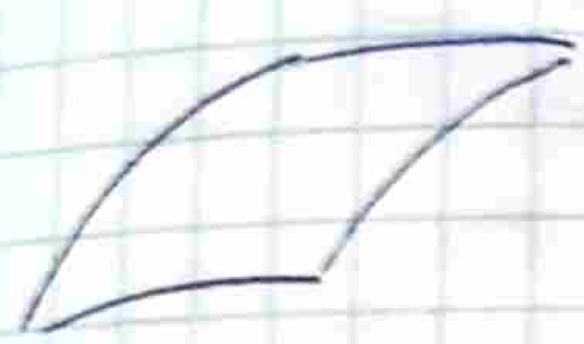
$\Delta V = 0, \quad M \in Q$

$$\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial n} + \beta V\right)\Big|_{\partial Q} = \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_{\partial Q} - \left(\alpha \frac{\partial u_r}{\partial n} + \beta u_r\right)\Big|_{\partial Q} =$$

$$= F(M) - \left(\alpha \frac{\partial u_r}{\partial n} + \beta u_r\right)\Big|_{\partial Q} = \overline{F}(M)$$

С помощью объемн. потенц. задача для неоднородн. ур-ния сводится к задаче для однородного ур-ния

Потенциал простого слоя



S пов-ть S с распред. зарядами плотностью $\rho(P)$

$$u(M) = \iint_S \frac{\rho(P)}{r_{MP}} dS_P$$

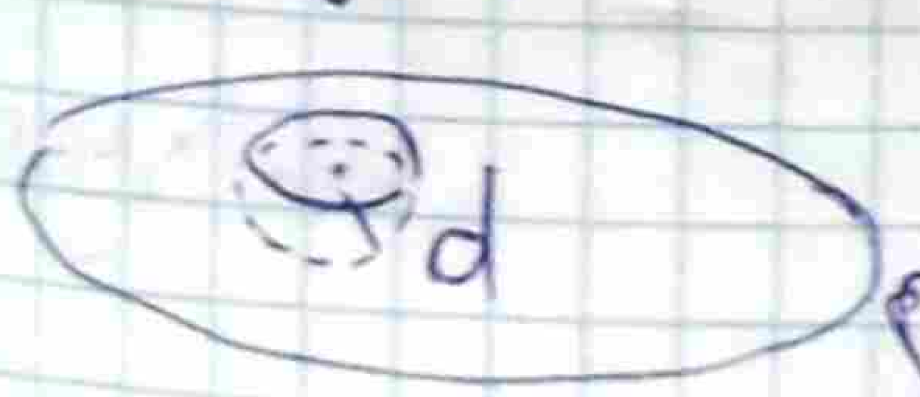
потенциал простого слоя

Опред.

Пов-ть Ляпунова - это пов-ть S, если

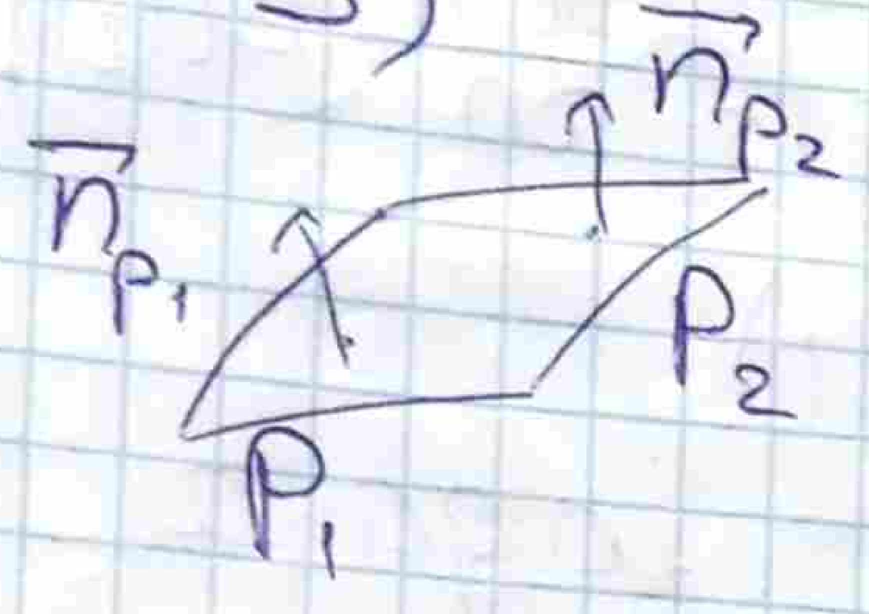
1) в каждой т. пов-ти $\exists$ касат. пл-ть к пов-ти (тогда в окрестн. каждой т. пов-ти можно ввести локал. с-му к-т, за пл-ть ξ, η взять касат. пл-ти, а $z \Rightarrow$ || нормали)

2) $\exists\, d > 0$, такая что, если построить сферу в $\forall$ т. пов-ти радиуса d, то вся пов-ть разделится на две части, внеш. и внутр., тогда любая прямая || нормали пов-ть S внутри сферы пересек. только один раз



(Тогда в лок. с-ме к-т может записать ур-ние пов-ти в разрешен. виде
$\zeta = f(\xi, \eta)$)

3)



$\angle(\widehat{\vec{n}_{P_1}, \vec{n}_{P_2}}) < A\, r^{\delta}_{P_1P_2}$

$A > 0, \quad 0 < \delta < 1$

1. $\rho(P)$ - интегрир. по S

2. $|\rho(P)| < A$

Св-ва потенциала простого слоя

1) $U(M) \in C(\mathbb{R}^3)$

Док-во

а) $M_0 \notin S, \quad r_{M_0P} \neq 0$

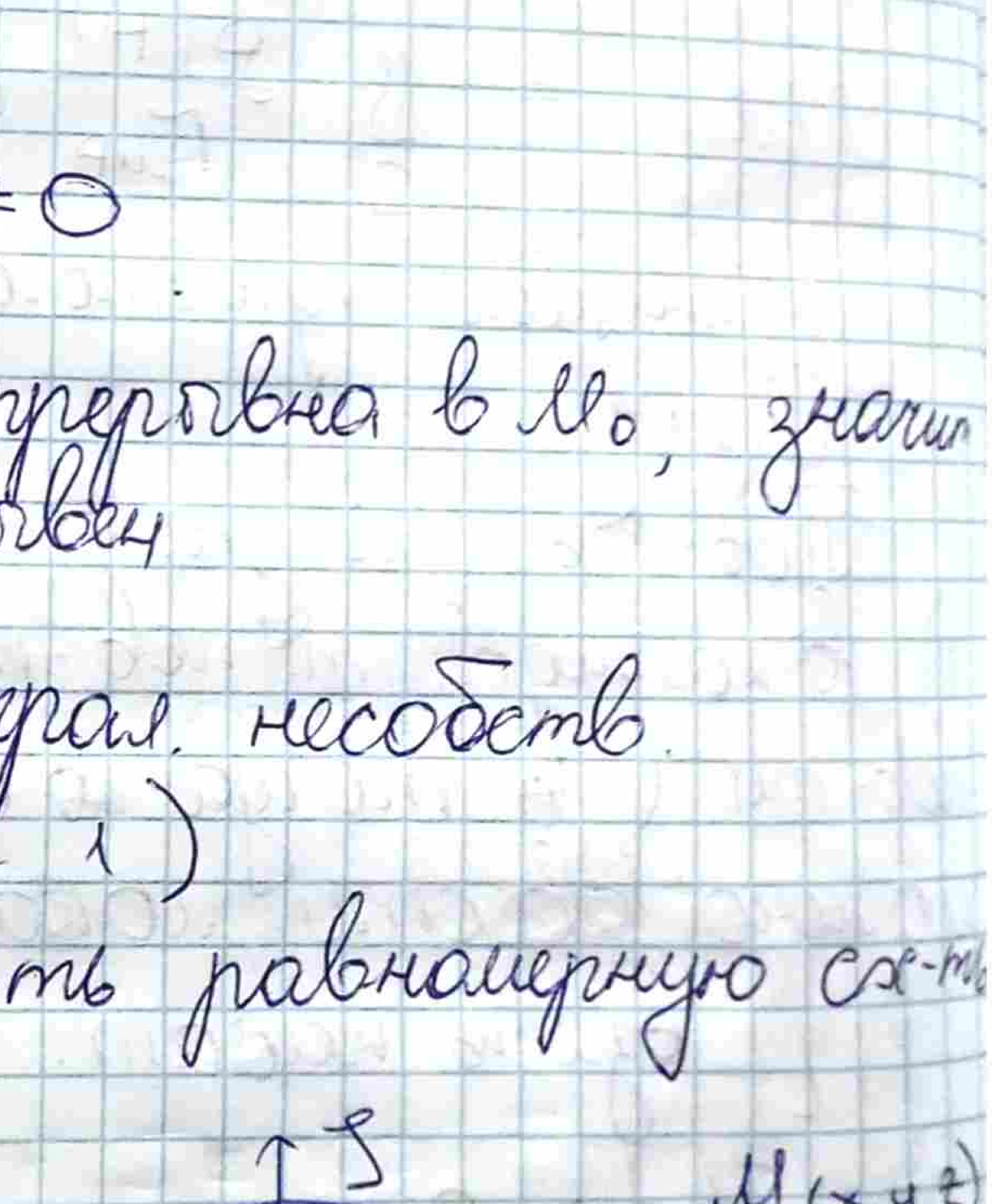
подинтегр. ф-ция непрерывна в M_0, значит сам интеграл непрерывен

б) $M_0 \in S \Rightarrow$ интеграл несобств.

Док-во (по теореме 1)

Нео достаточн. док-ть равномерную сх-ть в т. M_0

$\left| \iint\limits_{\sigma} \frac{\rho(M)}{r_{MP}} dS \right| \leq$



$\sigma_\delta \subset S, \quad M_0 \in \sigma$

$\leq A \iint\limits_{\sigma_\delta} \frac{dS}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \leq$

$$\le A \iint\limits_{\sigma_\delta} \frac{dS}{\sqrt{(x-\eta)^2+(y-\xi)^2}} \;=$$

$$dS = \frac{d\sigma}{\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_{P_1})} = \frac{d\sigma}{\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_{M_0})}$$

$\sigma_\delta \to \Pi^\delta_{M_0}$ – проекция на пл-ть $\eta O \xi$

$$= A \iint\limits_{\Pi^\delta_{M_0}} \frac{d\sigma}{\cos(\widehat{\vec{n}_P, \vec{n}_{P_1}}) \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \;\le$$

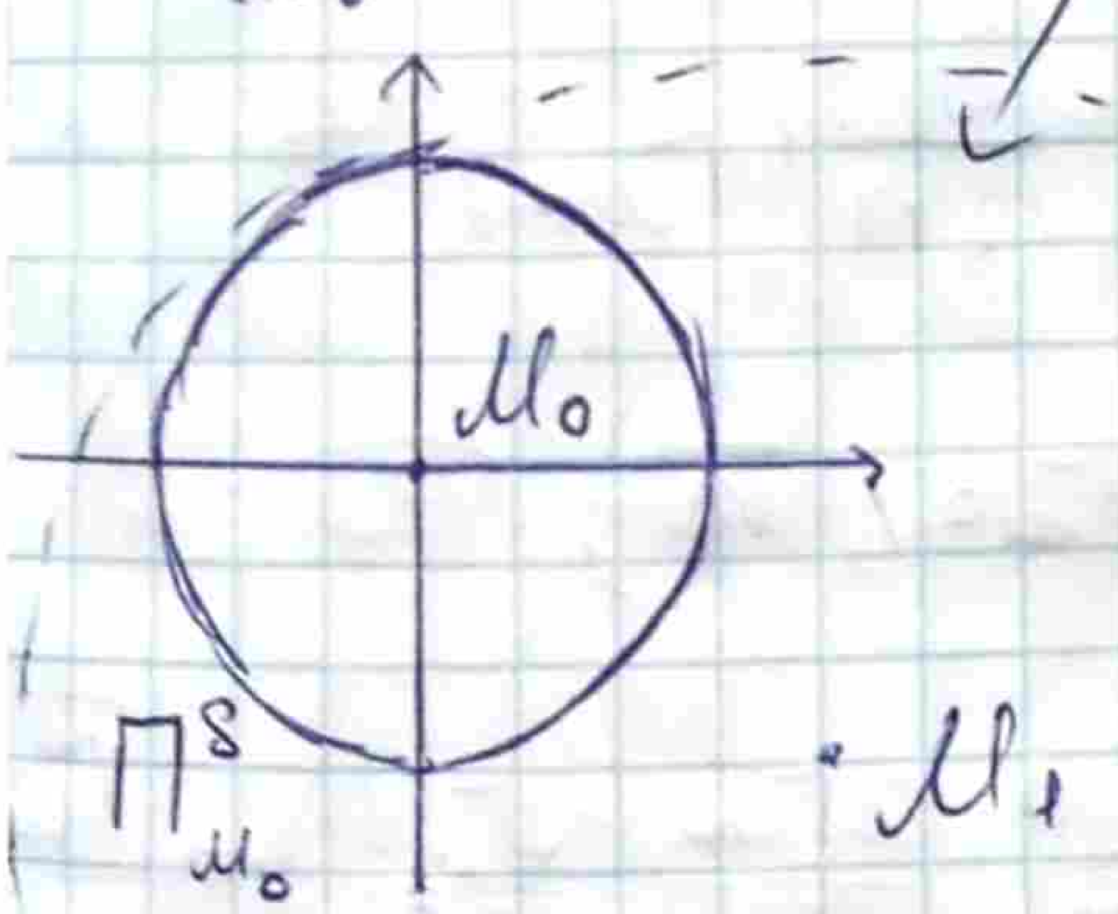
$\gamma(\vec{n}_P, \vec{n}_{P_1}) \le \tilde{A}\, r^\delta_{PM_0} \Rightarrow$ угол будет маленький

δ можем взять таким, что $\cos(\widehat{\vec{n}_P, \vec{n}_{P_1}}) \ge \frac{1}{2}$

$$\le 2A \iint\limits_{\Pi^\delta_{M_0}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \;\le$$

Пусть M – любая точка, но $r_{MM_0} < \delta$

$r_{M_1M_0} \le \delta \quad K^\delta_{M_1}$



$K^\delta_{M_1}$ – круг.

$\Pi^\delta_{M_0} \subset K^\delta_{M_1}$

$$\le 2A \iint\limits_{K^\delta_{M_0}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = 2A \int_0^{2\delta} dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{r}\cdot r =$$

$$= 2A \cdot 2\delta \cdot 2\pi = \varepsilon$$

равномерная сх-ть интеграла

2) Потенциал простого слоя – ф-ция гармонич. вне пов-ти S

$$\Delta U = 0, M \in S$$

Док-во

подинтеграл. ф-ция непрерывна вне S тогда интеграл дифф. сколь угодно раз

$$\Delta U = \iint \rho(P)\, \underbrace{\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)}_{=0} dS$$

3) $U(M) \to 0, \ M \to \infty$

$$U(M) = \underbrace{\frac{1}{r_{MP^*}}}_{\to\infty} \underbrace{\iint_S \rho(P)\, dS}_{q} \to 0 \quad P^* \in S$$

4) $S = \partial Q$

$M_0 \in \partial Q$ $\qquad \frac{\partial U}{\partial n}(M_0) = \iint \rho(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dS =$

вне контура

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) = -\frac{1}{r_{MP}^2} \frac{\partial}{\partial n}(r_{MP}) =$$

$$= -\frac{1}{r_{MP}^2}(\operatorname{grad} r_{MP}, \vec{n}) =$$

$\vec{n}_{M_0} = \vec{n}$

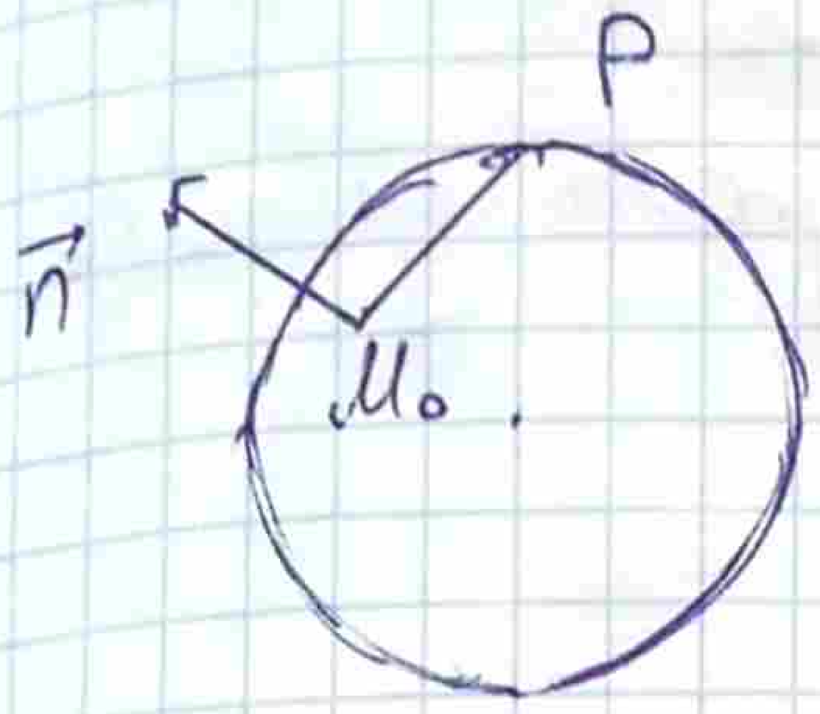
$$\operatorname{grad} r_{MP} = \left(\frac{\partial r_{MP}}{\partial x}, \frac{\partial r_{MP}}{\partial y}, \frac{\partial r_{MP}}{\partial z}\right) = \frac{\vec{r}}{r_{MP}}$$

$$= -\frac{1}{r_{MP}^3}(\vec{r}_{PM}, \vec{n}) = -\frac{1}{r_{MP}^2}\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}) =$$

$$= \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n})}{r_{MP}^2}$$

$$= \iint_{\partial Q} \rho(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n})}{r_{MP}^2} dS, \quad M \in S$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}(M_0) = \iint\limits_{\partial Q} \rho(P) \frac{\cos(\vec{r}_{M_0P}, \vec{n}_{M_0})}{r^2_{M_0P}} dS$$



$$\gamma(\vec{r}_{M_0P}, \vec{r}_{MP}) \xrightarrow[P \to M_0]{} \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\gamma \xrightarrow[P \to M_0]{} 0$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial n_{внутр}} = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in Q}} \frac{\partial U(M)}{\partial n}$$

M - лежит внутри обл. Q

можно показать, если $\rho(P) \in C(\partial Q)$, то предел $\exists$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial n_{наружн.}} = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \notin \overline{Q}}} \frac{\partial U(M)}{\partial n}$$

св-во 4)

Если $\rho(P) \in C(\partial Q)$, то производная по нормали при переходе через границу ∂Q терпит скачок первого рода, причем справедливы ф-лы

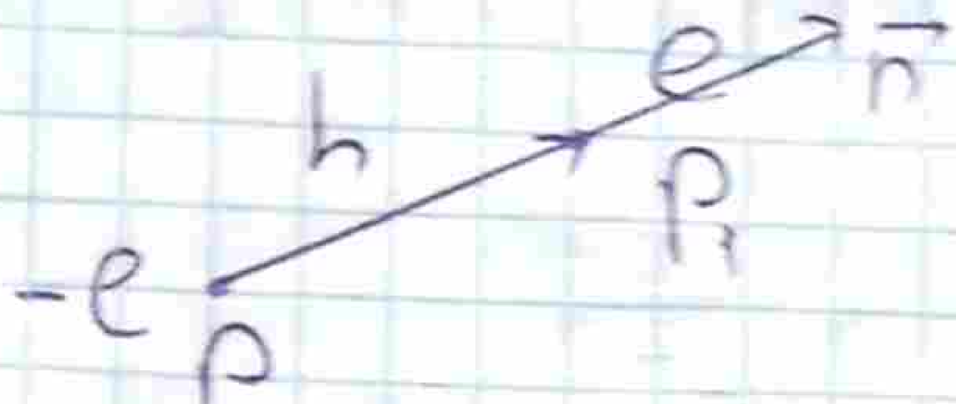
$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial n_{внутр}} = \frac{\partial U(M_0)}{\partial n} + 2\pi\rho(M_0) \quad (1)$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial n_{нар.}} = \frac{\partial U(M_0)}{\partial n} - 2\pi\rho(M_0) \quad (2)$$

$M_0 \in \partial Q$, $\vec{n} = \vec{n}_{M_0}$

Величина скачка $4\pi\rho(M_0)$

Потенциал двойного слоя



$\vec{n}$ – ось диполя

заряды образуют диполь

$$u(M) = \frac{e}{r_{MP_1}} - \frac{e}{r_{MP}} =$$

$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$ теорема Лагранжа

$a < \xi < b$

$$= eh \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)\Big|_{P=P^*}$$

момент диполя

$eh = \nu$

Точечный диполь

Зафиксируем момент диполя, $P_1 \to P$, $h \to 0$,

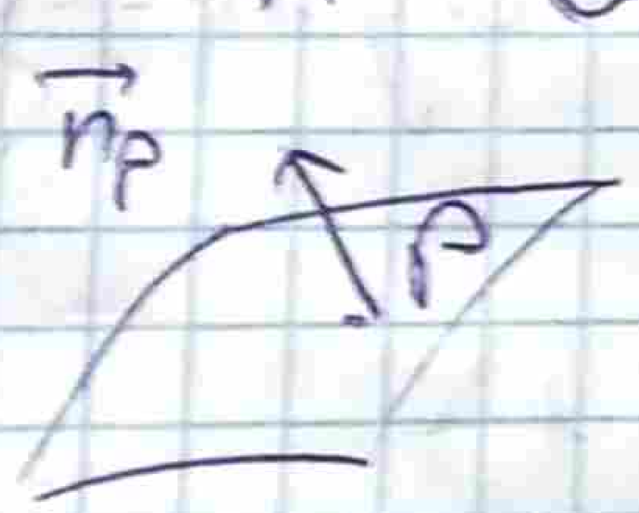
$eh = \nu = const$

точечн. диполь

$$u(M) = \nu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)$$ – потенциал электрост. поля, который создает точечн. диполь

$\nu = const$

$\vec{n}$ – ось диполя



пов-ть с положит. направл. нормали с распред. на ней точечн. диполями с плотность момент диполя $\nu(P)$, будем предполаг., что $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{n}_P$,

Тогда

$$u(M) = \iint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dS$$ потенциал двойного слоя

$\frac{\partial}{\partial n_P}$ – дифф. по перемен. ξ, η, ζ

$$\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) = -\frac{1}{r_{MP}^2}\left(\operatorname{grad} r_{MP}, \vec{n}_P\right) =$$

$$\operatorname{grad} r_{MP} = \left(\frac{\partial r_{MP}}{\partial \xi}, \frac{\partial r_{MP}}{\partial \eta}, \frac{\partial r_{MP}}{\partial \zeta}\right) = \frac{\vec{r}_{MP}}{r_{MP}}$$

$$= \frac{1}{r_{MP}^2}\cos\left(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P\right)$$

$$u(M) = \iint\limits_S \frac{\nu(P)\cos\left(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P\right)}{r_{MP}^2}\,dS \quad (2)$$

Телесный угол - часть пр-ва заключен. внутри конич. пов-ти, вершина ~~ко~~ конечн. угла - вершина телесного угла

мера угла - длина дуги единичн. круга, заключ. внутри угла

мера телесного угла - площадь пов-ти заключ. внутри телесного угла

dS спроект. на сферу $S_M^P \to d\sigma$

$d\sigma$ - элемент. кусок сферы S_M^P радиуса r_{MP}

$$d\sigma = \cos\left(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P\right) dS$$

dS_1 - элемент. кусок сферы единичн. радиуса

$$dS_1 = \frac{d\sigma}{r_{MP}^2}$$

$$dS_1 = \frac{\cos\left(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P\right) dS}{r_{MP}^2}$$

телесный угол имеет знак, положит., если мы из т. M видим нормаль $\vec{n}_P$, если не видим отриц.

$$d\omega_{MP} = \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)\,dS}{r_{MP}^2}$$ ← дифф. телесного угла

P – т. пробег. пов-ть S

$$U(M) = \iint_S \nu(P)\,d\omega_{MP} \quad (3)$$

Св-ва

1) Потенциал двойного слоя определен всюду (след. из выраж. (3))

2) $U(M) \to 0$, $M \to \infty$

След. из ф-лы (2)

$$U(M) = \underbrace{\frac{1}{r_{MP^*}}}_{\to\infty} \cos(\vec{r}_{P^*M}, \vec{n}_P) \cdot \underbrace{\iint \nu(P)\,dS}_{\nu} \to 0$$

3) Потенциал двойного слоя есть ф-ция гармонич. вне пов-ти S

$\Delta U = 0$, $M \notin S$

Док-во (из (1))

$$\Delta U = \iint_S \nu(P)\,\Delta\left(\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)\right) dS =$$

$$= \iint_S \nu(P)\,\frac{\partial}{\partial n_P}\underbrace{\left(\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)\right)}_{=0} dS = 0$$

4) $S = \partial Q$

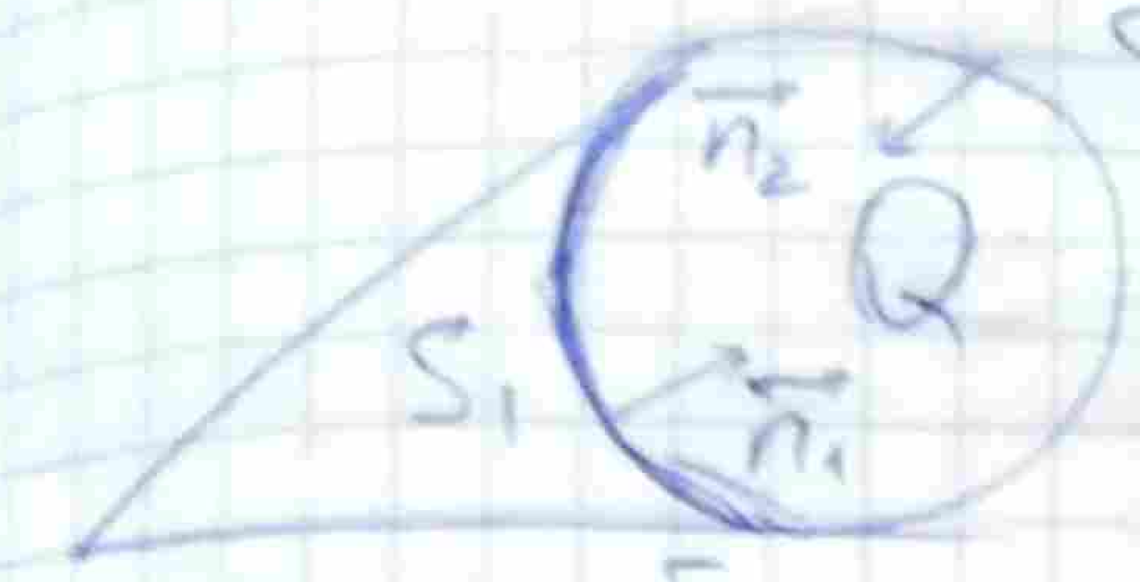
$\nu(P) = 1$ интеграл Гаусса

$$\tilde{U}(M) = \iint_{\partial Q} d\omega_{MP} = \iint_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dS$$

n – внутренняя нормаль

$$\overline{\Pi}(M) = \iint_{\partial Q} d\omega_{MP} = \begin{cases} 4\pi, & M \in Q \\ 2\pi, & M \in \partial Q \\ 0, & M \notin \overline{Q} \end{cases}$$

1. $M \notin \overline{Q}$ $\qquad \overline{Q} = Q + \partial Q$

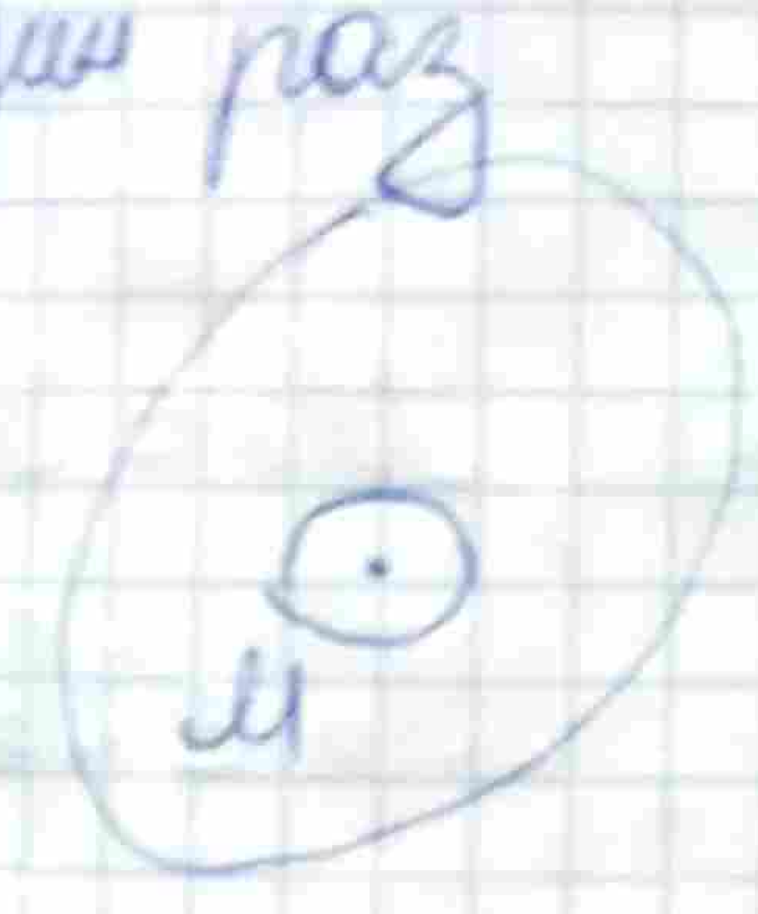


S_2 провести касат. пл-ти через M к обл. Q, тогда телесный угол образ. огиб. телесный угол S_1 равен телесному углу S_2 по величине

$$\iint_{\partial Q} d\omega_{MP} = \underbrace{\iint_{S_1} d\omega_{MP}}_{<0} + \underbrace{\iint_{S_2} d\omega_{MP}}_{>0} = 0$$

2. $M \in Q$

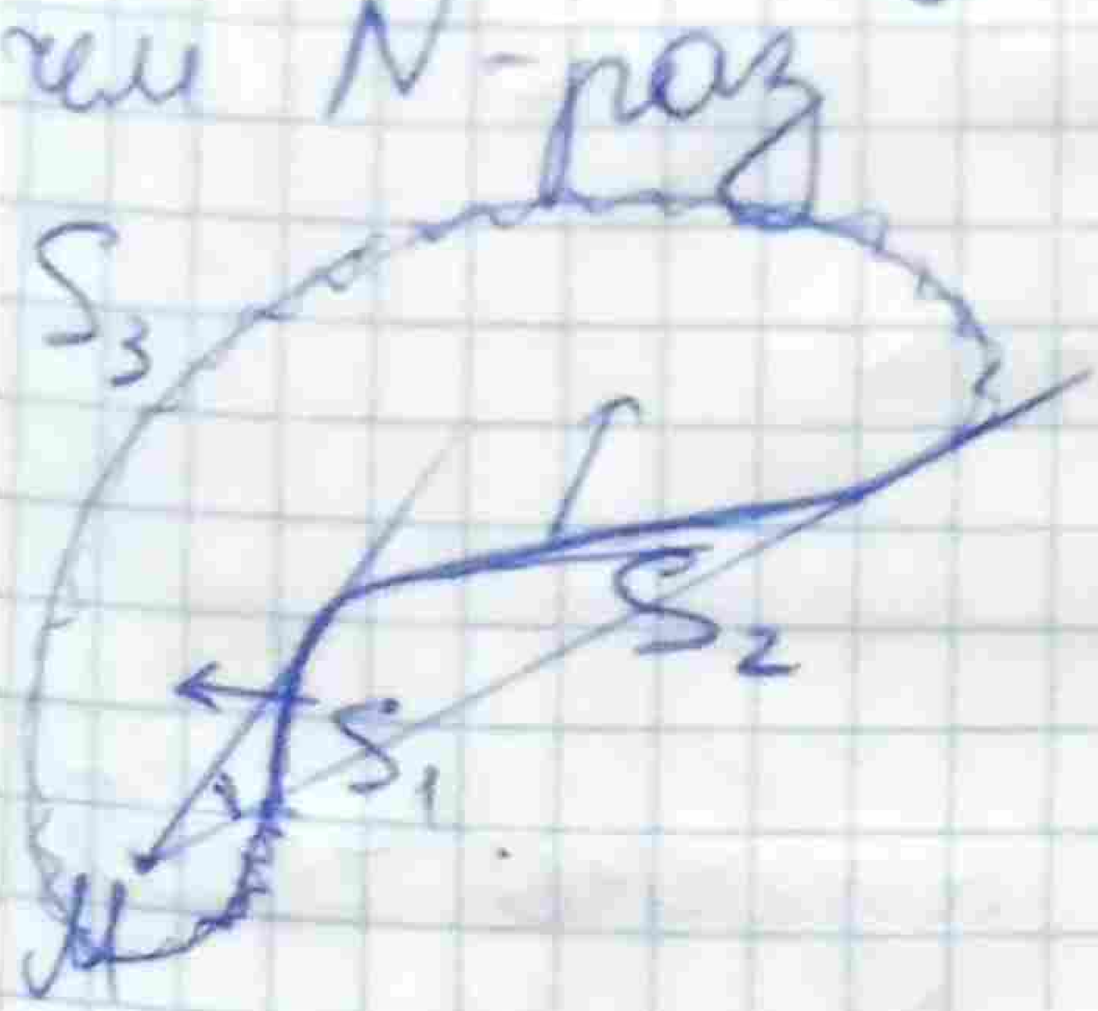
а) любой луч из M пересек. ∂Q только один раз



чтобы измерить телесный угол нужно построить сферу единичного радиуса через M

$$\iint_{\partial Q} d\omega_{MP} = 4\pi$$

б) любой луч через M пересек. ∂Q не более, чем N-раз

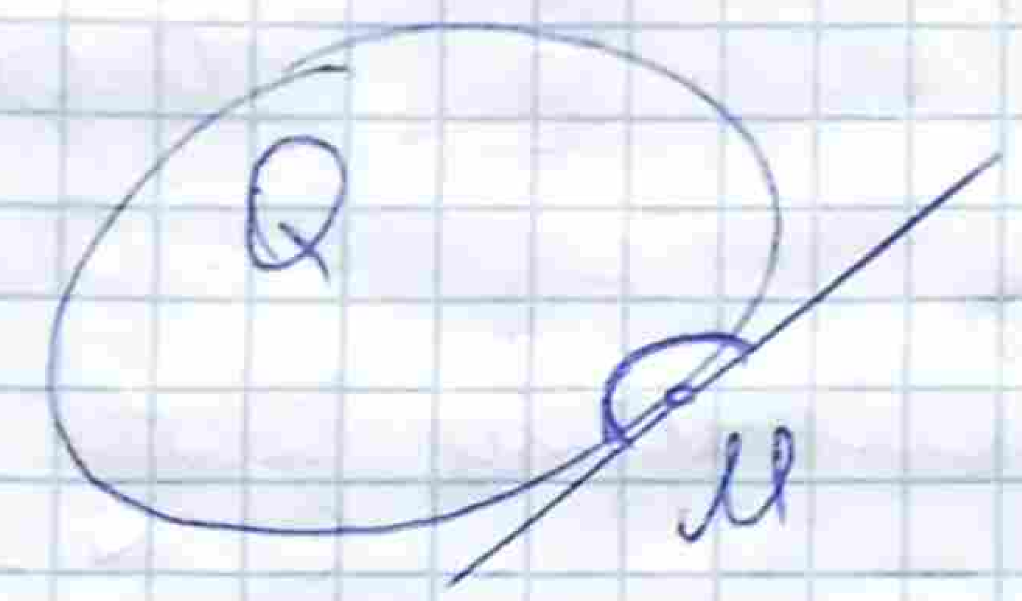


$$\iint_{\partial Q} d\omega_{MP} = \cancel{\iint_{S_1} d\omega_{MP}} + \cancel{\iint_{S_2} d\omega_{MP}} + \iint_{S_3} d\omega_{MP}$$

пов-ти S_1 и S_2 видны под одним и тем же углом (по величине) из точки M лучи пересекают S_3 только один раз, это случай а)

$$\iint\limits_{\partial Q} d\omega_{MP} = 4\pi$$

3. $M \in \partial Q$



$$\iint\limits_{\partial Q} d\omega_{MP} = 2\pi$$

5) $\nu(p) \in C(\partial Q)$

$S = \partial Q$

при переходе через границу потенц. двойного слоя терпит скачок ~~дв~~ 1-го рода

$$U_{внутр}(M_0) = U(M_0) + 2\pi\rho(M_0), \quad M_0 \in \partial Q \quad (4$$

$$U_{нар}(M_0) = U(M_0) - 2\pi\rho(M_0), \quad M_0 \in \partial Q \quad (5$$

где

$$U_{внутр}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in Q}} U(M)$$

$$U_{нар}(M_0) = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \notin \overline{Q}}} U(M)$$

Чтобы определить скачок нужно найти разность (4) − (5)

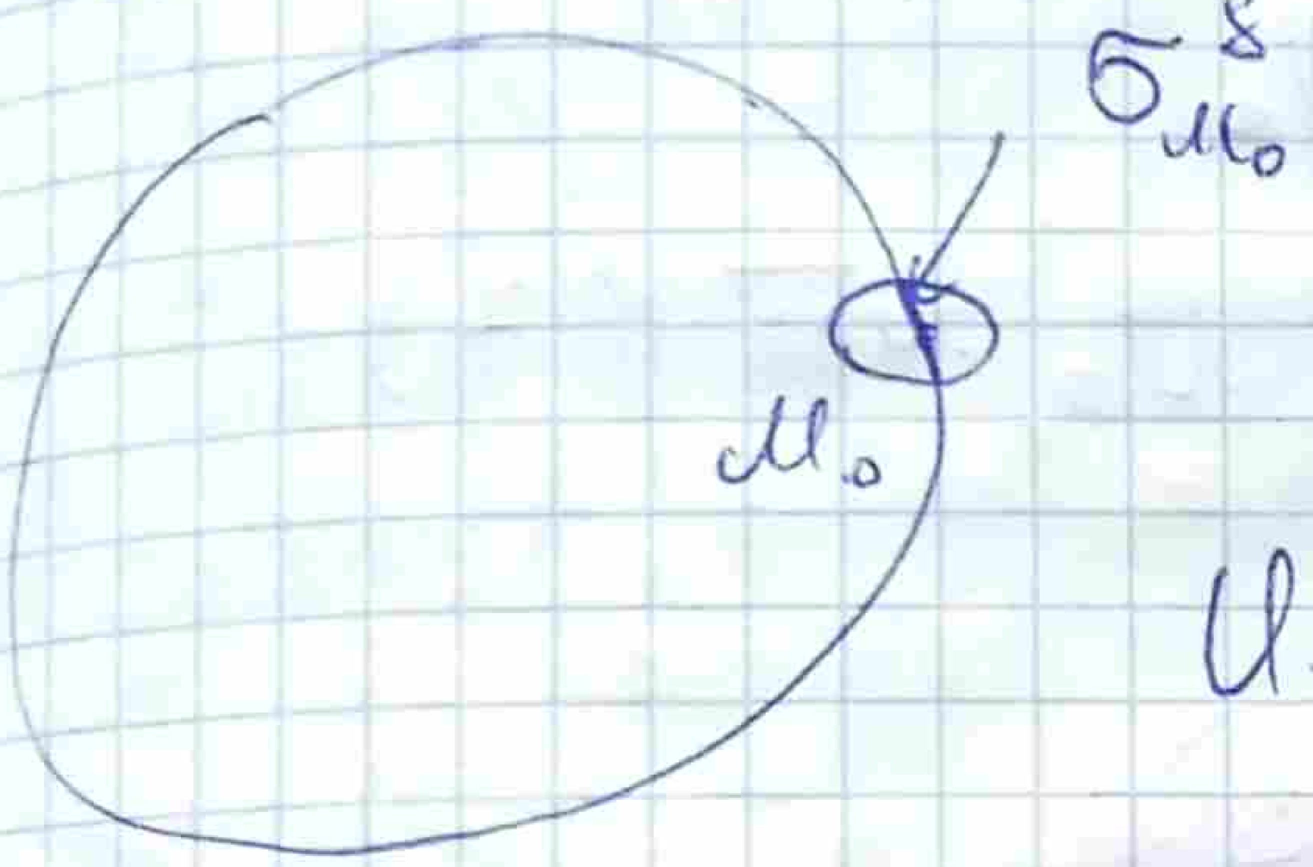
$U_{внутр}(M_0) - U_{нар}(M_0) = 4\pi\rho(M_0)$

Док-во

$M_0 \in \partial Q$

$$U(M) = \underbrace{\iint\limits_{\partial Q} (v(P) - v(M_0))\, d\omega_{MP}}_{U_1(M)} + \underbrace{v(M_0) \iint\limits_{\partial Q} d\omega_{MP}}_{\text{интеграл Гаусса}} \quad (G)$$

Покажем, что $U_1(M)$ непрерывна в т. M_0



$\sigma^{\delta}_{M_0}$ – кусок пов-ти, попад. внутрь сферы

$$U_1(M) = \underbrace{\iint\limits_{\partial Q - \sigma^{\delta}_{M_0}} (v(P) - v(M_0))\, d\omega_{MP}}_{=U_2(M)} + \underbrace{\iint\limits_{\sigma^{\delta}_{M_0}} (v(P) - v(M_0))\, d\omega_{MP}}_{=U_3(M)}$$

Для $U_2(M)$, т. $M_0 \notin \partial Q$

тогда $U_2(M)$ гармонич., тогда $U_2(M)$ – непрерывна

$|U_2(M) - U_1(M)| < \varepsilon$, $r_{MM_0} < \delta$

$$|U_3(M)| \leq \iint\limits_{\sigma^{\delta}_{M_0}} |v(P) - v(M_0)|\, |d\omega_{MP}| \leq$$

$|v(P) - v(M_0)| < \varepsilon$, $r_{MM_0} < \delta$, т.к. v – непрерывна

$$\leq \varepsilon \iint\limits_{\sigma^{\delta}_{M_0}} |d\omega_{MP}| \leq \varepsilon \cdot 4\pi \cdot N$$

если луч пересек. N раз пов-ть ∂Q

$$U_1(M) - U_1(M_0) = U_2(M) - U_2(M_0) + U_3(M) - U_3(M_0)$$

$$|U_1(M) - U_1(M_0)| \leq |U_2(M) - U_2(M_0)| + |U_3(M) - U_3(M_0)|$$

$$\leq \varepsilon + 4\pi N\varepsilon + 4\pi N\varepsilon = \varepsilon(1 + 4\pi N) = \varepsilon_1$$

$$r_{MP} < \delta$$

непрерывн доказана

возвращ. к (6)

1) Пусть $M \in Q$, $M \to M_0$

$$U_{внутр}(M_0) = U_1(M_0) + V(M_0) \cdot 4\pi \quad (7)$$

2) $M \to M_0$, $M \notin \overline{Q}$

$$U_{нар}(M_0) = U_1(M_0) \quad (8)$$

3) $M = M_0$

$$U(M_0) = U_1(M_0) - V(M_0) \cdot 2\pi \quad (9)$$

$(7) - (9) \Rightarrow (4)$

$(8) - (9) \Rightarrow (5)$

Краткие сведения об интегральных уравнениях

Уравнение Вальтера 2-го рода

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{неизвестн. ф-ция}}}{\underline{\varphi(x)}} + \int_0^x \varphi(t) \underbrace{K(x,t)}_{\text{ядро}} dt = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{правая часть ур-ния}}}{\underline{f(x)}}$$

Если $f(x) \equiv 0$, то ур-ние однородное

Ур-ние Вальтера 1-го рода

$$\int_0^x \varphi(t) K(x,t) dt = f(x)$$

Уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x) + \int_0^b \varphi(t)K(x,t)\,dt = f(x)$$

1-го рода ур-ние Фредгольма

$$\int_0^b \varphi(t)K(x,t)\,dt = f(x)$$

некорректно поставлен. задача, наруш. непр. зависимость от входных данных. Использ. метод регуляризации Тихонова

Заменой интеграла на сумму ур-ние сводится к решению с-мы лин. ур-ний

$$\varphi(M) + \iint_S \varphi(P)K(M,P)\,dS = f(M) \quad (V)$$

ур-ние Фредгольма 2-го рода

Если $\iint_S dS_M \iint dS_P [K(M,P)]^2 < \infty$

справедлива теорема Фредгольма

Ур-ние (V) со слабой особенн., если

$$K(M,P) = \frac{A(M,P)}{r_{MP}^{\alpha}}, \text{ где } |A(M,P)| \le const$$

$$0 < \alpha < 2$$

Для ур-ние со слаб. особ. также справедлива теорема Фредгольма

Теорема 1

Если однород. ур-ние, соотв. (V), имеет только трив. решение, то неодн. ур-ние разрешимо при $\forall$ правой части

Опред.

Ур-ние $\psi(M) + \iint_S \psi(P)K_2(M,P)\,dS = g(M)$, $M \in S$

$$K_2(M,P) = \overline{K(P,M)}$$

Это ур-ние наз-ся комплексно-сопряж. по отнош. к ур-нию (V)

Теорема 2

Однородное ур-ние соотв. (V) и однородн. сопряж. ур-ние имеет одинаковое число лин. независим. решений

Теорема 3

Пусть однородное ур-ние соотв. (V) имеет нетрив. решение, тогда неоднородн. ур-ние разреш., когда правая часть ур-ния ортогональна всем решениям сопряж. однород ур-ния

$$\iint\limits_S f(M)\, \psi_i(M)\, dS_M = 0, \quad i = \overline{1,N}$$

Внутренняя задача Дирихле

Внутренняя задача Неймана

$$\Delta U = 0, \quad M \in Q \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\partial Q} = \varphi(M) \qquad (2)$$

n - внешняя нормаль по отнош. к обл. Q

Условия разрешимости задачи Неймана

$$\iiint\limits_{Q} (U \underbrace{\Delta V}_{=0} - V \Delta U)\, dV = \iint\limits_{\partial Q} \Big(U \underbrace{\frac{\partial V}{\partial n}}_{=0} - V \underbrace{\frac{\partial U}{\partial n}}_{=\varphi(P)}\Big)\, dS$$

$V \equiv 1$

U - решение (1), (2)

$$\iint\limits_{\partial Q} \varphi(M)\, dS = 0 \qquad (3)$$

Если (3) не выполнено, задача Неймана не имеет решений

$$U(M) = \iint\limits_{\partial Q} \rho(P) \frac{1}{r_{MP}}\, dS \qquad (4)$$

$\Delta U = 0, \quad M \notin \partial Q$

Подберем $\rho(P)$ так, чтобы выполнялось граничное условие (2)

2.1. $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in \partial Q}} \frac{\partial U}{\partial n} = \varphi(M_0)$

$M_0 \in \partial Q$, n - нормаль в т. M_0

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial n}_{внутр} = \lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in Q}} \frac{\partial U}{\partial n}$$

2.2. $\frac{\partial U(M_0)}{\partial n}_{внутр} = \varphi(M_0), \quad M_0 \in \partial Q$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial n}_{внутр} = \frac{\partial U(M_0)}{\partial n} + 2\pi \rho(M_0), \quad M_0 \in \partial Q \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n} + 2\pi\rho(M_0) = \varphi(M_0)$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n} = \iint\limits_{\partial Q} \rho(P)\cdot\frac{\cos(\vec{r}_{M_0P}, \vec{n}_{M_0})}{r^2_{M_0P}}\, dS$$

получаем интеграл уравнение

$$\rho(M) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\partial Q} \rho(P)\frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r^2_{MP}}\, dS_P = \frac{\varphi(M)}{2\pi} \quad (6)$$

$$K_1(M,P) = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r^2_{MP}}$$

$$\rho(M) + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\partial Q} \rho(P)\frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r^2_{MP}}\, dS_P = 0 \quad (7)$$

указать, что решение трив. невозможно, ~~ли~~ есть нетрив. решение

Кол-во лин. незав. решений у однородн. ур-ния и сопряж. ур-ния одинаково (2 теорема Фредгольма)

$$K_2(M,P) = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)}{r^2_{MP}} = -K(M,P)$$

$\vec{n}_P$ – внешняя нормаль

$K(M,P)$ – ядро задачи Дирихле нормаль внутр.

$$v(M) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\partial Q} v(P)\frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r^2_{MP}}\, dS_P \quad (8)$$

Покажем, что (8) имеет решение тожд const, в том числе ненулевую

$$\iint\limits_{\partial Q} (v(M) - v(P)) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} dS_P = 0$$

$$\max_{P \in \partial Q} |v(P)| = |v(M^*)|$$

$$\iint\limits_{\partial Q} \underbrace{(v(M^*) - v(P))}_{\text{тождеств. ноль}} \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} = 0$$

$$v(M^*) - v(P) \equiv 0$$

$$v(P) \equiv v(M^*)$$

$v(P)$ – есть тождеств. const

тогда ур-ние (7) имеет тоже нетрив. решение – $\rho_0 = \rho_0(M)$

Если $\rho_0(M)$ подставляем в (4)

$$V(M) = \iint\limits_{\partial Q} \rho_0(M) \frac{1}{r_{MP}} dS_P \quad (9)$$

решение однородного ур-ния

Выпишем задачу для (9)

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\partial Q} = 0 \end{cases} \qquad V \equiv \text{const}$$

можно показать, что др. решений нет

$\rho_0(M)$ – можно выбрать так, что

$$V(M) \equiv 1, \; M \in Q \quad (10)$$

Возвращ. к интегр. ур-нию (6) и используем третью теорему Фредгольма

$$\iint\limits_{\partial Q} \frac{\varphi(M)}{2\pi} \, \text{const} \, dS_M = 0$$

$$\iint \varphi(M) dS_M = 0 \quad \text{условие (3)}$$

предполаг., что оно выполнено

Если (3) выполнено, то (6) разрешимо

$$\rho(M) = \rho_{част}(M) + C\rho_0(M)$$

Подст. в (4)

$$U(M) = \iint\limits_{\partial Q} \rho_{част} \frac{1}{r_{MP}}\, dS + C \underbrace{\iint\limits_{\partial Q} \rho_0(P) \frac{1}{r_{MP}}\, dS_P}_{=1,\ M \in Q}$$

решение определяется до постоян. величины

Внешняя задача Неймана

$$\Delta U = 0, \quad M \notin \overline{Q} \qquad (1)$$

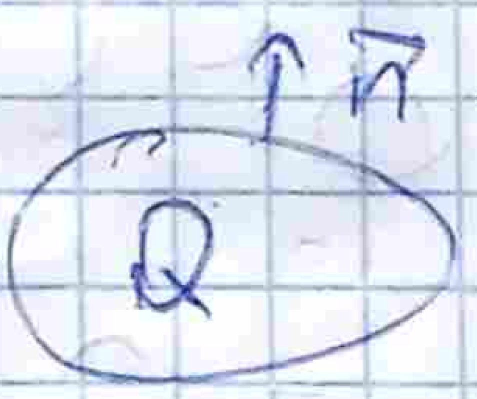
$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\partial Q} = \psi(M) \qquad (2)$$

$$\lim_{M \to \infty} U(M) = 0 \qquad (3)$$

(2) и (3) обеспеч. единств. задачи

n - внешняя по отношению к обл. Q

(договорились)



$$U(M) = \iint\limits_{\partial Q} \rho(P) \frac{1}{r_{MP}}\, dS_P \qquad (3)$$

1) $\Delta U = 0, \ M \notin \partial Q$

2) $U(M) \to 0, \ M \to \infty$

Остается подобрать $\rho(P)$, чтобы выполнялось (2)

2.1. $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \notin \overline{Q}}} \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} = \psi(M)$

$M_0 \in \partial Q$, $\vec{n}_{M_0}$ - внешняя нормаль к Q

2.2. $\dfrac{\partial U(M_0)}{\partial n_{нар}} = \varphi(M_0)$

Потенциал простого слоя терпит скачок при переходе через границу

$$\frac{\partial U}{\partial n_{нар.}}(M_0) = \frac{\partial U}{\partial n}(M_0) - 2\pi\rho(M_0)$$

$$\iint\limits_{\partial Q} \rho(P)\, \frac{\cos(\vec{r}_{M_0P}, \vec{n}_{M_0})}{r^2_{M_0P}} - 2\pi\rho(M_0) = \varphi(M_0)$$

$$\rho(M) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\partial Q} \rho(P)\, \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r^2_{MP}} = -\varphi(M)\cdot\frac{1}{2\pi}$$

$M \in \partial Q$

$$K_3(M,P) = -\frac{1}{2\pi}\, \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r^2_{MP}}$$

$$K_4(M,P) = K_3(P,M) = -\frac{1}{2\pi}\, \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r^2_{PM}} =$$

$= K(M,P)$ ядро задачи Дирихле

В задаче Дирихле однородное ур-ние имеет только трив. решение, тогда ур-ние соотв. (4) имеет также только трив. решение и по 1 теореме Фредгольма неоднородн. ур-ние разрешимо при любой правой части

Если найдем решение (4) и подставим в (3), то найдем решение

Внешняя задача Дирихле

$\Delta U = 0, \; M \in \overline{Q}$ (1)

$U|_{\partial Q} = \varphi(M)$ (2)

$U(M) \to 0, \; M \to \infty$ (3)

$$u(M) = \iint\limits_{\partial Q} \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} dS_P + \frac{\alpha}{r_{OM}} \quad (4)$$

потенц. двойного слоя

$\vec{n}_P$ – внутр. нормаль по отнош. к Q

без добав. д-ния $u \to 0$ быстрее, задано у

Не для $\forall \varphi(M)$ $\exists$ решение

$O \in Q \qquad u \to 0, M \to \infty$ как $\frac{\alpha}{r_{OM}}$

2.2. $u_{нар}(M_0) = \varphi(M_0)$, $M_0 \in \partial Q$

$$\iint\limits_{\partial Q} \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} dS - 2\pi \nu(M) + \frac{\alpha}{r_{OM}} = \varphi(M)$$

подстановка (4) в гранич. усл.

$$\nu(M) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\partial Q} \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} dS_P = \left(\frac{\alpha}{r_{OM}} - \varphi(M)\right)\frac{1}{2\pi}$$

$$K_5(M, P) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2}$$

$$K_6(M, P) = K_5(P, M) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r_{MP}^2}$$

$$u_{1\,нар}(M_0) = u_1(M_0) - 2\pi \nu(M_0)$$

$$u_1(M_0) - 2\pi \nu(M_0) + \frac{\alpha}{r_{M_0 O}} = \varphi(M_0), \quad M_0 \in Q$$

$M \to M_0$

$$\iint\limits_{\partial Q} \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_0)}{r_{MP}^2} dS_P - 2\pi \nu(M) + \frac{1}{r_{MO}} = \varphi(M)$$

$M \in \partial Q$

$$\nu(M) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\partial Q} \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_0)}{r_{MP}^2} dS_P = -\frac{1}{2\pi}\left(\varphi(M) - \frac{1}{r_{MO}}\right) \quad (5)$$

$$\nu(M) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\partial Q} \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} dS_P = 0$$

ур-ние решалось в задаче Неймана,

оно имеет нетрив. решение — тождеств. const

$$\rho(M) - \frac{1}{2\pi}\iint_{\partial Q} \rho(P) \cdot \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} dS_P = 0 \quad (7)$$

Союзные ур-ния (6) и (7) по II теореме Фредгольма имеют один. число лин незав. решений.

Пусть $\rho_0(M)$ - нетрив реш. ур-ния (7)

По III теореме Фредгольма неоднор. ур-ние имеет решение когда прав. часть ортогон. решению однор. задачи

$$\iint_{\partial Q} \left(\varphi(M) - \frac{\alpha}{r_{MP}}\right) \cdot \rho_0(M)\, dS_P = 0$$

Условие разрешим. ур-ния (5)

$$\iint_{\partial Q} \varphi(M)\rho_0(M) dS_P - \alpha \iint \frac{1}{r_{MP}} \rho_0(M) dS_P = 0 \quad (8)$$

$$\alpha = \frac{\iint_{\partial Q} \varphi(M)\rho_0(M) dS_P}{\iint_{\partial Q} \frac{1}{r_{MP}} \cdot \rho_0(M) dS_P}$$

Тогда решение ур-ния (5)

$$\nu(M) = C + \nu_{част}(M)$$

Подставл. $\nu(M)$ в (4)

$$u(M) = \underbrace{C\iint_{\partial Q} \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} dS_P}_{=0\ \text{интеграл Гаусса}} + \iint_{\partial Q} \nu_{част}(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} dS_P +$$

$$+ \frac{\alpha}{r_{MO}}, \quad M \in \overline{Q}$$

Внешняя задача Дирихле разрешима всегда