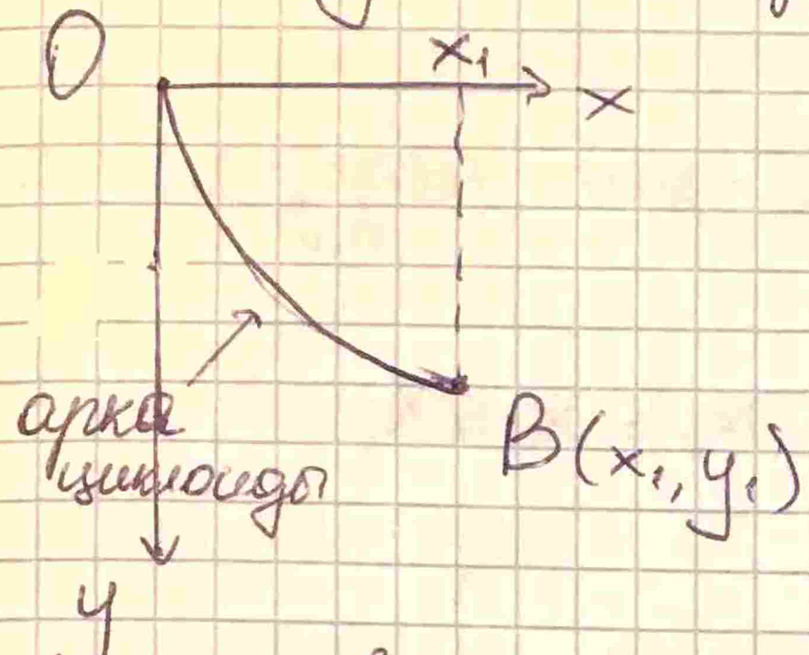
Вариационное исчисление

1696 г. Иоган Бернулли

Задача о брахистохроне



$y = y(x)$

$y(0) = 0$

$y(x_1) = y_1$

$$\frac{mv^2}{2} = mgy$$

$$v = \sqrt{2gy}$$

$$dl = \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

$$T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx \quad (0)$$

Если каждой ф-ции из некоторого мн-ва ставится в соответ. число, то говорят, что на этом мн-ве определен функционал.

Найти такую ф-цию $y(x)$, для которой функционал (0) с наим. числом

Простейший функционал вариационного исчисления

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))\,dx \quad (1)$$

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx$$

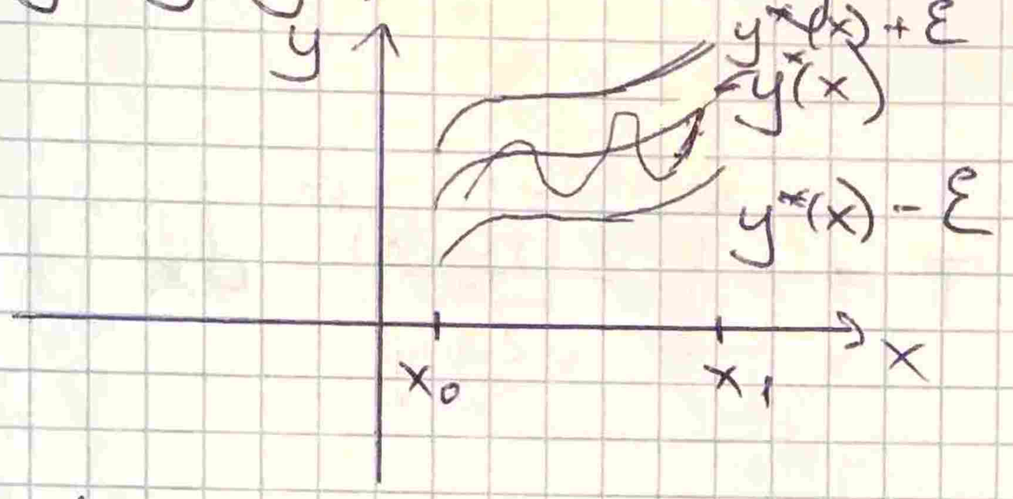
$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases} \quad (2)$$

Задача вар. исч. – найти такую ф-цию $y(x)$, удовлетв. (2) и дающ. функционалу 1 экстрем. значение

$y^*(x)$ доставляет интегралу (1) min, если $\exists$ окр. y^*, такая что для всех $y(x)$ из этой окрестности $I(y^*) < I(y)$

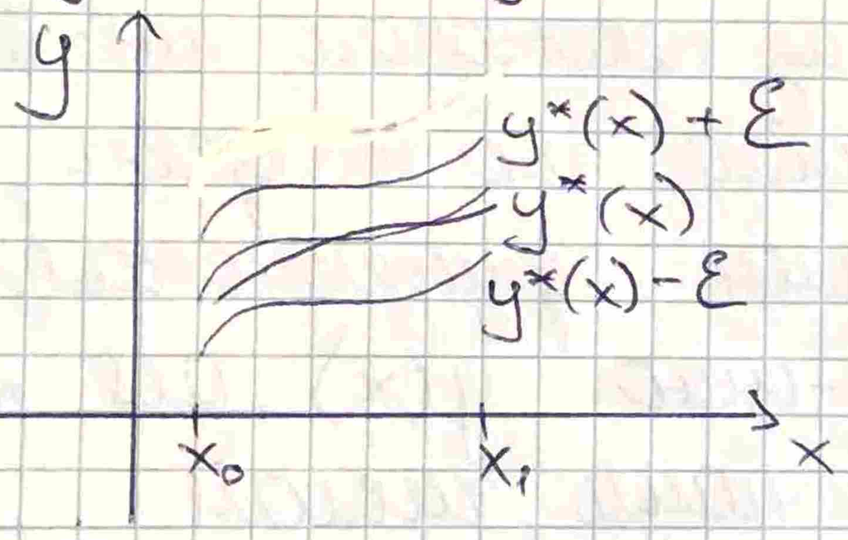
$C[x_0, x_1]$ – пространство ф-ций непрерывных на $[x_0, x]$

$$\rho(y, y^*) = \max |y(x) - y^*(x)|, \quad x_0 \le x \le x_1$$



$C^1[x_0, x_1]$ – пр-во ф-ций непрерывнодифф. на $[x_0, x_1]$

$$\rho(y, y^*) = \max |y(x) - y^*(x)| + \max |y'(x) - y^{*\prime}(x)|, \quad x_0 \le x \le$$



Допустимыми ф-циями для инт. (1) будем считать ф-ции $C^2[x_0, x_1]$, удовлетв. усл. (2)

Опред. вариацией ф-ционала

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x)$$

$\eta(x) \in C^2[x_0, x_1]$

$\eta(x_0) = 0$

$\eta(x_1) = 0$

$\tilde{y}(x) \in C^2[x_0, x_1]$

$\tilde{y}(x_0) = y_0$

$\tilde{y}(x_1) = y_1$

$$I(y+\varepsilon\eta) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\,dx = \varphi(\varepsilon) \quad (*)$$

Первая вариация функционала (1) наз-ся значение производной функционала по ε в т. $\varepsilon = 0$

$$\delta I(y) = \left.\frac{dI(y+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \varphi'(0) \quad (3)$$

Теорема (необходимое усл. сущ. экстремума)
Пусть при y^* задача (1), (2) достигает экстремум, тогда если $\exists\, \delta I(y^*)$, то $\delta I(y^*) = 0$ для любой $\eta \in C^2[x_0, x_1]$

$$\eta(x_0) = 0,\ \eta(x_1) = 0$$

Док-во

$I(y^*) \le I(y)$, пусть y^* доставляет min

$\varphi(0) \le \varphi(\varepsilon)$

Если $\varphi(\varepsilon)$ диф., то $\varphi'(0) = 0$

$\delta I(y^*) = 0$ следует из (3)

Вывод ур-ния Эйлера

y^* доставляет min

$$I(y^* + \varepsilon\eta) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

$$\delta I(y^*) = 0$$

$$\delta I(y^*) = \left.\frac{dI(y^*+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{dI(y^*+\varepsilon\eta)}{d\varepsilon}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right) dx \quad (=)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \frac{\partial f}{\partial y'} & du = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}dx \\ dv = \eta'(x)dx & v = \eta(x) \end{array}\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0} - \int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\eta(x)dx$$

$$\equiv \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)\eta(x)\,dx$$

$$\delta I(y^*) = \int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial f(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)\eta(x)\,dx = 0 \quad (4)$$

Лемма

Пусть

1) $\Psi(x) \in C^1[x_0, x_1]$

2) $\int_{x_0}^{x_1}\Psi(x)\eta(x)dx = 0$ для $\forall \eta \in C^2[x_0, x_1]$,

$\eta(x_0) = 0, \quad \eta(x_1) = 0$

Тогда $\Psi(x) \equiv 0 \quad , x \in [x_0, x_1]$

Возвращаясь к (4) из Леммы следует

$$\frac{\partial f(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(x,y^*,y^{*\prime})}{\partial y'}\right) = 0$$

$y^*(x)$ есть решение ур-ния

$$\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f(x,y,y')}{\partial y'}\right) = 0 \qquad \begin{matrix} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{matrix}$$

Все решения ур-ния Эйлера наз-ся экстремалями.

Получаем краевую задачу Эйлера

Лемма док-во

14.09.17

Пусть

1) $\psi(x) \in C^1[x_0, x_1]$

2) $\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\eta(x)dx = 0$ где $\forall \eta \in C^2[x_0, x_1]$

$\eta(x_0) = 0, \quad \eta(x_1) = 0$

Тогда $\psi(x) \equiv 0, \quad x \in [x_0, x_1]$

Предположим $\psi(x) \not\equiv 0, \quad x \in [x_0, x_1]$

Пусть $\psi(x^*) \neq 0 \quad x^* \in (x_0, x_1)$

Для конкретн. $\psi(x^*) > 0$

$\psi(x) \in C^1[x_0, x_1]$ то $\exists$ интервал

$\Delta = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ на котором $\psi(x) > 0$

Рассмотрим ф-цию $\eta(x)$

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \Delta \\ (x - x^* + \delta)^3 (x^* + \delta - x)^3, & x \in \Delta \end{cases}$$

$\eta(x) \in C^2[x_0, x_1]$

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)\eta(x)dx = \underbrace{\int_{x_0}^{x^*-\delta} \psi(x)\eta(x)dx}_{=0} + \int_{x^*-\delta}^{x^*+\delta} \psi(x)\eta(x)dx + \underbrace{\int_{x^*+\delta}^{x_1} \psi(x)\eta(x)dx}_{=0}$$

$$+ \int_{x^*-\delta}^{x^*+\delta} \psi(x)\eta(x)dx > 0$$

получим противоречие

Замечание

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx \quad (1)$$

$I(y) \longrightarrow$ extr на классе допустимых ф-ций

ф-ция $y = y(x)$ - допустима, если $y \in C^2[x_0, x_1]$
$y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$

Необходимое усл. $\exists$ extr. Если ф-ция y^* доставляет экстремум ф-ционалу (1) и y^* - допуст. ф-ция, то она является решением ур-ния Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad (2)$$

$$y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1 \quad (3)$$

Частные случаи ур-ния Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y'(x) + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} \cdot y''(x)\right) = 0$$

Ур-ние второго порядка линейное отн-но старшей производной - квазилинейное ур-ние второго порядка.

1) $F = F(x, y')$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

2) $F = F(y, y')$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} \cdot y''\right) = 0 \quad (4)$$

покажем, что (4) можно переписать

$$\frac{1}{y'}\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot y'' -$$

$$- y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} y''\right) =$$

$$= y'\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{(\partial y')^2} y''\right)}_{\text{ур-ние (4)}} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

ур-ние первого порядка

Обобщение простейшей вариационной задачи

1) Функционал, зависящ. от n ф-ций

$$I(y_1, \dots, y_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), \dots, y_k(x), y_k'(x), \dots, y_n'(x))\,dx$$

$$\vec{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$$

Допустимой вектор-ф-цией будем называть такую вектор-ф-цию, все компоненты которой $y_i(x) \in C^2[x_0, x_1]$ и удовл. усл.

$$y_i(x_0) = y_i^{(0)}, \quad y_i(x_1) = y_i^{(1)} \qquad i = \overline{1, n}$$

$$I(\vec{y}) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \vec{y}(x), \vec{y}'(x))\,dx \quad (1)$$

$I(\vec{y}) \to$ extr на допуст. ф-циях

Предположим, что задача имеет решение $\vec{y}^*(x)$ достав. extr ф-ц (1) на доп. ф-циях

$$\overline{I}\left(y_1^*, \dots, y_{i-1}^*, y_i, \dots, y_n^*\right) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1^*, \dots y_{i-1}^*, y_i, y_{i+1}^*, \dots y_n^*, y_1^{*\prime}, \dots y_{i-1}^{*\prime}, y_i^{\prime}, y_{i+1}^{*\prime}, \dots y_n^{*\prime}\right) dx$$

пример простейшей вариац. задачи

$y_i(x)$ должна быть решением ур-ния Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0$$

Если вектор-ф-ция $\vec{y}(x)$ доставляет ф-ну екстр ф-му (1) по ее компонентам удовл. с-ме ур-ний Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

2) Функционалы, зависящ. от производных высших порядков

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x))\, dx$$

Доп. ф-ция - это ф-ция $y(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$

удовл. усл. $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $y'(x_0) = y_0'$, $y'(x_1) = y_1'$ и т.д. (2)

Введем ф-цию $\eta(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$

удовл. усл. $\eta(x_0) = 0$, $\eta'(x_0) = 0$, $\dots$, $\eta^{(n-1)}(x_0) = 0$

$\eta(x_1) = 0$, $\eta'(x_1) = 0$, $\dots$, $\eta^{(n-1)}(x_1) = 0$

Тогда $y(x) + \varepsilon\eta(x)$ - допуст., если $y(x)$ - допуст

$$I(y+\varepsilon\eta) = \int_{x_0}^{x_1} (x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta', y''+\varepsilon\eta'', \dots, y^{(n)}+\varepsilon\eta^{(n)})\,dx = \varphi(\varepsilon) \quad (3)$$

$$\delta I(y) = \frac{d}{d\varepsilon} I(y+\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} \quad (4)$$

вариация ф-ла (1)

$$\delta I(y) = \varphi'(0)$$

Пусть y^* - допуст. ф-ция, доставл. extr ф-ну (1) и вариацию (4) $\exists$, тогда

$\delta I(y^*) = 0$ $\quad$ y^* доставл. max

$I(y^* + \varepsilon\eta) < I(y^*)$

$\varphi(\varepsilon) < \varphi(0)$ $\quad$ $\varphi(\varepsilon) \in C^1[x_0, x_1]$

$\varphi'(0) = 0$ $\quad$ $\varphi(\varepsilon)$ диффр. ф-ция

выполняется необходимое усл. существ. extr равенства производ.

Вывод ур-ния Эйлера-Пуассона

$$\delta I(y^*) = \frac{d}{dx} I(y^* + \varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta' + \dots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\cdot\eta^{(n)} \right) dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta'\,dx = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot\eta\,dx =$$

$$= -\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\cdot\eta\,dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y''}\cdot\eta''\,dx = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y''}\cdot\eta'\Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\cdot\eta'\,dx =$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta\Big|_{x_0}^{x_1} + \int \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\eta\,dx$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \eta^{(n)} dx = (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) \eta dx$$

$$\delta I(y^*) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)\right) \eta dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\delta I(y^*) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F(x, y^*, y^{*(n)})}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x, y^*, y^{*(n)})}{\partial y'}\right) + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F(x, y^*, y^{*(n)})}{\partial y^{(n)}}\right)\right] \eta dx = 0$$

Применяем основную лемму вариац. исчисления

$$\frac{\partial F(x, y^*, y^{*(n)})}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F(x, y^*, y^{*(n)})}{\partial y'}\right) +$$

$$+ (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F(x, y^*, y^{*(n)})}{\partial y^{(n)}}\right) = 0$$

y^* – решение ур-ния Эйлера-Пуассона

3) Задачи со свободными концами

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

Доп. ф-ции $y(x) \in C^2[x_0, x_1]$

$$\delta I = \frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0} \Leftrightarrow$$

$\forall \eta(x) \in C^2[x_0, x_1]$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta'\right) dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) \eta dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \Big|_{x_0}^{x_1}$$

$\delta I(y) = 0$, если ф-ция $y = y(x)$ доставляет экстремум

Пусть $\eta(x) \in C^2[x_0, x_1]$, $\eta(x_0) = 0$, $\eta(x_1) = 0$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta \, dx$$

$$\delta I(y) = \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1} \cdot \eta(x_1) - \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_0} \cdot \eta(x_0) = 0 \quad (v)$$

$\eta(x) \in C^2[x_0, x_1]$, $\eta(x_0) = 0$

$$\delta I(y) = \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1} \cdot \eta(x_1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1} = 0 \quad (1)$$

$$\delta I(y) = -\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_0} \eta(x_0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1} = 0 \quad (2)$$

Чтобы найти все подозрит. ф-ции нужно решить ур-ние Эйлера с условиями (1) и (2)

Функционалы для функций, зависящих от нескольких переменных

$u = u(x, y)$

$$I(u) = \iint_Q F(x, y, u, u_x', u_y') \, dx \, dy \quad (1)$$

$Q \subset \mathbb{R}^2$

допустимые ф-ции $u \in C^2(\bar{Q})$

∂Q - граница области Q

$u|_{\partial Q} = \varphi(x, y)$ (2)

$u(x,y) + \varepsilon\eta(x,y)$

$\eta(x,y)$ – $\forall$ ф-ция $C^2(\bar{Q})$, $\eta|_{\partial Q} = 0$ (3)

$$\delta I(u) = \frac{d}{d\varepsilon} I(u+\varepsilon\eta)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\delta I(u) = \frac{d}{d\varepsilon} \iint_Q F(x, y, u+\varepsilon\eta, u'_x + \varepsilon\eta'_x, u'_y + \varepsilon\eta'_y)\, dx\,dy =$$

$$= \iint_Q \left(\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\eta + \frac{\partial F}{\partial u'_x}\cdot\eta'_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y}\cdot\eta'_y\right) dx\,dy \Big|_{\varepsilon=0} \Leftarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial u'_x}\cdot\eta'_x + \frac{\partial F}{\partial u'_y}\cdot\eta'_y = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)\cdot\eta\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)\cdot\eta\right]$$

$$- \frac{\partial^2 F}{\partial u'_x\,\partial x}\eta - \frac{\partial^2 F}{\partial u'_y\,\partial y}\eta$$

$$\Leftarrow \iint_Q \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)\right)\eta\, dx\,dy +$$

$$+ \iint_Q \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)\cdot\eta\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)\cdot\eta\right]\right) dx\,dy$$

$$\iint_Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial Q} P\,dx + R\,dy$$

$$\iint_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right)\cdot\eta\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)\cdot\eta\right]\right] dx\,dy =$$

$$= \int_{\partial Q} \left(-\frac{\partial F}{\partial u'_y}\cdot\eta\,dx + \frac{\partial F}{\partial u'_x}\cdot\eta\,dy\right) = 0$$, т.к. η на границе равна нулю

$$\delta I(u) = \iint_Q \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right) \right.$$

$$\delta I(u) = \iint_Q \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u'_y}\right)\right) \eta \, dx dy =$$

$$= 0$$

Лемма

Пусть $\psi(x,y) \in C(\bar{Q})$

$$\iint_Q \psi(x,y)\,\eta(x,y)\,dx dy = 0$$

$\forall \eta \in C^2(\bar{Q})$ $\quad \eta|_{\partial Q} = 0$

Тогда $\psi(x,y) \equiv 0 \quad \forall (x,y) \in \bar{Q}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u'_x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u'_y}\right) = 0 \\ u|_{\partial Q} = \varphi(x,y) \end{cases}$$

уравнение Эйлера - Остроградского

ур-ние в частных производных

Примеры

1) принцип наименьшего действия

характер. обобщ. с-мой к-т

есть механич. с-ма точек $q_1, \dots, q_k$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_1, q_2, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k)\,dt$$

$L = E_к - E_п$ - ф-ция Лагранжа

S - интеграл действия

С-ма будет развиваться по экстремалям этого ф-онала S.

С-ма ур-ний Эйлера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_i} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$$

1. m, (x, y, z) — свободная точка массой m

$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

$$E_k = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2}$$

$$E_n = 0$$

$$L = E_k - E_n = E_k = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \; ; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \; ; \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{2m\dot{x}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{x}) = 0$$

$$\dot{x} = C_1$$

$$0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{2m\dot{y}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dot{y} = C_2$$

$$0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{2m\dot{z}}{2}\right) = 0 \Rightarrow \dot{z} = C_3$$

$$\begin{cases} x = C_1 t + \overline{C_1} \\ y = C_2 t + \overline{C_2} \\ z = C_3 t + \overline{C_3} \end{cases}$$

I З.-Н Ньютона

Свободное тело движется с постоянной скоростью

2. m_i, (x_i, y_i, z_i)

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)}{2}$$

$$E_n = U(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n)$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)}{2} - U$$

вытишем с-му Эйлера

$$\begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{2m_i\dot{x}_i}{2}\right) = 0 \\ -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{2m_i\dot{y}_i}{2}\right) = 0 \\ -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{2m_i\dot{z}_i}{2}\right) = 0 \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

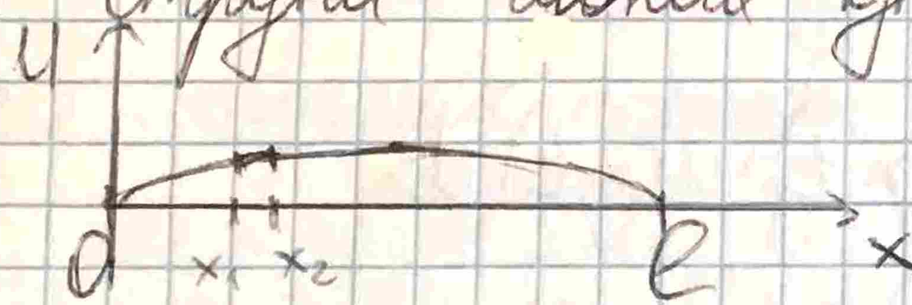
$$\begin{cases} m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_{xi} \\ m_i\ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i} = F_{yi} \\ m_i\ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i} = F_{zi} \end{cases}$$

II з-н Ньютона

Уравнения математической физики.

Уравнение колебаний струны

струна - гибкая упругая нить



$U = U(x,t)$ - отклонение от т. струны от положения равновесия.

все колебания проходят в одной плоскости

$\rho(x)$ - линейная плотность струны

$$E_к = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) U_t'^2 \, dx$$

будем рассматривать малые колебания струны

$|u'_x| \ll 1$

$|\vec{T}| = T_0 = const$ (при малых колебаний)

з-н Гука

$$dE_n^{(1)} = T_0(dl - dx)$$

$$dl = \sqrt{1 + u_x'^2}\, dx$$

$$\sqrt{1+u_x'^2} = 1 + \frac{1}{2}u_x'^2 - \frac{1}{4}u_x'^4 x^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2}u_x'^2$$

$$dl - dx = \left(1 + \frac{1}{2}u_x'^2\right)dx - dx = \frac{1}{2}u_x'^2\, dx$$

$$dE_n^{(1)} = T_0 \cdot \frac{1}{2}u_x'^2\, dx$$

$$E_n^{(1)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} T_0 \cdot u_x'^2\, dx$$

Будем считать есть поперечная нагрузка

$$A = \int_{x_1}^{x_2} p(x,t) \cdot u(x,t)\, dx$$

$$E_n^{(2)} = -\int_{x_1}^{x_2} p(x,t) \cdot u(x,t)\, dx$$

$$E_n = \frac{1}{2} T_0 \int_{x_1}^{x_2} u_x'^2\, dx - \int_{x_1}^{x_2} p(x,t)\, u(x,t)\, dx$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (E_k - E_n)\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}\rho u_t'^2 - \frac{1}{2} T_0 u_x'^2 + p(x,t) \cdot u\right) dx\, dt$$

ур-ние Эйлера-Остроградского

$$\rho(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\rho U_t'}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2T_0 U_x'}{2}\right) = 0$$

$$\rho(x,t) - \rho(x) U_{tt}'' + T_0 U_{xx}'' = 0$$

$$\rho(x) U_{tt}'' - T_0 U_{xx}'' = \rho(x,t)$$

$$\rho(x) = \rho_0$$

$$\rho_0 U_{tt}'' - T_0 U_{xx}'' = \rho(x,t) \quad | : \rho_0$$

$$U_{tt}'' - a^2 U_{xx}'' = \rho_1(x,t)$$

$$a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}, \qquad \rho_1(x,t) = \frac{\rho(x,t)}{\rho_0}$$

одномерное неоднородное ~~ур-ние~~ волновое ур-ние

ур-ние колебаний струны.

Классификация уравнений

$U = U(x,y)$ — г-го порядка в частн. произв.

Общий вид ур-ния $F(x,y,U,U_x,U_y,U_{xx},U_{xy},U_{yy}) = 0$

1. Квазилинейное уравнение - ур-ние линейное отно старших произв.

$$a(x,y,U,U_x,U_y)U_{xx} + b(x,y,U,U_x,U_y)U_{xy} + c(x,y,U,U_x,U_y)U_{yy} = f(x,y,U,U_x,U_y)$$

2. Линейное ур-ние - линейно отно самой ф-ции U и все ее производных

$$a(x,y)\cdot U_{xx} + 2b(x,y)U_{xy} + c(x,y)U_{yy} + d(x,y)U_x + e(x,y)U_y + h(x,y)U = f(x,y) \quad (1)$$

Ур-ние (1) наз-ся ур-нием гипербол. типа в т. (x_0,y_0), если $b^2(x_0,y_0) - a(x_0,y_0)c(x_0,y_0) > 0$

Параб. — // — $(b^2 - ac)\big|_{(x_0, y_0)} = 0$

Эллипт. — // — $(b^2 - ac)\big|_{(x_0, y_0)} < 0$

Примеры

1. $U = U(x, t)$

$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x, t)$ - одномерное волновое ур-ние

$a = -a^2$, $b = 0$, $c = 1$

$b^2 - ac = a^2 > 0$ ур-ние гиперб. типа

2. $U = U(x, t)$

$U_t - a^2 U_{xx} = f(x, t)$ - одномерное ур-ние теплопроводности

$a = -a^2$, $b = 0$, $c = 0$

$b^2 - ac = 0$ ур-ние парабол. типа

3. $U = U(x, t)$

$U_{xx} + U_{yy} = f(x, y)$ ур-ние Пуассона

$a = 1$, $b = 0$, $c = 1$

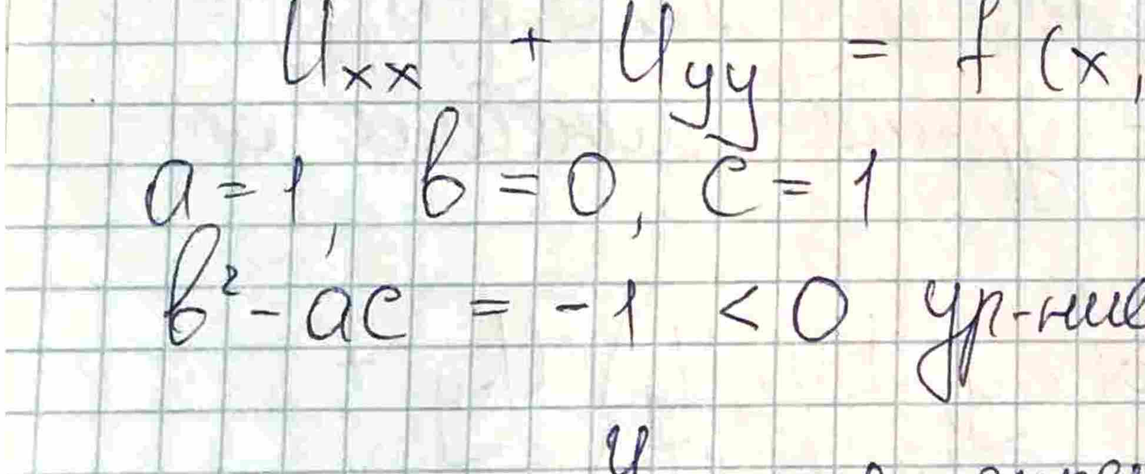
$b^2 - ac = -1 < 0$ ур-ние эллипт. типа

Ур-ния гиперболического типа

(волновое ур-ние)

Ур-ние колебания струны

Струна - упругая гибкая нить



рассматриваем только поперечные колебания

$u = u(x,t)$ отклонение т. от положения равновесия

$|u| \ll 1$

$|u_x| \ll 1$

$\rho(x)$ – плотность струны

$f(x,t)$ – плотность внешней силы

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt}\, dx = |\vec{T}(x_2)| \sin\alpha(x_2) - |\vec{T}(x_1)| \cdot \sin\alpha(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)\, dx \quad (=)$$

$|\vec{T}(x)| = T_0$ – з-н Гука (при малых колебаний)

$$\sin\alpha(x_2) = \frac{tg\alpha(x_2)}{\sqrt{1+tg^2(x_2)}} = \frac{u_x(x_2,t)}{\sqrt{1+u_x^2(x_2,t)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(x,t)}} = 1 - \frac{1}{2}u_x^2(x,t) + \dots$$

$$\sin\alpha(x_2) = \frac{u_x(x_2,t)}{1-\frac{1}{2}u_x^2(x_2,t)}$$

$$\sin\alpha(x_2) = u_x(x_2,t)\left(1-\frac{1}{2}u_x^2(x,t)+\dots\right) =$$

$$= u_x(x_2,t) - \frac{1}{2}u_x^3(x,t) + \bar{o}\left(u_x^3(x_2,t)\right) \approx$$

$$\approx u_x(x_2,t)$$

$$(=) \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt}\, dx = T_0 \cdot u_x(x_2,t) - T_0 \cdot u_x(x_1,t) + \int_{x_1}^{x_2} f(x,t)\, dx$$

$$u_x(x_2,t) - u_x(x_1,t) = \int_{x_1}^{x_2} u_{xx}(x,t)\, dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2} [\rho(x) U_{tt} - T_0 U_{xx}(x,t) - f(x,t)]\, dx = 0$$

промежуток $[x_1, x_2]$ произв., а подинтеграл. ф-ция непрерывна.

интеграл от непр. ф-ции по произв. промежутку равен нулю $\Leftrightarrow$ подинтегр. ф-ция равна нулю

$$\rho(x) U_{tt} - T_0 U_{xx}(x,t) - f(x,t) = 0$$

Если $\rho(x) = const = \rho_0$

$U_{tt} - a^2 U_{xx} = F(x,t)$, где $a^2 = \frac{T_0}{\rho_0}$, $F(x,t) = \frac{f(x,t)}{\rho_0}$

ур-ние колебаний струны

Постановка задач для волнового уравнения

1. Начально краевая задача (смешанная)

Найти решение ур-ния

$U_{tt} - a^2 U_{xx} = \underline{f(x,t)}$

в обл. $0 < x < \ell$, $t > 0$

удовлетв. нач. условиям

$U|_{t=0} = \varphi(x)$

$U_t|_{t=0} = \psi(x)$

и граничное условия

$(\underline{\alpha_1} U_x - \underline{\beta_1} U)|_{x=0} = \underline{\mu_1(t)}$ $\quad \alpha_1, \beta_1 > 0$

$\alpha_1 + \beta_1 > 0$

$(\underline{\alpha_1} U_x + \underline{\beta_1} U)|_{x=\ell} = \underline{\mu_2(t)}$ $\quad \alpha_1$ и β_1 одновремен. не равны нулю

все что подчеркнуто - это входное данное задачи

2. Начально-краевая задача для полуограничен. ~~краевой~~ струны

Найти решение ур-ния в области $x > 0$, $t > 0$, удовлетв. нач. условиям и граничным условиям.

$(\alpha_1 U_x - \beta_1 U)|_{x=0} = \mu_1(t)$

задача для полуогран. (бесконечн.) струны ← один конец уходит в

3. Начальная задача

задача для неограничен. струны

$x_0 = -\infty$, $x_{конечн} = \infty$

найти решение ур-ния

$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x,t)$

в обл. $-\infty < x < \infty$, $t > 0$

удовл. нач. условиям

$U|_{t=0} = \varphi(x)$

$U_t|_{t=0} = \psi(x)$

t)

Типы граничных условий

1. Конец струны $x = 0$ жестко закреплен

$U(0,t) = 0$

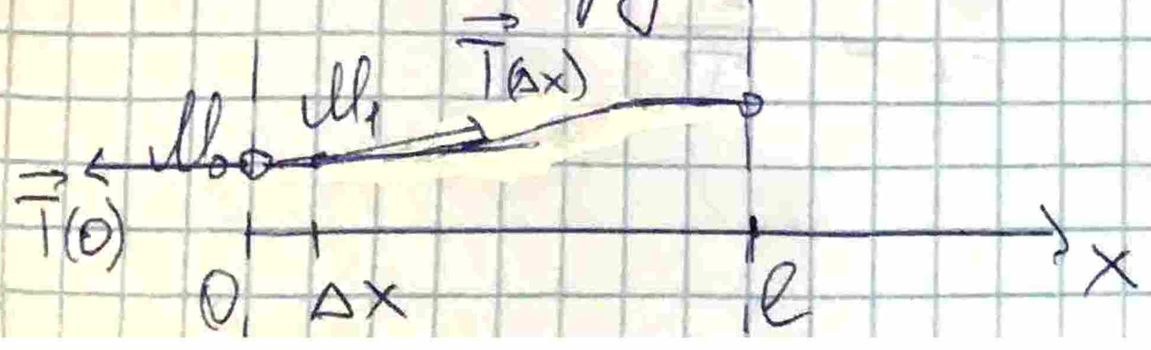
$U|_{x=0} = 0$

1.б Конец струны двигается по задан. з-ну

$U|_{x=0} = \mu_1(t)$

1., 1.б - граничные условия 1-го рода

2. Конец струны $x = 0$ свободен



Выведем ур-ние колебания свободного конца

$$\int_0^{\Delta x} \rho(x)\, u_{tt}\, dx = T_0 \cdot \overbrace{\sin\alpha(\Delta x)}^{\approx u_x(\Delta x, t)} + \int_0^{\Delta x} f(x,t)\, dx$$

$$\Delta x \to 0$$

$$0 = T_0 \cdot u_x(0,t) + 0$$

$$u_x(0,t) = 0$$

$$u_x\Big|_{x=0} = 0$$

2.б На конец $x=0$ действует заданная сила $g(t)$

$$\int_0^{\Delta x} \rho(x)\, u_{tt}\, dx = T_0 \cdot \widetilde{\sin\alpha(\Delta x)}^{u_x(\Delta x, t)} + \int_0^{\Delta x} (f(x,t) + g(t))\, dx$$

$$0 = T_0\, u_x(0,t) + g(t)$$

$$u_x(0,t) = -\frac{g(t)}{T_0} = \mu_1(t)$$

$$u_x\Big|_{x=0} = \mu_1(t)$$

условия 2, 2.б - граничн. усл. второго рода

3. Конец $x=0$ упруго закреплен

значит со стороны заделки действует сила пропорц. смещению и направлен. в сторону противополож. смещению

$$\int_0^{\Delta x} \rho(x)\, u_{tt}\, dx = T_0 \cdot \widetilde{\sin\alpha(\Delta x)}^{u(\Delta x, t)} + \int_0^{\Delta x} (f(x,t) - k u(0,t))\, dx$$

$$0 = T_0 \cdot u_x(0,t) - k u(0,t)$$

$$\left(u_x - h_1 u\right)\Big|_{x=0} = 0 \qquad h_1 = \frac{k}{T_0}$$

3.б. Конец упруго закреплен и действует задан. сила

$$0 = T_0 \cdot U_x(0,t) + g(t) - kU(0,t)$$

чтобы поменять концы местами нужно сделать замену

$$\xi = \ell - x$$

$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x = U_\xi (-1)$$

Задача о свободных колебаниях неогранич. струны

Формула Даламбера

Нач. задача

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad (1)$$

в области $-\infty < x < \infty \quad t > 0$

если в нач. момент времени - известны профиль струны $U|_{t=0} = \varphi(x)$ (2) и max скорость всех точек $U_t|_{t=0} = \psi(x)$ (3)

$$\begin{cases} x - at = C_1 \\ x + at = C_2 \end{cases}$$ характеристики

$$\xi = x - at$$

$$\eta = x + at$$

$$U(x,t) = V(\xi, \eta) = V(x-at, x+at)$$

$$U_t = V_\xi \cdot \xi_t + V_\eta \cdot \eta_t = V_\xi \cdot (-a) + V_\eta \cdot (a)$$

$$U_{tt} = -a(V_{\xi\xi} \cdot \xi_t + V_{\xi\eta} \cdot \eta_t) + a(V_{\eta\xi} \xi_t + V_{\eta\eta} \eta_t) =$$

$$= -a\left(V_{\xi\xi}(-a) + V_{\xi\eta}\cdot a\right) + a\left(V_{\eta\xi}(-a) + V_{\eta\eta}\,a\right) =$$

$$= a^2 V_{\xi\xi} - 2a^2 V_{\xi\eta} + a^2 V_{\eta\eta}$$

$$U_{xx} = V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}$$

$$a^2 V_{\xi\xi} - 2a^2 V_{\xi\eta} + a^2 V_{\eta\eta} - a^2 V_{\xi\xi} + 2a^2 V_{\xi\eta} - a^2 V_{\eta\eta}$$

$$-4a^2 V_{\xi\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_{\xi\eta} = 0$$

$$V_\xi = W$$

$$V_{\xi\eta} = W_\eta \qquad W_\eta = 0 \quad (4)$$

$$\frac{dW}{d\eta} = 0$$

ур-ние (4) можно интегрировать при фиксированном ξ при этом постоянная - есть ф-ция от ξ

$$W = C_1(\xi)$$

$$V_\xi = C_1(\xi)$$

$$\left.\frac{dV}{d\xi}\right|_{\eta\text{-const}} = C_1(\xi)$$

$$V = \underbrace{\int C_1(\xi)\,d\xi}_{f(\xi)} + \underbrace{C_2(\eta)}_{g(\eta)}$$

интеграл от произв. ф-ции есть произвольная ф-ция

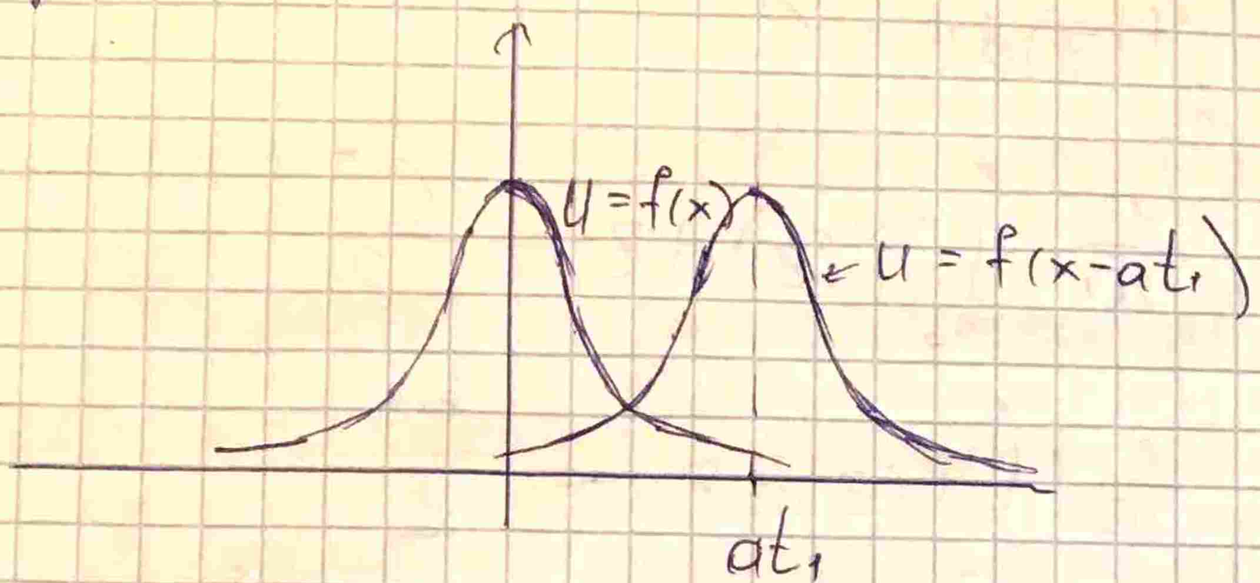
$$V = f(\xi) + g(\eta)$$

$$U = f(x-at) + g(x+at) \quad (5)$$

$U = f(x-at)$ - прямая волна

f - форма волны

Пример



это ф-ция описывает волну, которая не изменяя своей формы, а смещается вдоль оси x со скоростью a.
положит. направ.

$u = g(x+at)$ – обратная волна

не изменяя своей формы, распростр. в отриц. направлении оси x со скоростью a

ф-ла (5) общее решение – это есть суперпозиция прямой обратной волны

$$u_t = f'(x-at)\cdot(-a) + g'(x+at)\cdot a$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ u_t'|_{t=0} = -af'(x) + ag'(x) = \psi(x) \end{cases}$$

с-ма ур-ний для опред. ф-ций f и g

$$-f'(x) + g'(x) = \frac{1}{a}\psi(x)$$

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx + C^* = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)\,dz + C^*$$

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$ – ф-ция верхнего предела если изменяется аргумент, то изменяется только верхний предел.

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x) \\ -f(x) + g(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz + C^* \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz + \frac{C^*}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(z)dz - \frac{C^*}{2}$$

$$g(x+at) = \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\psi(z)dz + \frac{C^*}{2}$$

$$f(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\psi(z)dz - \frac{C^*}{2}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-at) + \varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \quad (6)$$

ф-ла Даламбера

если решение $\exists$, то оно имеет вид (6)

Определение

Классическим решением задачи (1), (2), (3) называют ф-цию из класса $C^2(t>0,\ x\in\mathbb{R}) \cap C^1(t\geq 0)$, удовлетворяющ. ур-нию (1) и условиям (2), (3)

Теорема 1

Пусть $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$, тогда $\exists$ классич. решение задачи (1)-(3) и это решение - это ф-ла Даламбера

Док-во

подстановкой ф-лы (6) в (1)-(3)

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,z)\,dz$$

$$F'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x,z)}{\partial x}dz + f(x,\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$

$$u_t' = \frac{1}{2}\left(\varphi'(x-at)(-a) + \varphi'(x+at)a\right) +$$

$$+ \frac{1}{2a}\left(\psi(x+at)\cdot a - \psi(x-at)\cdot(-a)\right)$$

Теорема единственности

Если классическое решение ∃, то оно одно

Теорема о непрерывн. зависимости решений от нач. ф-ций

Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ решения однородного волнового ур-ния

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

удовл. различным нач. условиям

$$u^{(i)}|_{t=0} = \varphi_i(x)$$

$$u_t^{(i)}|_{t=0} = \psi_i(x) \qquad i = 1,2$$

То $\forall \varepsilon > 0$ и $T > 0$ $\exists \delta(\varepsilon, T)$, что если

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \delta, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \le \delta, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$|u^{(1)}(x,t) - u^{(2)}(x,t)| \le \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \le t \le T$$

Док-во

$$V = u^{(1)} - u^{(2)}$$

сформулируем нач. задачу для ф-ции V

$$V_{tt} - a^2 V_{xx} = 0$$

$$V|_{t=0} = u^{(1)}|_{t=0} - u^{(2)}|_{t=0} = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

$$V_t|_{t=0} = u_t^{(1)}|_{t=0} - u_t^{(2)}|_{t=0} = \psi_1(x) - \psi_2(x)$$

$$V(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x-at) + \varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)\right) +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(\psi_1(z)-\psi_2(z))\,dz$$

$$|V(x,t)| \le \frac{1}{2}\left(|\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)|+|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)|\right)+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi_1(z)-\psi_2(z)|\,dz \le$$

$$\le \frac{1}{2}(\delta+\delta)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\delta\,dz =$$

$$=\delta+\frac{1}{2a}\delta\cdot 2at \le \delta+\delta T=\varepsilon$$

$$\delta=\frac{\varepsilon}{1+T}$$

Понятие корректно поставл. задачи

Задача матфизики наз-ся корректно поставленной, если

1) решение задачи $\exists$ в некотором классе ф-ций
2) решение единственно в некотором классе ф-ций
3) решение задачи непрерывно зависит от входных данных

Адамар

1) и 2) - математ. определенность задачи
3) - физическая определен. задачи

Понятие области зависимости, области определенности, области влияния

$$u(x_0,t_0)=\frac{1}{2}(\varphi(x_0-at_0)+\varphi(x_0+at_0))+$$

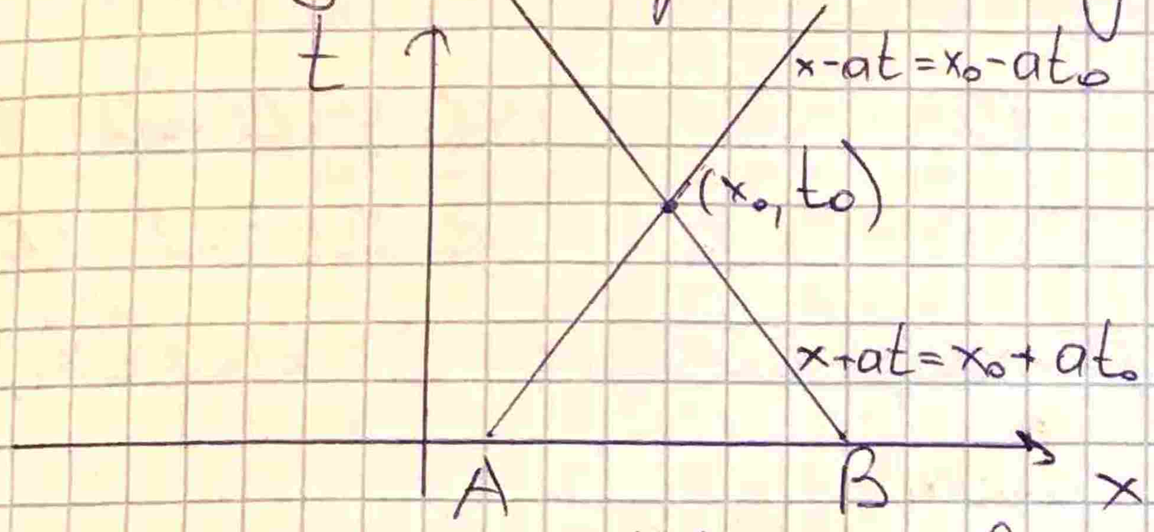
$$+\frac{1}{2a}\int_{x_0-at_0}^{x_0+at_0}\psi(z)\,dz$$

если ф-ции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ известны на $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$, то мы найдем решение в т. (x_0, t_0)

этот отрезок - область зависимости решения в т. (x_0, t_0) в зависим. от нач. данных.

Построение обл. зав.

Обл. зав. строится для точки



базовая полуплоскость

через т. (x_0, t_0) проведем характеристики волновых ур-ний

$$\begin{cases} x - at = C_1 \\ x + at = C_2 \end{cases}$$

$$x_0 - at_0 = C_1 \Rightarrow x - at = x_0 - at_0$$

$$x_0 + at_0 = C_2 \Rightarrow x + at = x_0 + at_0$$

$$A: \begin{cases} x - at = x_0 - at_0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$A(x_0 - at_0, 0)$$

$$B: \begin{cases} x + at = x_0 + at_0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$B(x_0 + at_0, 0)$$

для того, чтобы построить обл. зав. через дан. точку нужно провести характер. и найти т. пересечения с осью x.

Область определенности (для отрезка)

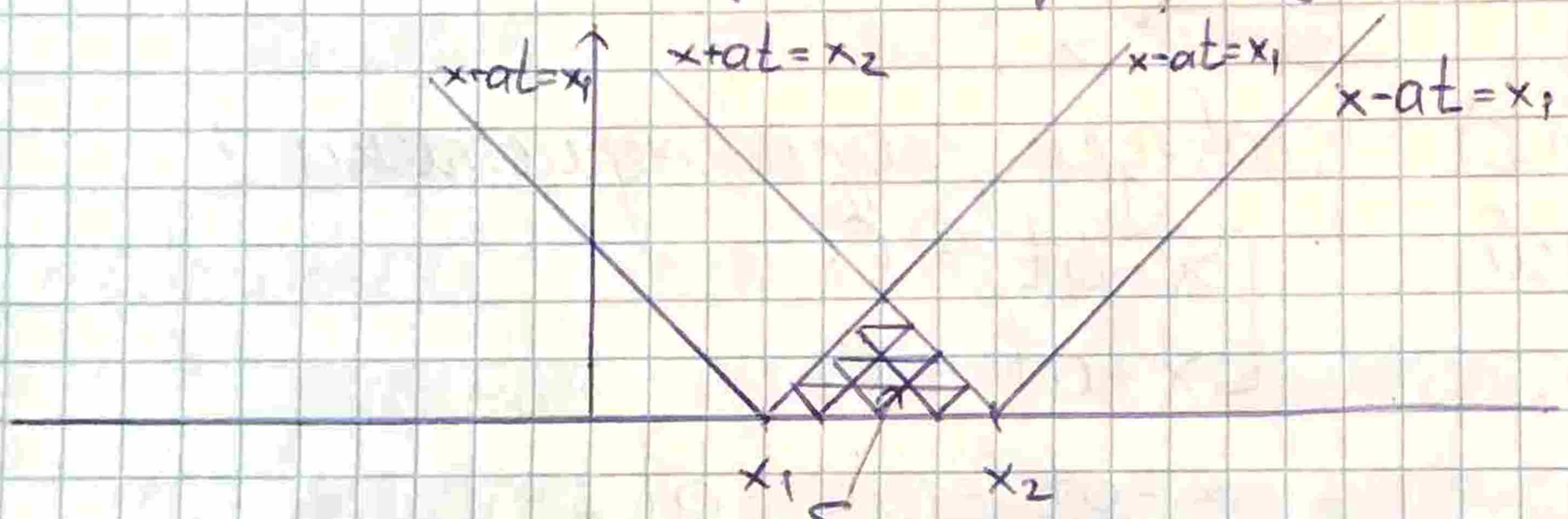
$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0$

$U|_{t=0} = \varphi(x)$, $x \in [x_1, x_2]$

$U_t|_{t=0} = \psi(x)$, $x \in [x_1, x_2]$

max область, в которой решение этой задачи единственно - обл. опред. отрезка $[x_1, x_2]$

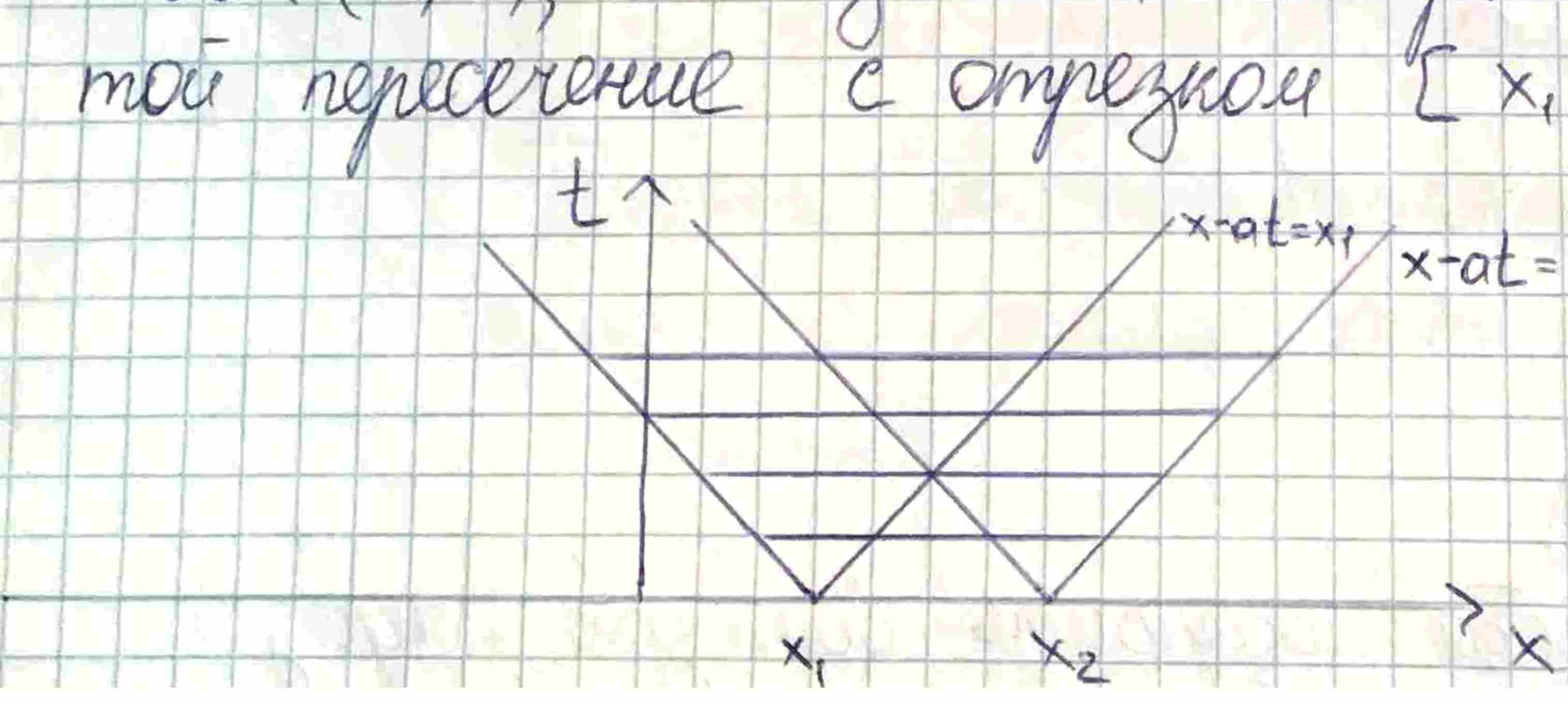
Обл. опред. $[x_1, x_2]$ наз-ся множество точек фазовой полуплоскости (x, t), области зависимости которых принадлежат отрезку $[x_1, x_2]$



обл. определенности

в ∀ точке обл. опред. решение определяется ф-той Даламбера

Область влияния отрезка $[x_1, x_2]$ - это мн-во точек (x, t), обл. зависим. которых имеют непустой пересечение с отрезком $[x_1, x_2]$



Решение неоднородного волнового уравнения с нулевыми нач. условиями

(1) $U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x,t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$

(2) $U|_{t=0} = 0$

(3) $U_t|_{t=0} = 0$

Составим вспомогат. задачу

(4) $v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0$, $-\infty < x < \infty$, $t > t'$

(5) $v|_{t=t'} = 0$

(6) $v_t|_{t=t'} = f(x,t')$

Если решение задачи (4), (5), (6) известно, то решение (1), (2), (3) опред. след. ф-лой

$$U(x,t) = \int_0^t v(x,t,t')\,dt'$$

$$U_t = \underbrace{v|_{t'=t}}_{\text{следует из (5)}} + \int_0^t dt'\, v_t$$

$$U_{tt} = \underbrace{v_t|_{t'=t}}_{f(x,t)} + \int_0^t dt'\, v_{tt}$$

$$U_{xx} = \int_0^t dt'\, v_{xx}$$

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x,t) + \int_0^t \underbrace{(v_{tt} - a^2 v_{xx})}_{0}\,dt' = f(x,t)$$

$t - t' = t''$

$v_t = v_{t''}$

$v_{tt} = v_{t''t''}$

$v_{t''t''} - a^2 v_{xx} = 0$

$v|_{t''=0} = 0$

$v_{t''}|_{t''=0} = f(x, t')$

$$v = \frac{1}{2a} \int_{x-at''}^{x+at''} f(z, t')\,dz = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(z, t')\,dz$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t dt' \int_{x-a(t-t')}^{x-a(t-t')} f(z, t')\,dz}$$ ф-ла Даламбера

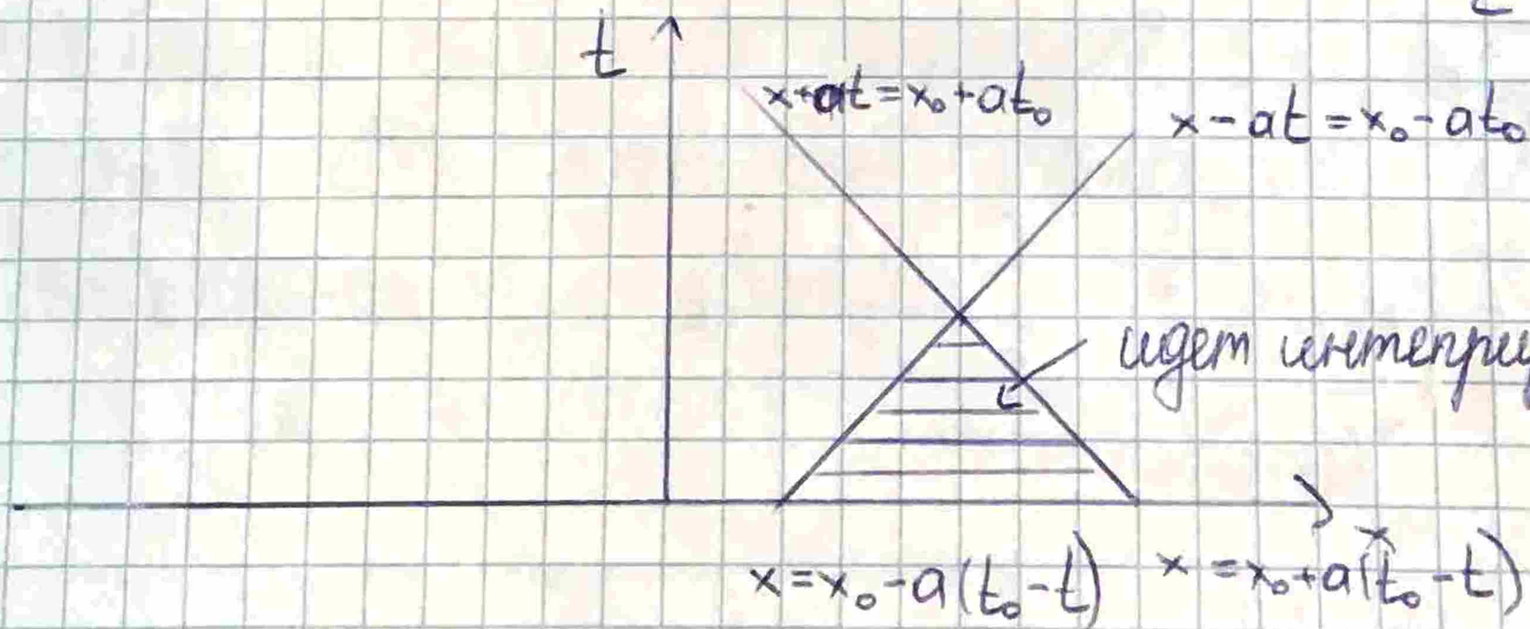
обл. зависимости решения в т. (x_0, t_0) от правой части $f(x,t)$

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2a} \int_0^{t_0} dt \int_{x_0-a(t_0-t)}^{x_0-a(t_0-t)} f(x, t)\,dx \Leftarrow$$

переобозначим

$t' = t$

$z = x$



$$\Leftarrow \frac{1}{2a} \iint_{\Delta(x_0,t_0)} f(x,t)\,dx\,dt$$

$\Delta(x_0, t_0)$ - характер. треугольник = обл. зависимости решения от правой части

Решение неоднородного волнового ур-ния с ненулев. нач. усл.

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = f(x,t)$$
$$U|_{t=0} = \varphi(x)$$
$$U|_{t=0} = \psi(x)$$

Решение представ. в виде суммы

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}$$

$$U^{(1)}_{tt} - a^2 U^{(1)}_{xx} = 0$$
$$U^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x)$$
$$U^{(1)}|_{t=0} = \psi(x)$$

$$U^{(2)}_{tt} - a^2 U^{(2)}_{xx} = f(x,t)$$
$$U^{(2)}|_{t=0} = 0$$
$$U^{(2)}_t|_{t=0} = 0$$

Док-во с помощью проверки

$$U(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t dt' \int_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(\xi,t')\,d\xi$$

ф-ла Даламбера

Начальная краевая задача для полуограниченной струны

(1) $U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0$, $x > 0$, $t > 0$

(2) $U|_{t=0} = \varphi(x)$

(3) $U|_{t=0} = \psi(x)$

(4) $(\alpha_1 U_x - \beta_1 U)|_{x=0} = \mu_1(t)$

Рассматриваем простейшая задача

(4) $U|_{x=0} = \mu(t)$

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}$$

$$u^{(1)}_{tt} - a^2 u^{(1)}_{xx} = 0$$

$$u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$u^{(1)}_t|_{t=0} = \psi(x)$$

$$u^{(1)}|_{x=0} = 0$$

$$u^{(2)}_{tt} - a^2 u^{(2)}_{xx} = f(x,t)$$

$$u^{(2)}|_{t=0} = 0$$

$$u^{(2)}_t|_{t=0} = 0$$

$$u^{(2)}|_{x=0} = 0$$

$$u^{(3)}_{tt} - a^2 u^{(3)}_{xx} = 0$$

$$u^{(3)}|_{t=0} = 0$$

$$u^{(3)}_t|_{t=0} = 0$$

$$u^{(3)}|_{x=0} = \mu(t)$$

задача сводится к более простым задачам

Свободные колебания полуограниченной струны с жестко закрепленным концом

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, \ t > 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

$$u|_{x=0} = 0$$

Метод продолжений

Лемма

Пусть нач. задача

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0$$

$$v|_{t=0} = \Phi(x)$$

$$v_t|_{t=0} = F(x)$$

нач. ф-ции $\Phi(x)$ и $F(x)$ явл. ф-циями нечетными отн-но т. $x=0$, тогда $v|_{x=0} = 0$ при всех $t \geq 0$

Док-во

следует из ф-ла Даламбера

$$v(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)$$

$$v(0,t) = \frac{1}{2}(\underbrace{\varphi(-at) + \varphi(at)}_{=0}) + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \underbrace{F(z)}_{=0} dz$$

Сформулируем вспомогат. задачу

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

$$v|_{t=0} = v|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} \psi(x) , & x > 0 \\ -\psi(-x) , & x < 0 \end{cases}$$

$$v_t|_{t=0} = F(x) = \begin{cases} \Psi(x) , & x > 0 \\ -\Psi(-x) , & x < 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = v(x,t) \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad t \geq 0$$

по лемме $v|_{x=0} = 0$

решение вспомогат. задачи удовлетв. усл. (1)-(4)

для решения такими методом нужно док-во единствен. решения

$$(5)\ u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz$$

Преобразуем (5) через входные дан. (1)-(4)

$x > 0$, $t > 0 \Rightarrow x + at > 0$

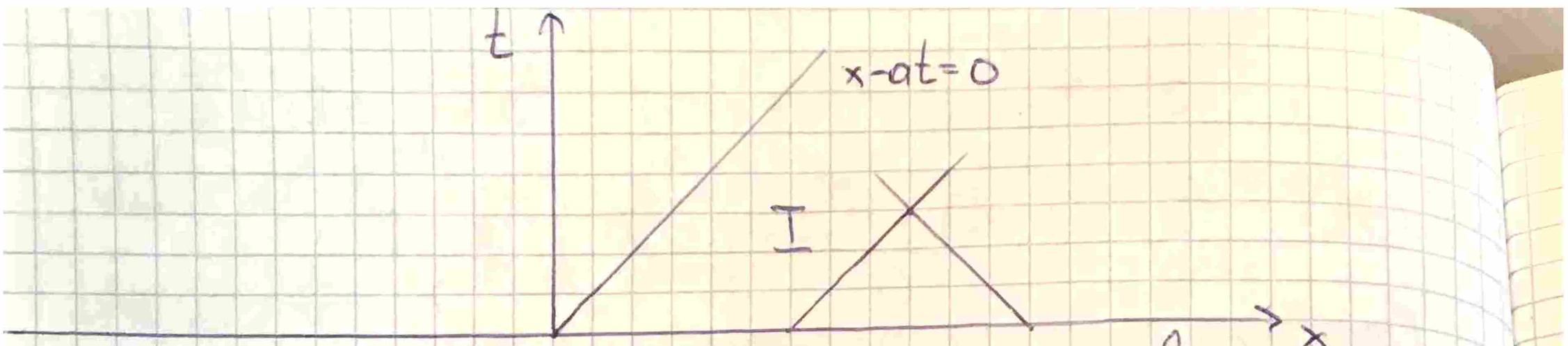
$\varphi(x+at) = \psi(x+at)$

1) $x - at > 0$

$\varphi(x-at) = \psi(x-at)$, $[x-at, x+at] \subset [0, \infty)$

$F(z) = \Psi(z)$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\psi(x-at) + \psi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(z)\,dz$$



граница в этой области не оказывает никакого влияния

2) $x-at<0$, $x>0$

$\varphi(x-at) = -\varphi(x-at)$ $\quad [x-at, 0] \subset (-\infty, 0]$

$$U(x,t) = \frac{1}{2}(-\varphi(at-x) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a}\left(\underbrace{\int_{x-at}^{at-x} F(z)dz}_{=0} + \underbrace{\int_{at-x}^{x+at} F(z)dz}_{=\Psi(z)}\right)$$

Лемма

Пусть в нач. задаче

$v_{tt} - a^2 v_{xx} = F(x)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$

правая часть ур-ния $F(x,t)$ | ф-ция нечетная от-но $x=0$ при каждом фиксир. $t>0$ тогда

$v|_{x=0} = 0$

$$v(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t dt' \int_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} F(z,t')\,dz$$

$$v|_{x=0} = \frac{1}{2a}\int_0^t dt' \underbrace{\int_{-a(t-t')}^{a(t-t')} F(z,t')\,dz}_{=0} = 0$$

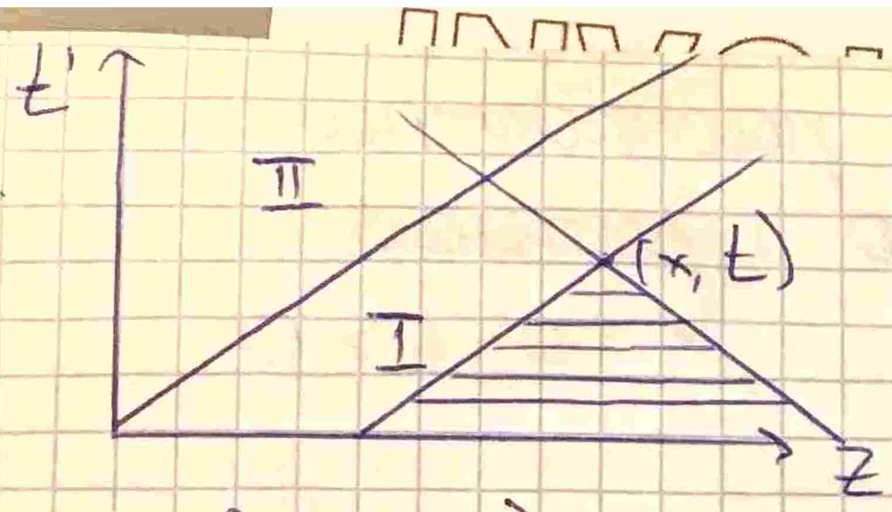
Распишем решение задачи через ф-цию $f(x,t)$

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x>0$, $t>0$

$u|_{t=0}$

$u_t|_{t=0}$

$u|_{x=0} = 0$



$(x,t) \in I$

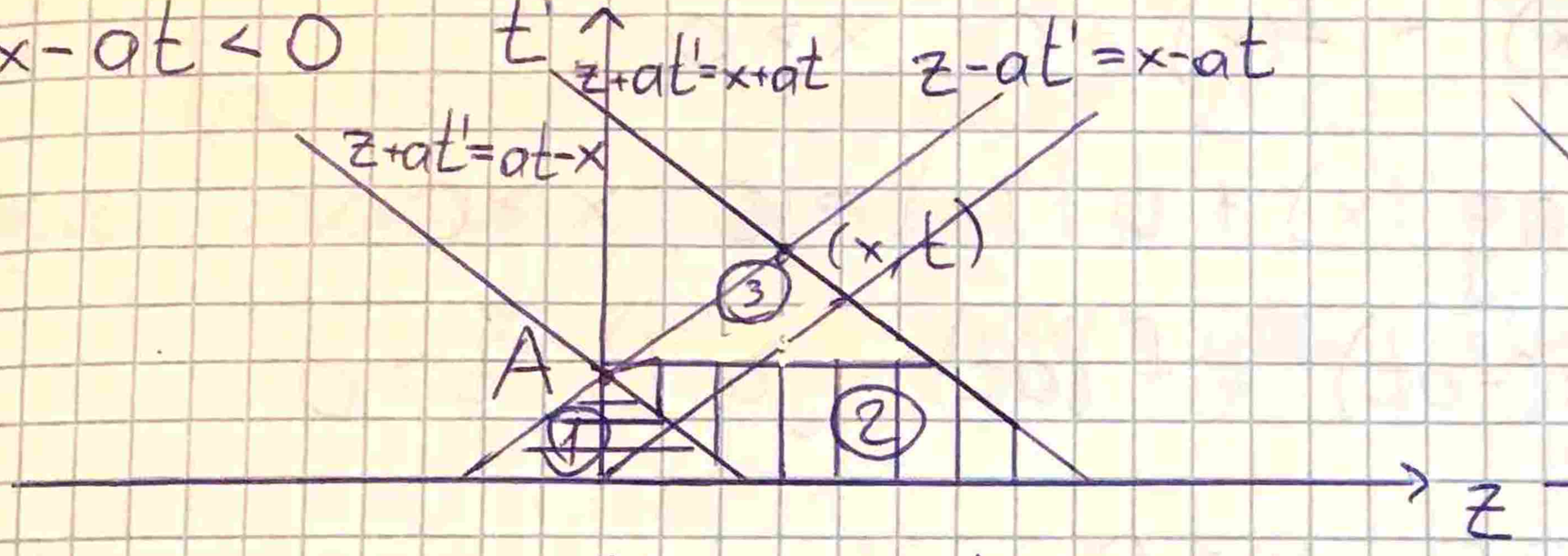
$x - at > 0$

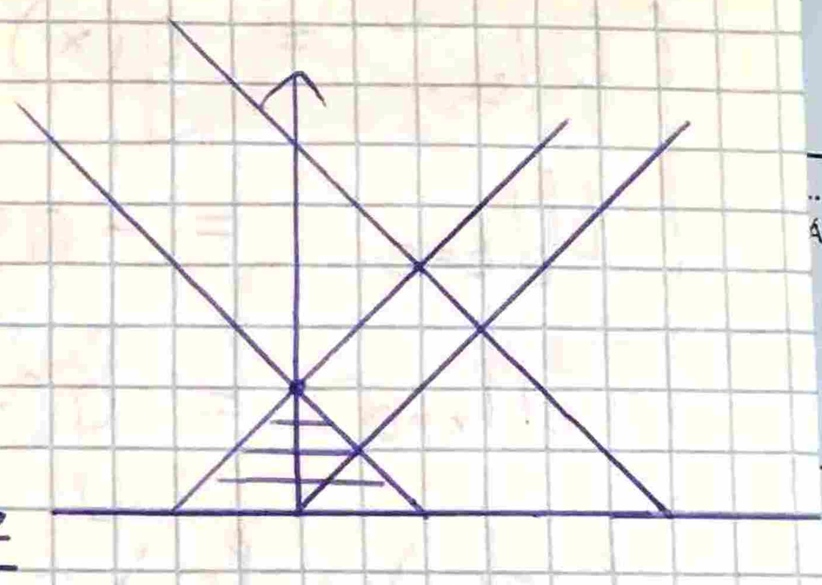
$$F(z,t') = f(z,t')$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t dt' \int_{x-a(t'-t)}^{x+a(t'-t)} F(z,t')\,dz$$

$(x,t) \in I$

$x - at < 0$





A: $z - at' = x - at$

$z = 0$

$t' = t - \frac{x}{a}$

через A проводим характеристику

$z + at' = at - x$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \underbrace{\iint_{①} F(z,t')\,dz\,dt'}_{=0} + \frac{1}{2a} \underbrace{\iint_{②} F(z,t')\,dz\,dt'}_{f(z,t')} +$$

$$+ \frac{1}{2a} \underbrace{\iint_{③} F(z,t')\,dz\,dt'}_{f(z,t')} =$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^{t-\frac{x}{a}} dt' \int_{-x+a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(z,t')\,dt' + \frac{1}{2a} \int_{t-\frac{x}{a}}^{t} dt' \int_{x-a(t-t')}^{x+a(t-t')} f(z,t')\,dt'$$

Задача о распространении краевого решения

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \quad , x > 0,\ t > 0$$

$$U|_{t=0} = 0$$

$$U_t|_{t=0} = 0$$

$$U|_{x=0} = \mu(t)$$

$$U = g(x - at) + f(x + at)$$

$$\begin{cases} U|_{t=0} = g(x) + f(x) = 0, & x > 0 \\ U_t|_{t=0} = -ag'(x) + af'(x) = 0, & x > 0 \\ U|_{x=0} = g(-at) + f(at) = \mu(t), & t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(x) + f(x) = 0, & x > 0 \\ -g(x) + f(x) = C^*, & x > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{C^*}{2}, \quad x > 0$$

$$g(x) = -\frac{C^*}{2}, \quad x > 0$$

$$f(at) = \frac{C^*}{2}, \quad t > 0$$

$$g(-at) = \mu(t) - \frac{C^*}{2}, \quad t > 0$$

$$-at = z \qquad t = -\frac{z}{a}$$

$$g(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right) - \frac{C^*}{2}, \quad z < 0$$

1) $x - at > 0$

$$g(x - at) = -\frac{C^*}{2}$$

$$f(x + at) = \frac{C^*}{2}$$

$$U \equiv 0$$

2) $x-at<0$

$$g(x-at) = \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right) - \frac{c^*}{2}$$

$$f(x+at) = \frac{c^*}{2}$$

$$u = \mu\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

$$u = \begin{cases} 0, & x-at \geq 0 \\ \mu\left(t-\frac{x}{a}\right), & x-at<0 \end{cases}$$

При каких условиях ф-ция u является классическим решением.

Класс. решение диффр. два раза в I четверти

$\underline{\mu(t) \in C^2([0,\infty))}$

$u|_{x-at=-0} = u|_{x-at=+0}$

$\underline{\mu(0) = 0}$

$$u_t = \begin{cases} 0, & x-at>0 \\ \mu'\left(t-\frac{x}{a}\right), & x-at<0 \end{cases}$$

$u_t|_{x-at=-0} = u_t|_{x-at=+0}$

$\underline{\mu'(0) = 0}$

$\underline{\mu''(0) = 0}$ (если рассмотрим вторую произв.)

Если эти 4 усл. не выполняются, тогда класс. решения не существует

$$u|_{\substack{t=0\\x=0}} = 0$$

$$u|_{\substack{x=0\\t=0}} = \mu(0)$$

$\mu(0) = 0$ (условие согласования)

Задача о свободных колебаниях полуограниченной струны со свободным концом

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, \ t > 0$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

$$u_x|_{x=0} = 0$$

Лемма

Пусть в нач. задаче $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \ -\infty < x < \infty, \ t > 0$

$u|_{t=0} = F(x)$ нач. ф-ции $F(x)$, $\varphi(x)$ являются

$u_t|_{t=0} = \varphi(x)$ четными от-но $x = 0$, тогда

$u_x|_{x=0} = 0, \ t \geq 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(F(x-at) + F(x+at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi(z)\,dz$$

$$u'_x(x,t) = \frac{1}{2}(F'(x-at) + F'(x+at)) +$$

$$+ \frac{1}{2a}(\varphi(x+at) - \varphi(x-at))$$

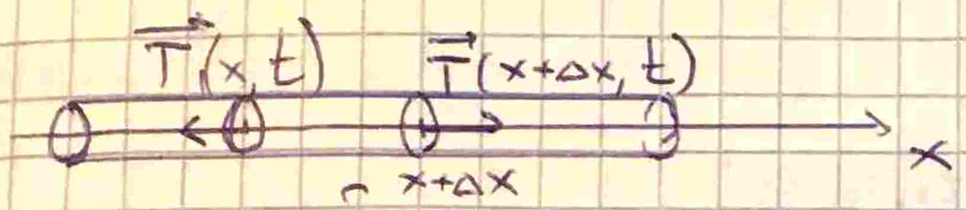
$$u'_x|_{x=0} = \frac{1}{2}(\underbrace{F'(-at) + F'(at)}_{=0}) + \frac{1}{2a}(\underbrace{\varphi(at) - \varphi(-at)}_{=0})$$

$F(-x) = F(x)$

$-F'(-x) = F'(x)$ ■

На основании этой леммы решение задачи сводится к решению нач. задачи, где ф-ции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ продолжаются четным образом на отрицательное направл. оси.

Вывод уравнения продольных колебаний стержня



тонкий стержень одинакового сечения

$U = U(x,t)$ отклонение сечения x в момент времени t

$x \to x + U(x,t)$

$x+\Delta x \longrightarrow x+\Delta x + U(x+\Delta x, t)$

$$\frac{x+\Delta x + U(x+\Delta x,t) - x - U(x,t) - \Delta x}{\Delta x} \equiv$$

~~длина в момент времени t~~

$x+\Delta x + U(x+\Delta x,t) - x - U(x,t)$ (длина в момент времени t)

$$\equiv \frac{U(x+\Delta x,t) - U(x,t)}{\Delta x} = U_x'(x + \xi^{x} \Delta x, t)$$

ф-ла Лагранжа

$\Delta x \to 0$

$U_x(x,t)$ – относительное удлинение сечения x

$T(x,t) = E(x) S U_x(x,t)$ $E(x)$ модуль Юнга

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(x) \cdot S U_{tt}\, dx = E(x+\Delta x) S U_x(x+\Delta x, t) -$$

$$- E(x) S U_x(x,t) + \int_x^{x+\Delta x} S f(x,t)\, dx$$

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho(x) U_{tt}\, dx = \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x) U_x(x,t)\right) dx + \int_x^{x+\Delta x} f(x,t)\, dx$$

Δx – произвольная

$$\rho(x)\, u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\, u_x\right) + f(x,t)$$

ур-ние продольных колебаний струны

$\rho(x) \equiv const = \rho_0$, $E(x) \equiv const = E_0$

$$\rho_0 u_{tt} = E_0\, u_{xx} + f(x,t) \quad | : \rho_0 \qquad a^2 = \frac{E_0}{\rho_0}$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \frac{f(x,t)}{\rho_0}$$

Обобщенные функции

Понятие основных функций

Ф-цию $\varphi(x)$ будем наз-ть основной, если она бесконечное число раз дифф-ма и финитна

Ф-ция финитна, если она вне отрезка $[a,b]$ обращается тождеств. в ноль.

пример

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|a\,b|}{(x-a)(b-x)}}, & a < x < b \\ 0, & x < a,\ x > b \end{cases}$$

$\varphi(x) \in C^\infty$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}$

носитель ф-ции отрезок $[a,b]$

$\operatorname{supp} \varphi(x) = [a,b]$

$$\operatorname{supp} \varphi(x) = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Обобщен. ф-цией наз-ся всякий линейный непрерывный функционал, действующий в пр-ве основных функций

1. Функционал - правило, согласно которому каждой ф-ции $\varphi(x)$ ставится в соответств. число

$$\varphi(x) \xrightarrow{f} (f, \varphi) = (f(x), \varphi(x))$$

обобщен. ф-ция не имеет аргумента; x - аргумент основн. ф-ции

2. Функционал наз-ся линейным, если

$$(f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(f, \varphi_1) + c_2(f, \varphi_2)$$

3. Функционал непрерывн., если последоват. основных ф-ций $\varphi_n(x)$ сх-ся к $\varphi(x)$ при $n \to \infty$

$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi(x)$, то последоват. чисел

$(f, \varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, \varphi)$

Пример обобщен. ф-ций

1. Пусть $f(x)$ - обычная локал. интегрируемая ф-ция

$$(f(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

говорят что $\forall$ локал. интегр. ф-ция определяет регулярно обобщен. ф-цию

2. Дельта-функция Дирака

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0)$$

дельта-функция ставит функции $\varphi(x)$ в соответствие значение $\varphi(0)$

Докажем дельта-ф-ция не явл. регулярной

Предположим $f(x)$ - локал. интегр. и такая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ (1)

$x\varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x\varphi(x)\,dx = (x\varphi(x))\Big|_{x=0} = 0$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x f(x)}_{\text{локал. интегр. ф-ция}} \varphi(x)\,dx = 0 \quad x f(x) \equiv 0$ (почти всюду)

Лемма

Пусть 1) $f(x)$ - локал. интегр. ф-ция

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = 0$

для $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$

тогда $f(x) \equiv 0$ (почти всюду)

$f(x) \equiv 0$ (почти всюду)

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x) = 0$ получили противоречие с ф-лой (1)

Пример сингулярной обобщ. ф-ции

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$

функционал

Действия с обобщен. ф-циями

1. Обобщ. ф-ции можно складывать и умножать на числа

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - лок. интегр. ф-ции, тогда $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ - лок. интегр. ф-ция

$$(C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)\right] \varphi(x)\,dx =$$

$$= C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,\varphi(x)\,dx + C_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= C_1 (f_1(x), \varphi(x)) + C_2 (f_2(x), \varphi(x))$$

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - обобщ. ф-ции

Тогда лин. комбинацией обобщ. ф-ций наз-ся такая обобщ. ф-ция, которая действ. на основ-

ную ф-цию по правилу

$$(C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x), \varphi(x)) = C_1(f_1(x), \varphi(x)) + C_2(f_2(x), \varphi(x))$$

2. Умножение на бесконечное число раз дифф. ф-цию

Пусть $a(x) \in C^\infty$

Пусть $f(x)$ - лок. интегр. ф-ция, тогда $a(x) f(x)$ - лок. интегр. ф-ция

$$(a(x) f(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) f(x) \varphi(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(a(x)\varphi(x))dx = (f(x), a(x)\cdot\varphi(x)), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$a(x)\cdot\varphi(x)$ - основная ф-ция (финитна и бесконечно число раз дифф.)

Пусть $f(x) \in \mathcal{D}'$ (лин-во всех обобщен. ф-ций)

Под $a(x)\cdot f(x)$ понимаем такую обобщ. ф-цию, которая на $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ действ. по правилу.

$$(a(x) f(x), \varphi(x)) = (f(x), a(x)\cdot\varphi(x)).$$

Пример

Определим $a(x)\cdot\delta(x) = ?$

$$(a(x)\cdot\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x)\cdot a(x)) = a(0)\cdot\varphi(0) =$$

$$= a(0)\cdot(\delta(x), \varphi(x)) = (a(0)\cdot\delta(x), \varphi(x)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$a(x)\cdot\delta(x) = a(0)\cdot\delta(x)$$

3. Определение ф-ции $f(\alpha x + \beta) = ?$

Пусть $f(x)$ - лок. интегр. ф-ция, тогда она опред. регулярную ф-цию

$f(\alpha x + \beta)$ - лок. интегр. ф-ция, -"- регулярн. обобщ. ф-цию по правилу

$$(f(\alpha x+\beta),\ \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x+\beta)\,\varphi(x)\,dx \quad (=)$$

$$\alpha x+\beta = \xi$$

$$dx = \frac{d\xi}{\alpha}$$

$$(=) \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\varphi\left(\frac{\xi-\beta}{\alpha}\right)\frac{d\xi}{\alpha}, & \alpha>0 \\ \int_{+\infty}^{-\infty} f(\xi)\,\varphi\left(\frac{\xi-\beta}{\alpha}\right)\frac{d\xi}{\alpha}, & \alpha<0 \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)dx = \frac{1}{|\alpha|}\cdot\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right)$$

Пусть $f(x)$ - обобщ. ф-ция, тогда $f(\alpha x+\beta)$ - это такая обобщ. ф-ция, которая на $\varphi(x)$ действ. по правилу

$$\left(f(\alpha x+\beta),\ \varphi(x)\right) = \frac{1}{|\alpha|}\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right)$$

Пример

1) $\delta(x-x_0) = ?$ $\quad \alpha = 1,\ \beta = -x_0$

$$\left(\delta(x-x_0),\ \varphi(x)\right) = \left(\delta(x),\ \varphi(x+x_0)\right) = \varphi(x_0)$$

$$\left(\delta(x-x_0),\ \varphi(x)\right) = \varphi(x_0)$$

2) $\delta(\alpha x) = ?$ $\quad \beta = 0$

$$\left(\delta(\alpha x),\ \varphi(x)\right) = \frac{1}{|\alpha|}\left(\delta(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \frac{1}{|\alpha|}\varphi(0) =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|}\left(\delta(x),\ \varphi(x)\right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

частн. случай

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

4. Дифференцирование

Пусть $f(x) \in C^1(x)$

$f'(x) \in C(x)$

$$(f'(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = \underbrace{f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$\varphi(x)$ финитна

$$= -(f(x), \varphi'(x))$$

Пусть $f(x)$ - обобщ. ф-ция

Под производной обобщ. ф-ции понимают такую обобщ. ф-цию, которая на $\varphi(x)$ действует по правилу.

$$(f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x))$$

Пример.

1. $\theta(x)$ - ф-ция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$(\theta(x), \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \varphi(x)\,dx$$

как обобщ. ф-ция эта ф-ция дифф.

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\varphi(x)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x))$$

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

2. $\delta'(x - x_0) = ?$

$$(\delta'(x - x_0), \varphi(x)) = -(\delta(x - x_0), \varphi'(x)) = -\varphi'(x_0)$$

5. Обобщен. функция дифферен. сколько раз

$$(f''(x), \varphi(x)) = -(f'(x), \varphi'(x)) = +(f(x), \varphi''(x))$$

$$(f^{(n)}(x), \varphi(x)) = (-1)^n (f(x), \varphi^{(n)}(x))$$

Все определения можно перенести на многие переменные

6. Для ф-ции многих перемен. можно вводить частные произв.

$f(x, y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Пусть $f(x,y)$ - обобщ. ф-ция, тогда

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \varphi(x,y)\right) = \left(f(x,y), \underbrace{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \varphi(x,y)\right) = \left(f(x,y), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right)$$

правые части равны $\Rightarrow$ равны и левые

Преобразование Фурье

Прямое произведение обобщен. ф-ций

Пусть $f(x)$ - локал. интегр., $g(y)$ — " —

$f(x) \cdot g(y)$ - прямое произвед.

$$(f(x)g(y), \varphi(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\, f(x) g(y) \varphi(x,y)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, \varphi(x,y)\, dy}_{\text{основная ф-ция}} = (f(x), (g(y), \varphi(x,y)))$$

Опред.

$(f(x)g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y)))$

$\delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) = ?$

$(\delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0), \varphi(x,y)) = (\delta(x-x_0), (\delta(y-y_0), \varphi(x,y))) =$

$= (\delta(x-x_0), \varphi(x,y_0)) = \varphi(x_0, y_0)$

Обобщенное решение для однородного волнового уравнения

$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0$

Обобщен. ф-цию $U(x,t)$ будем называть обобщ. решением в обл. Q, если

(1) $(U_{tt} - a^2 U_{xx}, \varphi(x,t)) = 0$, $\forall \varphi(x,t) \in C^\infty$, носитель которой лежит в Q

$(U_{tt}, \varphi(x,t)) - a^2 (U_{xx}, \varphi(x,t)) = 0$

$(U, \varphi_{tt}) - a^2 (U, \varphi_{xx}) = 0$

$(U, \varphi_{tt} - a^2 \varphi_{xx}) = 0$

Второе опред.

Обобщен. —"— —"—, если

$(U, \varphi_{tt} - a^2 \varphi_{xx}) = 0$, $\forall \varphi(x,t) \in C^\infty$, носитель которой лежит в Q

Всякое классическое решение является обобщен. обратное верно невсегда

Пусть $u(x,t)$ - лок. интегр. ф-ция

$$(2)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,dt\; u(x,t)\left(\varphi_{tt} - a^2\varphi_{xx}\right) = 0 \quad \text{для } \forall \varphi \in \mathcal{D}(Q)$$

Локал. интегр. функция нв-ля обобщен. решения если выполняется (2).

Пример

$u = f(x-at)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-at)\left(\varphi_{tt} - a^2\varphi_{xx}\right) dx\,dt \equiv$$

$$\begin{cases} \xi = x-at \\ \eta = x+at \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\xi+\eta}{2} \\ t = \dfrac{\eta-\xi}{2a} \end{cases} \qquad \frac{\mathcal{D}(x,t)}{\mathcal{D}(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2a} & \frac{1}{2a} \end{vmatrix} = \frac{1}{2a}$$

$$\varphi_{tt} - a^2\varphi_{xx} = -4a^2\varphi_{\xi\eta}$$

$$-4a^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cdot\varphi_{\xi\eta}\cdot\frac{1}{2a}\,d\xi\,d\eta = -2a\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\xi\eta}\,d\eta =$$

$$= -2a\int d\xi\, f(\xi)\,\underbrace{\varphi_{\xi}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} = 0$$

$=0$ т.к. ф-ция финитна

Телеграфное уравнение

провод расположен вдоль оси x

C - ёмкость

L -

R -

G - ~~плотность~~ коэффициент утечки

на единицу длины

$i = i(x,t)$ - ток

$v = v(x,t)$ - напряжение

$$v(x,t) - v(x+\Delta x,t) = R\cdot\Delta x\cdot i + L\cdot\Delta x\cdot i_t$$

$$\frac{v(x,t) - v(x+\Delta x,t)}{\Delta x} = R\,i + L\cdot i_t$$

$$-v_x = Ri + Li_t$$

$$v_x + R\cdot i + L\cdot i_t = 0 \quad \text{(первое телеграфное ур-ние)}$$

$$i(x,t) - i(x+\Delta x,) = C\Delta x\, v_t + G\cdot\Delta x\cdot v \;\Big|:\Delta x$$

$$-i_x = Cv_t + Gv$$

$$i_x + Cv_t + Gv = 0 \quad \text{(второе телеграфн. ур-ние)}$$

$$\begin{cases} v_x + Ri + Li_t = 0 \\ i_x + Cv_t + Gv = 0 \end{cases}$$

Сведение с-мы уравнений к одному ур-нию

$$\begin{cases} v_{xx} + Li_{tx} + Ri_x = 0 \\ i_{xt} + Cv_{tt} + Gv_t = 0 \;|\cdot L \end{cases} \quad (1)$$

$$v_{xx} - CLv_{tt} - GLv_t + R\cdot i_x = 0$$

$$i_x = -Cv_t - Gv$$

$$\underbrace{v_{xx} - CLv_{tt}} - GLv_t - RCv_t - RGv = 0 \;|\cdot CL$$

главная часть ур-ния

$$v_{tt} - \frac{1}{LC}v_{xx} + v_t\left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) + \frac{R\cdot G}{L\cdot C}v = 0 \quad (2)$$

$$v = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{G}{C}+\frac{R}{L}\right)t}\cdot w \quad (3)$$

Вычислим производные от ф-ции v и подставим в 2

$$w_{tt} - \frac{1}{CL}w_{xx} - \frac{1}{4}\left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L}\right)^2 w = 0 \quad (4)$$

Рассматриваем частный случай $\frac{G}{C} - \frac{R}{L} = 0 \quad (5)$

это наз-ся линия безискажения

Общее решение телеграфного ур-ния для линий без искажения

$$a^2 = \frac{1}{LC}$$

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

$$u = f(x-at) + g(x+at)$$

$$v = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot (f(x-at) + g(x+at)) \quad (6)$$

(6) подставим во 2-ое ур-ние с-мы телегр. ур-ний

$$i'_x + C \cdot \left(-\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}(f+g) + e^{-\frac{R}{L}t}(f'(-a) + g' \cdot a)\right) +$$
$$+ G \cdot e^{-\frac{R}{L}t}(f+g) = 0$$

$$a \cdot C = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot C = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$i'_x = \sqrt{\frac{C}{L}} \left(f'(x-at) - g'(x+at)\right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \left(f(x-at) - g(x+at) + \tilde{C}(t)\right) \quad (7)$$

(6) и (7) подставим в 1-ое ур-ние с-мы

$$\Rightarrow \tilde{C}'(t) = 0 \Rightarrow \tilde{C}(t) = \tilde{C}^*$$

$$i(x,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \left(f(x-at) - g(x+at) + \tilde{C}^*\right) \quad (8)$$

$$\varphi(x-at) = f(x-at) + \frac{\tilde{C}^*}{2}$$

$$F(x+at) = g(x+at) - \frac{\tilde{C}^*}{2}$$

$$\begin{cases} v = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\varphi(x-at) + F(x+at)\right) & (6') \\ i = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \left(\varphi(x-at) - F(x+at)\right) & (8') \end{cases}$$

общее решение с-мы телеграфн. ур-ний

Начальная задача

$$\begin{cases} v_x + L i_t + R i = 0 \\ i_x + C v_t + G v = 0 \end{cases}$$

$$v|_{t=0} = v_0(x) \quad (9)$$

$$i|_{t=0} = i_0(x) \quad (10)$$

найти решение с-мо при $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ при условии выполнения (9) и (10)

$$\varphi(x) + F(x) = v_0(x)$$

$$\sqrt{\frac{C}{L}}(\varphi(x) - F(x)) = i_0(x) \mid \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(v_0(x) + \sqrt{\frac{L}{C}}\, i_0(x)\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(v_0(x) - \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot i_0(x)\right)$$

$$v = \frac{1}{2} e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\left(v_0(x-at) + \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot i_0(x-at) + \right.$$

$$\left. + v_0(x+at) - \sqrt{\frac{L}{C}}\, i_0(x+at)\right)$$

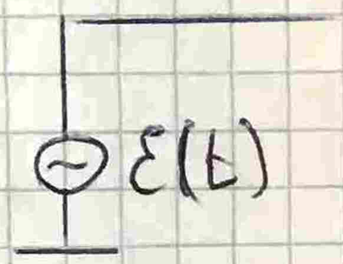
$$i(x,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\left(v_0(x-at) + \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot i_0(x-at) - \right.$$

$$\left. - v_0(x+at) + \sqrt{\frac{L}{C}}\, i_0(x+at)\right)$$

$F(x) \equiv 0$

$v_0(x) = \sqrt{\frac{L}{C}}\, i_0(x) \Rightarrow$ линия безискажения

Начально-краевая задача для полуограниченного провода. Типа граничных условий

1.  на конце включена $\mathcal{E}$

$$\left.\vartheta\right|_{x=0} = \mathcal{E}(t)$$

1.a $\left.\vartheta\right|_{x=0} = 0$ (конец провода заземлен)

2. $\left.i\right|_{x=0} = 0$ (конец провода изолирован)

$$i(0,t) = 0$$

$$i_t(0,t) = 0$$

$$\left.\vartheta_x\right|_{x=0} + L\left.i_t\right|_{x=0} + R\left.i\right|_{x=0} = 0$$

$$\left.\vartheta_x\right|_{x=0} = 0 \iff \left.i\right|_{x=0} = 0$$

конец провода заземлен через сосредоточен. активное сопротивление

в проводе есть искажение на участке d имеет активное сопротив. R_0

$$\vartheta(x_0,t) - \vartheta(x_0+d,t) = \frac{R_0}{d} d\,i$$

$d \to 0$

$$\vartheta(x_0-0,t) - \vartheta(x_0+,t) = R_0 \cdot i$$

$x_0 = 0$ конец заземлен

$$\vartheta(0-0,t) = 0$$

$$-\vartheta(0,t) = R_0\, i(0,t)$$

Задача Штурма - Лиувилля

$X = X(x)$

(1) $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\lambda\rho(x) - q(x))X = 0 \quad x \in (0, \ell)$

Это краевая задача

Регулярная задача - задача, где можно задать гранич. усл. на концах отрезка

$p(x) \in C^1(0,\ell) \quad \rho(x), q(x) \in C(0,\ell)$

$p(x) \geq p_0 > 0, \quad x \in [0,\ell]$

$\rho(x) \geq \rho_0 > 0, \quad x \in [0,\ell]$

условия для регулярной задачи Шт.-Л.

(2) $\alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0) = 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$

(3) $\alpha_2 X'(\ell) + \beta_2 X(\ell) = 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$

Те значения параметра λ, при которых ур-ние (1) имеет нетривиал. решение удовл. гранич. усл. (2) и (3), наз-ся собствен. значениями, а соответств. решения собствен. ф-ции

$X = 0$ - тривиальное решение

Задача Шт.-Л. заключ. в отыскании всех собствен. знач. и собствен. ф-ций.

$L_{2\rho}(0,\ell)$ - пр-во ф-ций, обладающих св-вом $\int_0^\ell f^2(x)\rho(x)dx < \infty$ интеграл сх-ся