① Определитель – ф-я, которая каждой квадр. матрице ставит в соответствие действ. число и обладает след. св-вами:

1) Δ линейно зависит от каждого столбца

2) Δ с 2мя одинак. столбцами $= 0$.

3) Δ единичной матр. равен 1

Утверждение: такая функция существует и единственна.

$\exists!\ \det A$.

Д-во.

1) Докажем, что при $\rightleftarrows$ 2х столбцов опред. меняет знак. Зафикс. в матрице все столбцы кроме 2х и $\angle$ det как функцию этих столбцов:

$$0 \overset{2\text{ св-во}}{=} \det(u+v,\ u+v) = \det(v,u) + \underset{0}{\det(u,u)} + \underset{0}{\det(v,v)} + \det(u,v) = \det(u\ v) + \det(v\ u) \Rightarrow \det(u\ v) = -\det(v\ u).$$

2) По индукции положим $|a_{11}| = a_{11}$.

Положим, что ф-я det существует для матриц порядка $n-1$, тогда для матр. порядка n:

$|A| = \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$. Ф-я обладает всеми 3мя св-вами, указанными в опр.

Предположим, св-во 2 верно при $n=k$. Докажем его при $n=k+1$.

По опр. данной ф-и $|A| = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j}$. Пусть столбцы с номерами p и q равны, $p<q$. Только 2 слагаемых будут отличны от нуля (опр. $\det A_{1j} = 0$ при $j \neq p$, $j \neq q$, т.к. в них есть 2 одинак. столбца):

$\det A = (-1)^{1+p} a_{1p} \det A_{1p} + (-1)^{1+q} a_{1q} \det A_{1q}$. Опр.-ль $\det A_{1p}$ получается из опр-ля $\det A_{1q}$ перестановкой столбцов, тогда $\det A_{1p} = -\det A_{1q}$ (по доказанному выше). Эта сумма равна нулю, т.е.

$\det A = 0$.

Теперь докажем, что $\det E = 1$ индукцией по n.

Если $a_{11} = 1$, то $\det a_{11} = 1$. Предположим, что св-во 3 верно при $n = k$, т.е. $\det E_k = 1$. Тогда в $\det E_{k+1} = \sum\limits_{j=1}^{k+1} (-1)^{1+j} a_{1j} \det E_{1j}$ будет ровно одно слагаемое $(-1)^{1+j} a_{11} \det E_{1j} = 1$, по предп. индукции. Значит, $\det E = 1$.

Докажем св-во 1.

1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \lambda\alpha_{1j} + \mu\beta_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & & \\ a_{n1} & \ldots & \lambda\alpha_{nj} + \mu\beta_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(k_1 \ldots k_n)} a_{1k_1} \ldots (\lambda\alpha_{ik_i} + \mu\beta_{ik_i}) \ldots =$$

$$= \sum (-1)^{N(k_1 \ldots k_n)} a_{1k_1} \ldots \lambda\alpha_{ik_i} \ldots a_{nk_n} + \sum (-1)^{N(k_1 \ldots k_n)} a_{1k_1} \ldots \mu\beta_{ik_i} \ldots a_{nk_n}$$

$$= \lambda \sum \ldots + \mu \sum \ldots = \lambda |\ldots| + \mu |\ldots|.$$

③ Пусть каждое из чисел $\alpha_1\dots\alpha_n$ принимает одно из значений $1\dots n$, причем среди этих чисел нет совпадающих. Числа $\alpha_1\dots\alpha_n$ образуют перестановку среди чисел $1\dots n$.

Образуем из них всевозможные пары $\alpha_i\alpha_j$ и будем считать, что пара $\alpha_i\alpha_j$ образует беспорядок, если $\alpha_i>\alpha_j$ $(i<j)$. Общее число беспорядков, образованных парами — $N(\alpha_1\dots\alpha_n)$.

Теорема о разложении: $|A|=\sum_{\alpha_1\dots\alpha_n}(-1)^{N(\alpha_1\dots\alpha_n)}a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$, где α_i — номера столбцов.

Д-во: Индукцией по n.

$n=2$: 2 комбинации 12 и 21, $N(1,2)=0$, $N(2,1)=1$.

$$|A|=(-1)^0a_{11}a_{22}+(-1)^1a_{12}a_{21}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Предположим, что ф-ла верна при $n>2$ и опр-ля порядка $n-1$. Числа $\alpha_1\dots\alpha_n$ — номера столбцов. порядок $=n-1$.

Тогда $\det A=\sum_{\alpha_1}^{n}(-1)^{1+\alpha_1}a_{1\alpha_1}\det A_{1\alpha_1}$

По предположению $\det A_{1\alpha_1}=\sum_{\alpha_1\dots\alpha_n}^{\ne\alpha_1}(-1)^{N(\alpha_2\dots\alpha_n)}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$.

Из чисел $\alpha_1\dots\alpha_n$ кроме пар, образованных числами $\alpha_2\dots\alpha_n$ можно составить пары $\alpha_1\alpha_2,\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_1\alpha_n$. Среди чисел $\alpha_2,\alpha_3\dots\alpha_n$ $\exists$ ровно (α_1-1) чисел, которые меньше α_1. Поэтому $N(\alpha_1\dots\alpha_n)=N(\alpha_2\dots\alpha_n)+\alpha_1-1$

Подставляя выражение для $\det A_{1\alpha_1}$ в правую часть для $\det A$, получаем утверждение теоремы.

④ Свойства определителей.

1) $\det A = \det A^T$

2) $\det \lambda A = \lambda^n \det A$, A – матр. порядка n.

3) Опр. с нулевой строкой $= 0$

4) Если 2 строки совпадают, опр. $= 0$

5) Если 2 строки поменять местами, опр. поменяет знак

6) Если все эл-ты строки умножить на λ, опр. увелич. в λ раз.

7) Если 2 строки пропорциональны, то опр-ль равен нулю.

8) Если к эл-там некот. строки прибавить соотв. эл-ты другой строки, умноженные на λ, то величина опр-ля не изменится.

Те же св-ва справедливы для столбцов.

Д-во: 2) Каждое слагаемое из суммы в разложении определителя по его элементам содержит по одному множителю из каждой строки, значит, все слагаемые равны нулю.

4) Если в опр-ле поменять местами одинак. строки, он не изменится, но по 5) св-ву он меняет знак, в таком случае, определитель равен нулю.

5) Теорема о разложении по строке и столбцу.

Пусть $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ - квадратная матрица:

1) $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ - разложение по эл-там j-го столбца.

2) $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ - разложение по эл-там i-й строки.

Опр Алгебраическое дополнение эл-та a_{ij} - число

$$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} = (-1)^{i+j} \mathcal{M}_{ij}$$

$\det A_{ij}$ - минор - опр-ль $n-1$ порядка матрицы, полученной вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j, на пересеч. которых стоит элемент.

Теорема Лапласа.

Введем миноры матрицы n-го порядка 2х типов:

Пусть $k < n$ и $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k < \ldots \le n$.

$1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k < \ldots \le n$

$\overline{\mathcal{M}}{}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ — определители порядка $(n-k)$, соотв. той матрице, которая получается в рез-те вычеркивания k строк с номерами $i_1 \ldots i_k$ и k столбцов с номерами $j_1 \ldots j_k$.

$\mathcal{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ — определители порядка k, соотв. той матрице, которую образуют элементы матрицы $A = (a_{ij})$, стоящие на пересечении строк с номерами $i_1 \ldots i_k$ и столбцов с номерами $j_1 \ldots j_k$.

Теорема. При любом $k < n$ и любых фиксированных номерах строк $i_1 \ldots i_k$ таких, что $1 \le i_1 < \ldots < i_k \ldots \le n$ справедлива формула:

$$|A| = \sum_{j_1 \ldots j_k} (-1)^{i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k} \mathcal{M}^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} \overline{\mathcal{M}}{}^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}.$$

{ Суммирование - по всем столбцам $j_1 \ldots j_k$, где $1 \le j_1 < \ldots < j_k < \ldots \le n$.

⑥ Применение теоремы Лапласа

1) $A=(a_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{R})$

$B=(b_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{R})$

$C=(c_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{R})$

Составим матрицу $D \in Mat_{2n}(\mathbb{R})$

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$$

блочная матрица

$$|D| = \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = |A|\cdot|C|.$$

Д-во: Разложим опр-ль в левой части по первым n строкам. Т.к. опр-ль, у которого хотя бы один столбец состоит из нулей, равен нулю, то в формуле из теор. Лапласа будет отлично от нуля только 1 слагаемое: $(-1)^{1+\dots+n+1+\dots+n}|A|\cdot|C|$.

2) Аналогично доказывается рав-во: $\begin{vmatrix} A & B \\ C & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n\cdot|B|\cdot|C|$.

Теорема: Если $A, B \in Mat_n(\mathbb{R})$, то $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$.

Д-во: Рассмотрим опр-ли $\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{vmatrix}$, где $C=A\cdot B$.

По доказанному выше: $\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$, $\begin{vmatrix} A & C \\ -E & 0 \end{vmatrix} = |C|\cdot|E| = |C|$

Рассмотрим полученные определители:

$$1)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \hline 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \hline a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Первые n столбцов у них одинаковые, а каждый столбец второго определителя с номером $n+k$ (где $k=1\dots n$) в силу $c_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ij}$ получается в результате прибавления к $(n+k)$-тому столбцу 1-го опр-ля линейной комбинации с коэфф-тами $b_{k1}, b_{k2}, \dots b_{kn}$

По св-вам определителя данные определители равны, значит, $|C| = |A|\cdot|B|$.

(7) Обратная матрица

Опр. B — обратная для A, если $A \cdot B = B \cdot A = E$; $B = A^{-1}$. Если $B \exists$, то A называют обратимой.

Теорема. $\boxed{\text{Матрица } A \text{ обратима} \iff \det A \neq 0}$

1) Если $\det A \neq 0$, то матрица A — невырожденная. Иначе — вырожденная.

2)* Сумма произведений эл-тов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения другой строки того же определителя равна 0.

Док-во.

($\Rightarrow$) Пусть A обратима, тогда $\exists A^{-1}$: $A \cdot A^{-1} = E$. Тогда опр-ль $\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det E = 1$. Значит, $\det A \neq 0$. ■

($\Leftarrow$) Рассмотрим матрицу B:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = E$ — проверим это:

В левом произведении любой элемент не лежащий на главной диагонали равен нулю, т.к. после вынесения $\frac{1}{|A|}$ за матрицу этот элемент равен сумме произведений элементов одной строки на алгебр. доп-я другой строки.

Для диагональных эл-тов имеем:

$$A \cdot B = \left({}^{\textcircled{1}}{}_{1\,1_{(n)}} \right) \quad (a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} \\ \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} \end{pmatrix} = a_{11}\frac{A_{11}}{|A|} + \ldots + a_{1n}\frac{A_{1n}}{|A|} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \underbrace{(a_{11} \cdot A_{11} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n})}_{=|A|} = 1.$$

Значит, $A \cdot B = E$, тогда $B = A^{-1}$. ■

Док-во *)

Дан опр: $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$. Рассмотрим опр Δ_1, полученный заменой строки с номером k на произв. эл-ты $c_1 \ldots c_n$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ c_1 & \ldots & c_n \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ k\text{-я стр.} \\ \\ \end{matrix},$$

Разложим Δ_1 по k строке $\Delta_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j A_{kj}$, где A_{kj} — алгебр. дополнения, соотв. эл-там k-ой строки как в Δ, так и в Δ_1. Положив $c_j = a_{ij}$ получим опр-ль с двумя same строками $(=0)$.

Т.е., $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$ для $k \neq j$.

(8) Линейно независимые строки.

Опр. ∢ матр. $A \in Mat_{n\times m}(R)$. Строки $A_i = (a_{i1} \dots a_{im})$, где $i \in I \subseteq \{1, \dots n\}$ назовём линейно зависимыми, если найдутся числа $\lambda_i \in R$: $\sum_{i\in I} \lambda_i A_i = 0$.

Строки, не явл. линейно зависимыми, назыв. линейно независ.

Критерий. Для того чтобы строки $A, B, \dots C$ были линейно зависимы необходимо и достаточно, чтобы одна из них являлась линейной комбинацией других строк.

Док-во.

$(\Rightarrow)$ Пусть строки A, B, C — л.з., т.е. $\alpha A + \beta B + \dots + \gamma C = 0$, и хотя бы один из коэфф. $\alpha, \beta, \dots \gamma \neq 0$. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда пусть $\lambda = -\beta/\alpha, \dots \mu = -\gamma/\alpha$, перепишем равенство в виде:

$A = \lambda B + \dots + \mu C$, т.е. A — линейная комбинация строк $B, \dots C$. ■

$(\Leftarrow)$ Пусть одна из строк (например, A) — линейная комбинация остальных. Тогда $\exists$ числа $\lambda, \dots \mu$ такие, что справедливо р-во: $A = \mu C + \dots + \lambda B$. Его можно переписать в виде $(-1)A + \lambda B + \dots + \mu C = 0$ ← нулевая строка.

Так как из чисел $-1, \lambda, \dots \mu$ одно (-1) точно не равно нулю, то последнее р-во устанавливает линейную зависимость строк $A, B, \dots C$. ■

Ещё критерий (без д-ва): для того чтобы опр-ль был равен нулю необходимо и достаточно, чтобы его строки были линейно зависимы.

(9) Минор. Ранг. Т. о базисном миноре.

матр. $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$

Минором k-го порядка наз-ся определитель k-го порядка с элементами, лежащими на пересечении любых k строк и любых k столбцов матрицы A. Очевидно, что $k \leq \min\{m, n\}$

Рангом матрицы A наз-ся число $r \in \mathbb{N}$:
1) у матр. A имеется минор порядка r, не равный нулю
2) У матр. A любой минор порядка больше r равен нулю.
Ненулевой минор порядка r называется базисным.

Теорема о базисном миноре:
1) Базисные строки (столбцы) линейно независимы
2) Любая строка (столбец) матр. A явл. лин. комбинацией базисных строк (столбцов)

Д-во:
1) Предположим противное: $\exists$ базисная строка, явл-ся линейной комбинацией остальных строк $\Rightarrow$ можно получить нулевую строку, вычитая из неё лин. комб. остальных строк $\Rightarrow \Delta = 0$ — ?! противоречие опр. базисного минора. ■
2) Можно считать, что базисный минор находится в левом верхнем углу матрицы A. Пусть $j \in \{1 \dots n\}$ и $k \in \{1 \dots m\}$.

Опр-ль
баз. мин

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{— } j\text{-й столбец} \\ \\ \text{— } k\text{-я строка} \end{array}$$

равен нулю:

(*) Если k и $j > r$, то этот опр. равен нулю по опр. базисного минора.

(**) Если $k \leq r$, $j \leq r$, то опр. равен нулю, т.к. в нём есть 2 одинаковые строки (столбца).

Разложим данный опр-ль по $r+1$-му столбцу:

$$A_{1j} \cdot a_{1j} + A_{2j} \cdot a_{2j} + \dots + A_{kj} \cdot a_{kj} = 0$$

Число $A_{kj} \neq 0$ по опр. базисного минора, а значит, на него можно делить

$$a_{kj} = -\frac{A_{1j}}{A_{kj}} a_{1j} - \frac{A_{2j}}{A_{kj}} a_{2j} - \dots - \frac{A_{rj}}{A_{kj}} a_{rj}$$

Это верно $\forall j$, значит, k-я строка явл-ся линейной комб. базисных строк ■

(10) СЛУ.

Система m ур-ий с n неизвестными (множеств) – это система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Пусть $A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ Тогда система м.б. записана в виде $\boxed{AX = B}$

Опр-я:

1) Система $AX=B$ – однородная, если $B=0$, неоднородная, если один из коэфф. $b_1 \dots b_n$ отличен от 0.

2) Система $AX=B$ – квадратная, если $m=n$.

3) Решение системы – такая совокупность чисел $c_1 \dots c_n$, которая при подстановке их на место X обращает все ур-я в тождества.

4) Система $AX=B$ наз-ся совместной, если она имеет решение, и несовместной в противном случае.

5) Совместная система наз-ся определённой, если она имеет единственное решение; неопределённой – если более одного.

(11) Условие нетривиального решения СЛУ.

Теорема: однородная система имеет нетривиальное решение $\iff$ ранг матрицы коэффициентов меньше числа неизвестных.

(rank A – ранг матрицы A)

Д-во: ($\Rightarrow$) Пусть $\operatorname{rank} A < n$ и $\operatorname{rank} A = r$. m?

Тогда матрица A имеет ненулевой минор порядка r, а миноры более высоких порядков равны нулю. Запишем систему $AX=0$ в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ Без потери общности считаем $m<n$.

Рассмотрим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$ Этот минор $=0 \Rightarrow$ его столбцы линейно зависимы, т.е. $\exists \lambda_1 \dots \lambda_m$ не все $=0$: $\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{mm} \end{pmatrix} = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 \cdot a_{12} + \dots + \lambda_m a_{1m} = 0 \\ \lambda_1 \cdot a_{m1} + \lambda_2 \cdot a_{m2} + \dots + \lambda_m \cdot a_{mm} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$$ Отсюда $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots x_m = \lambda_m$ – нетривиальное решение ∎

($\Leftarrow$) Пусть $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots x_n = c_n$ – нетривиальное решение.

Тогда $\begin{cases} a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{n1}c_1 + \dots + a_{nn}c_n = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$ Следовательно, столбцы матрицы коэффициентов линейно зависимы $\Rightarrow$ не все столбцы являются базисными. Значит, порядок базисного минора матрицы A меньше n, следовательно, ранг матрицы A меньше n

Следствие: Квадратная однородная СЛУ имеет нетривиальное решение $\iff \det A = 0$

(12) Теорема Кронекера-Капелли.

Для того чтобы линейная система являлась совместной необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы этой системы был равен рангу её основной матрицы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = (AB) \text{ -блочная матр.}$$

Т. К-К: $AX=B$ совместна $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AB)$

Д-во: ($\Rightarrow$): Ранг матрицы A не превосходит ранга расширенной матр. Достаточно показать, что ранг матрицы A не меньше ранга её расширенной матрицы. Пусть система $AX=B$ совместна, т.е. $\exists$ расширение:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R} \ (x_1=\lambda_1, x_2=\lambda_2, \ldots x_n=\lambda_n)$$

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_n A_n = B, \text{ где } A_1 \ldots A_n \text{ - столбцы матрицы } A.$$

Следовательно столбец B является линейной комбинацией остальных столбц. Выберем какой-нибудь минор матр. A, для простоты - в левом верхнем углу.

$M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$ базисные столбцы линейно независимы, а любой столбец с номером $j>k$ выражается через базисные, т.е.

$$A_j = \lambda_{1j}A_1 + \lambda_{2j}A_2 + \ldots + \lambda_{kj}A_k, \text{ где } A_1 \ldots A_k \text{ - базисные столбцы}$$

т.к. $B=AX$, то $B=A_1X_1+\ldots A_nX_n = A_1X_1+\ldots+A_kX_k+(\lambda_{1k+1}A_1+\ldots+\lambda_{kk+1}A_k)\cdot X_{k+1}+\ldots+$ $+(\lambda_{1n}A_1+\ldots+\lambda_{kn}A_k)X_n \Rightarrow$ Столбец B есть линейная комбинация базисных столбцов, следовательно, M- базисный минор и в расширенной матрице - $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(AB)$ ■

($\Leftarrow$) Пусть $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)$. Выберем базисный минор матрицы A. Он будет базисным минором и в расширенной матрице. Значит, столбец $B=C_1A_1+\ldots+C_kA_k$, где $A_1\ldots A_k$ - базисные столбцы.

Тогда $x_1=C_1 \ldots x_k=C_k$, $x_{k+1}=0$, $x_{k+2}=0, \ldots x_n=0$ - решение исходной системы.

Значит, она совместна. ■

(13) Формулы Крамера.

Пусть $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$; A - невырожденная

Тогда $AX = B \Rightarrow A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$X = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{A_{11}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{|A|}$$

В числителе стоит: $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1$; $|A| \neq 0$, $|A| = \Delta$.

Отсюда: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ \dots \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{cases}$ - формулы Крамера.

<u>Теорема</u>: Система линейных уравнений с квадратной невырожденной матрицей имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера.

(14) ФСР.

Опр. Любой набор из $k=n-r$ линейно независимых столбцов, являющихся решениями $AX=0$, где n - к-во неизвестных, r - ранг A, называется фундаментальной системой решений.

Если в матрице A системы $AX=0$ фиксировать базисный минор, то ему соответствуют базисные столбцы, и следовательно, набор неизвестных, отвечающих данным столбцам. Указанные неизвестные называются базисными, а остальные - свободными.

Теорема. Пусть дана система $AX=0$ с n неизвестными и $\operatorname{rank} A=r$, тогда $\exists$ набор из $k=n-r$ решений $X^1, \dots X^k$ этой системы, образующих ФСР.

Док-во. Считаем, что базисный минор матрицы A находится в левом верхнем углу, остальные строки являются лин. комб. базисных строк. Это означает, что если числа $C_1 \dots C_n$ удовлетворяют первым r строкам, то они удовлетворяют остальным.

Множество решений не изменится, если отбросить все строки кроме первых r.

Запишем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0 \\ \overline{a_{n1}x_1+\dots+a_{nn}x_n=0} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\dots-a_{1n}x_n \\ \overline{a_{n1}x_1+\dots+a_{nr}x_r=-a_{nr+1}x_{r+1}-\dots-a_{nn}x_n} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} - \text{базисный минор}, \neq 0.$$

Рассмотрим следующие $k=n-r$ серий значений независимых неизвестных.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

После подстановки в последнюю систему находим значения базисных переменных (напр. по ф-лам Крамера). Получаем набор из $n-r$ решений:

$$X^1=\begin{pmatrix} x_1^1 \\ \dots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^2=\begin{pmatrix} x_1^2 \\ \dots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X^k=\begin{pmatrix} x_1^k \\ \dots \\ x_r^k \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Они линейно независимы (за счёт концов) => образуют ФСР. ∎

Эта ФСР - нормальная.

(15) Следствие о записи всех решений ОСЛУ с помощью норм. ФСР.

С помощью нормальной ФСР множество всех решений ОСЛУ $AX=0$ можно записать в виде: $X=\lambda_1 X^1+\ldots+\lambda_k X^k$, где $\lambda_1,\ldots\lambda_k\in\mathbb{R}$.

Док-во: Пусть $g=\begin{pmatrix} g_1 \\ g_n \end{pmatrix}$ - какое-нибудь решение.

Рассмотрим столбец $X=g_{r+1}X^1+\ldots+g_n X^k$, где $X^1,\ldots X^k$ - норм. ФСР.

Этот столбец совпадает с g по элементам с номерами $r+1,\ldots n$ и является решением исходной СЛУ.

Запишем её в виде: $\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n \\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r=-a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n \end{cases}$

Слева стоит базисный минор. $X=\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_n \end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_n \end{pmatrix}$

Столбцы g и X совпадают, т.к. решения данной системы полностью определяются набором значений независимых неизвестных. А у столбцов X и g они совпадают. Значит, $X=g$.

16) Теорема о структуре общего решения ОСЛУ

Если $X^1 \dots X^k$ – ФСР (произвольная) системы $AX=0$, то любое ее решение X можно записать в виде $X = C_1X^1 + C_2X^2 + \dots + C_kX^k$ ($C_1, \dots C_k \in \mathbb{R}$).

Док-во: Пусть $X = \begin{pmatrix} X_1^0 \\ \dots \\ X_n^0 \end{pmatrix}$ – решение системы $AX=0$.

Считаем, что базисный минор находится в левом верхнем углу. Тогда исходная СЛУ имеет такие же решения, что и:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

Тогда: $$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Решим её относительно базисных неизвестных (по ф. Кр., $\Delta \neq 0$), получим решение:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{1r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \dots \\ x_r = \alpha_{rr+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{rn}x_n \end{cases}$$

Запишем ФСР в форме: $X^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \dots \\ x_n^1 \end{pmatrix}, \dots X^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ \dots \\ x_n^k \end{pmatrix}$

Составим матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^k \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^k \\ \dots \\ x_r^0 & x_r^1 & x_r^2 & \dots & x_r^k \\ x_{r+1}^0 & x_{r+1}^1 & x_{r+1}^2 & \dots & x_{r+1}^k \\ \dots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^k \end{pmatrix}$$

Последние k столбцов образуют ФСР, поэтому они линейно независимы, т.к. ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов $\operatorname{rank} B \geq k$. Покажем, что $\operatorname{rank} B \leq k$. Т.к. столбцы матр. B явл. решениями исходной СЛУ, то их элементы удовлетворяют соотношениям, написанным выше.

$$\begin{cases} x_1^i = \alpha_{1r+1}x_{r+1}^i + \dots + \alpha_{1n}x_n^i \\ \dots \\ x_r^i = \alpha_{rr+1}x_{r+1}^i + \dots + \alpha_{rn}x_n^i \end{cases}$$

Используя их, можно занулить первые r строк; т.к. ранг матрицы при таком преобр. не меняется, то $\operatorname{rank} B \leq k$.

Имеем:

$$\begin{cases} \operatorname{rank} B \geq k \\ \operatorname{rank} B \leq k \end{cases} \Rightarrow \operatorname{rank} B = k.$$

Так как последние k столбцов матрицы линейно независимы, то они базисные, $\operatorname{rank} B = k$. Значит, 1 столбец не является базисным, сл-но, он выражается через базис. Значит, X – лин. комб. ФСР. ■

Выражение $X = C_1X^1 + C_2X^2 + \dots + C_kX^k$ – общее решение.

(18) Св-ва линейного пространства.

Утв. 1 В любом лин. пр-ве $\exists!$ нулевой элемент.

Д-во:

допустим, $\exists$ два нулевых эл-та 0_1 и 0_2.

$$\left.\begin{aligned} 0_1 + 0_2 &= 0_2 \\ 0_1 + 0_2 &= 0_1 \end{aligned}\right| \Rightarrow 0_1 = 0_2 \quad \blacksquare$$

Утв. 2 $\forall x \in L$ $\exists!$ противоположный элемент.

Д-во:

Пусть $x \in L$ и $\exists y_1, y_2 \in L$ т. ч. $x + y_1 = 0$, $x + y_2 = 0$.

$y_1 = y_1 + 0 = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = y_2 \rightarrow y_1 = y_2$ $\blacksquare$

Утв. 3 $\forall x \in L$ $0 \cdot x = 0$.

Д-во: $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x + (x + (-x)) = (0 \cdot x + x) + (-x) = (0 + 1)x + (-x) =$
$= x + (-x) = 0.$ $\blacksquare$

Утв. 4 $\forall x \in L$ $-1 \cdot x = -x$.

Д-во: ~~$-1 \cdot x = (0 - 1)x = 0x - x = -x$~~

$-1 \cdot x = -1 \cdot x + 0 = -1 \cdot x + x + (-x) = x(-1 + 1) + (-x) = 0x + (-x) = -x.$ $\blacksquare$

(19)

Опр. Линейная комбинация векторов $x_1 \dots x_n \in L$ — это выражение вида $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$

Опр. Элементы $x_1 \dots x_n$ наз. линейно зависимыми, если $\exists \alpha_1 \dots \alpha_n$: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ (не все $\alpha_i = 0$)

Теорема: Элементы $x_1 \dots x_n \in L$ линейно зависимы $\Leftrightarrow x_i = \alpha_{i_1} x_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} x_{i_k}$, где $i \in \{1 \dots n\}$; $\{i_1 \dots i_k\} \subset \{1 \dots n\}$.

Д-во: ($\Rightarrow$) Пусть $x_1 \dots x_n$ — л.з., то $\alpha_1 x_1 + \alpha_n x_n = 0$, $\alpha_i \neq 0$ для какого-то $i \in \{1 \dots n\}$ $\Rightarrow x_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} x_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} x_n$ ■

($\Leftarrow$) Пусть $x_i = \alpha_{i_1} x_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} x_{i_k} \Rightarrow 0 \cdot x_1 + \dots + \underbrace{(-1) x_i + \dots + \alpha_{i_1} x_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} x_{i_k}}_{=0} + \dots + 0 \cdot x_n = 0$ (нетривиальная л.к.) $\Rightarrow x_1 \dots x_n$ — л.з. ■

Ув. Если $0 \in \{x_1 \dots x_n\} \subseteq L$, то $x_1 \dots x_n$ — лин. зависимы.

Ув. Если $x_1 \dots x_n$ — линейно зависимы, то $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m$ — лин. зав.

Опр. Элементы $e_1 \dots e_n \in L$ называются базисом лин. пр-ва L, если:

1) $e_1 \dots e_n$ — л.нз.
2) $\forall x \in L \ \exists \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \ x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Ув. 1 Разложение любого вектора по базису единственно

Ув. 2 Числа α_i можно назвать координатами элемента x

Ув. 3 При сложении эл-тов их коорд. складываются, а при умн. на число умножаются на это число

(12) Размерность.

Опр. Линейное пр-во называется n-мерным, если $\exists n$ линейно независимых элементов, а любые $n+1$ элементов будут лин. зависимы. $\dim_{\mathbb{R}} L = n$.

Линейное пр-во называется бесконечномерным, если в нём можно найти сколь угодно много линейно независимых элементов.

Теорема: Пусть L - линейное пр-во и $\dim L = n$. Любые n линейно независимых векторов образуют базис.

Д-во. ~~Докажем, что $\forall (n+1)$ векторов линейно зависимы~~

Пусть $e_1, \dots e_n$ - лин. независимы, тогда $\forall x \in L$ элементы $x, e_1 \dots e_n$ - линейно зависимы $\Rightarrow \alpha x + \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ $(\alpha_i \neq 0) \Rightarrow x = -\frac{\alpha_1}{\alpha} e_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha} e_n$. ■

Теорема Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис в L. Тогда $\dim_{\mathbb{R}} L = n$.

Д-во: Докажем, что $\forall (n+1)$ векторов лин. зависимы.

Пусть $x_1, \dots x_{n+1} \in L$. Т.к. $e_1, \dots e_n$ - базис, то

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} e_1 + \dots + \alpha_{1n} e_n \\ \dots \\ x_{n+1} = \alpha_{n+1\,1} e_1 + \dots + \alpha_{n+1\,n} e_n \end{cases}$$

$\exists$ матрицу: $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n+1\,1} & \alpha_{n+1\,2} & \dots & \alpha_{n+1\,n} \end{pmatrix}$

Порядок базисного минора не больше n, а значит, $\exists$ строка, не являющаяся базисной. Значит, она линейно выражается через другие, следовательно, элементы $x_1 \dots x_n$ - лин. зависимы. ■

(21) Изоморфизм.

Опр. Линейные пространства L_1 и L_2 называются изоморфными, если $\exists$ отображение $f: L_1 \to L_2$ такое, что:

1) f - биекция
2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in L_1$
3) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\forall x \in L_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

f - изоморфизм

$L_1 \xrightarrow{f} L_2$

взаимно однозначное отображение

f - биекция $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1) \ f \text{ - инъекция } f(x)=f(y) \Rightarrow x=y \\ 2) \ f \text{ - сюръекция } \forall b \in B \ \exists a \in A \ f(a)=b \end{cases}$

f - биекция $\Leftrightarrow \forall b \in B \ \exists a \in A \ f(a) = b$

Теорема. Пусть L и L' — конечномерные лин. пр-ва над $\mathbb{R}$. Если $\dim L = \dim L'$, то $L \cong L'$ (L изоморфно L').

Д-во: Т.к. $\dim L = \dim L'$, то число векторов в базисах одно и то же. Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис в L,
$e_1' \dots e_n'$ - базис в L'. Надо построить изоморфизм $f: L \to L'$.

Положим $f: \begin{cases} e_1 \to e_1' \\ \vdots \\ e_n \to e_n' \end{cases}$, т.е. если $x \in L$ имеет вид $x = r_1 e_1 + \dots + r_n e_n$, то $f(x) = r_1 e_1' + \dots + r_n e_n'$.

1) Пусть $x = r_1 e_1 + \dots + r_n e_n$, $y = s_1 e_1 + \dots + s_n e_n$.

Тогда $f(x+y) = f(r_1 e_1 + \dots r_n e_n + s_1 e_1 + \dots + s_n e_n) = f((r_1+s_1)e_1 + \dots + (r_n + s_n)e_n) =$
$= (r_1+s_1)e_1' + \dots + (r_n+s_n)e_n' = r_1 e_1' + \dots r_n e_n' + s_1 e_1' + \dots + s_n e_n' = f(x) + f(y)$.

2) $f(\lambda x) = f(\lambda r_1 e_1 + \dots + \lambda r_n e_n) = f(\lambda(r_1 e_1 + \dots + r_n e_n)) = \lambda(r_1 e_1 + \dots + r_n e_n) = \lambda f(x)$.

3) Биективность следует из того, что координаты образа и прообраза совпадают.

(22) Подпространство.

Опр. Пусть $L' \subseteq L$. Говорят, что L' - подпр-во пр-ва L, если:

1) $\forall x, y \in L' \quad x+y \in L'$ (Подпространство - это подмножество, которое тоже является лин. пр-вом).

2) $\forall x \in L' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda x \in L'$

Примеры.

1) $\mathbb{R}$, $\{0\} \in \mathbb{R}$; 2) L, $\{0\} \in L$; 3) $\mathbb{R}, \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$; $L, L \subset L$; 4) $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$:
0, $\mathbb{R}$, $\{x, y, 0\}$, ... $\{x, 0, 0\}$. (8).

5) $\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^k\}$: 0, $\mathbb{R}_n[x]$, $\mathbb{R}x$, $\mathbb{R}x^2$, ... $(k \le n)$.

Опр. Пусть L - линейное пространство над $\mathbb{R}$, $x_1, \ldots x_n \in L$. Мн-во $\{y \in L / y = \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n / \gamma_1, \ldots \gamma_n \in \mathbb{R}\}$ наз-ся линейной оболочкой векторов $x_1 \ldots x_n$.
Лин. оболочка - подпространство. Если $x_1, \ldots x_n \in L$, то их лин. об. - это наименьшее подпр-во, содержащее эти вектора.

Теорема. Пусть L - лин. пр-во над $\mathbb{R}$, L' - лин. подпр-во в L. Если $e_1, \ldots e_k \in L'$ - базис в L', то $\exists\, e_{k+1} \ldots e_n \in L$: $e_1, \ldots e_k, e_{k+1}, \ldots e_n$ - базис L.
(базис под-ва можно дополнить до базиса пр-ва).

Теорема: Размерность любого подпр-ва не превышает размерности пр-ва.

(Теорема: dim лин. оболочки векторов $x_1, \ldots x_n$ равна максимальному числу лнз векторов в системе $x_1, \ldots x_n$).

(23) Пересечение и сумма

Опр. Пусть L_1 и L_2 – подпр. ва L. Тогда $L_1 \cap L_2 = \{x \in L \mid x \in L_1, x \in L_2\}$
$L_1 + L_2 = \{x+y \mid x \in L_1, y \in L_2\}$
($L_1 \cap L_2$ – подпр-во L)

Теорема. Пусть L_1 и L_2 – конечномерные пр-ва над $\mathbb{R}$, тогда справедливо равенство: $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$.

Д-во: Пусть $e_1 \dots e_k$ – базис в $L_1 \cap L_2$, тогда этот базис можно дополнить до базиса пр-ва L_1 и базиса пр-ва L_2:
$e_1 \dots e_k g_1 \dots g_l$ – базис L_1; $e_1 \dots e_k f_1 \dots f_m$ – базис L_2.

Докажем, что $\{g_1 \dots g_l e_1 \dots e_k f_1 \dots f_m\}$ – базис в $L_1 + L_2$.
Предположим, что $\exists \alpha_1 \dots \alpha_l, \beta_1 \dots \beta_k, \lambda_1 \dots \lambda_m \in \mathbb{R}$ не все равные 0 такие, что
$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i = 0.$$

Тогда $\underbrace{\sum_{i=1}^{l} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i}_{\in L_1} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i}_{\in L_2}$. Левая и правая части лежат в пересечении L_1 и L_2.

Т.к. $-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \in L_1 \cap L_2$, то $-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i e_i$

Откуда $\sum_{i=1}^{k} \gamma_i e_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i = 0$; т.к. $\{e_1 \dots e_k f_1 \dots f_m\}$ – базис в L_2, то $\gamma_1 = \dots = \gamma_k = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, тогда $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i g_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i e_i = 0$, т.к. все $\lambda = 0$.

Поскольку $g_1 \dots g_l e_1 \dots e_k$ – базис в L_1, то $\alpha_1 = \dots = \alpha_l = \beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ (аналогично).
Следовательно $\exists$ только тривиальная лин. комбинация g_i, e_i, f_i, значит, они линейно независимы.

$\forall x \in L_1 + L_2$ можно представить в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2 \Rightarrow$

$x_1 = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_l g_l + \beta_1 e_1 + \dots + \beta_k e_k$; $x_2 = \gamma_1 f_1 + \dots + \gamma_m f_m + \delta_1 e_1 + \dots + \delta_k e_k$,
т.е. x раскладывается по векторам g, e, f, то $g_i e_i f_i$ – базис $L_1 + L$ ■

(24) Прямая сумма.

Опр. Прямой суммой пространств L_1 и L_2 называется пр-во $L = L_1 \oplus L_2$ такое, что $\forall x \in L$ единственным образом представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$.

Теорема Для того чтобы n-мерное пр-во $L = L_1 \oplus L_2$ представляло прямую сумму пр-в L_1 и L_2 достаточно, чтобы:

1) $L_1 \cap L_2 = 0$.

2) $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2$

Д-во: Пусть $e_1 \dots e_k$ – базис в L_1, $g_1 \dots g_n$ – базис в L_2.

Пр-ва L_1 и L_2 являются подпространствами пр-ва L. В силу того, что $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim L$: $\forall x \in L$: $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i g_i$ и $e_1 \dots e_k\, g_1 \dots g_n$ – базис L.

$\forall x \in L$ есть $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$.

Докажем, что такое представление единственно:

Предположим, $x = x_1' + x_2'$, $x_1' \in L_1$, $x_2' \in L_2$.

$x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ Т.к. $L_1 \cap L_2 = 0$, то $x_1 - x_1' = 0$

$x_2 - x_2' = 0$

$\Downarrow$

$\underbrace{x_1 - x_1'}_{\in L_1} = \underbrace{x_2' - x_2}_{\in L_2}$

Значит, представление единственно ∎

§5 Лин. оператор.

Опр. V и W – лин. пр-ва над $\mathbb{R}$. Отображение $A: V \to W$ – лин. оператор, если

1) $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ $\quad \forall v_1 v_2 v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2) $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ $\quad (A(v) = Av)$

Операции.

1) $A, B: V \to W$; $C = A + B: V \to W \mid v \to Cv = Av + Bv$

2) $A: V \to W$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $D = \lambda A: V \to W \mid v \to Dv = \lambda A v$.

3) Нулевой оператор $A^0: V \to 0$

4) Противоположный: $A: V \to W$; $-A: V \to W \mid v \to -Av$

5) тождественный: $id: V \to V \mid v \to v$.

Множество всех A, действ. из V в W, где V, W – лин. пр-ва над $\mathbb{R}$, образует линейное пр-во.

6) $A: V \to W$
$B: W \to U$ $\quad C = B \cdot A: V \to U \mid v \to B(A(v))$

7) Св-ва л.о.
- $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) B$
- $(A + B) C = AC + BC$
- $A(B + C) = AB + BC$
- $A(BC) = (AB) C$

8) Л.о. $B \in L(V, V)$ наз. обратным для $A \in L(V, V)$, если $AB = BA = id$.

Ут. Л.о. обратим, только если он взаимно однозначен.

(26) Ядро и образ.

Опр. Ядром л. оператора $A: V \to V$ называется мн-во $\ker A = \{v \in V \mid Av = 0\}$.

Утв. $\ker A$ – подпространство пр-ва V.

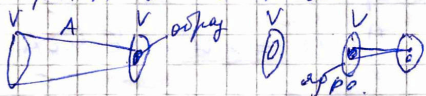
Д-во:

1) Все аксиомы, связанные с "+" и "·" на скаляр выполняются, т.к. $\ker A \subseteq V$.

2) $\forall u, v \in \ker A$ $u+v \in \ker A$, т.к. $A(u+v) = Au + Av = 0 \Rightarrow u+v \in \ker A$.

3) $\forall u \in \ker A$ $A(\lambda u) = \lambda Au = 0 \Rightarrow \lambda u \in \ker A$ ∎

Опр. Образ линейного оператора $A: V \to V$ – это множество $\operatorname{Im} A = \{Av \mid v \in V\}$



Утв. Образ - подпр-во пр-ва V.

Д-во.

1) $\forall u, v \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \exists u', v' \in V$ т., что $u = Au'$; $v = Av'$.

Значит, $u + v = Au' + Av' = A(u'+v') \in \operatorname{Im} A$, т.е. $u+v \in \operatorname{Im} A$.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall u \in \operatorname{Im} A \to \exists u' \in V$ т., что $u = Au' \Rightarrow \lambda u = \lambda Au' = A(\lambda u') = A(u) \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \lambda u \in \operatorname{Im} A$. ∎

(27) Теорема о сумме размерностей.

Пусть $\dim V = n$ и $A \in L(U, V)$. Тогда $\dim(\operatorname{Im} A) + \dim(\ker A) = n$.

Д-во. Поскольку $\ker A$ — это подпр-во V, то $\exists$ пр-во V_1, такое, что $V = V_1 + \ker A$.

Нужно доказать, что $\dim V_1 = \dim \operatorname{Im} A$.

Пусть $\dim V_1 = p$, $\dim \operatorname{Im} A = q$.

Пусть $y_1 \dots y_q$ — базис пр-ва $\operatorname{Im} A$. Оператор A действует взаимно однозначно из V в $\operatorname{Im} A$.

*) $\forall v \in \operatorname{Im} A \ \exists v' \in V : v = Av'$ (по опр. образа)

**) $\forall u, v \in \operatorname{Im} A$ $u = Au'$, $v = Av'$ и $v = u$, т.е., $Au' = Av' \Rightarrow$

$A(u' - v') = 0 \Rightarrow u' - v' \in \ker A$.

Поэтому $\forall y \in \operatorname{Im} A$ $\exists$ единств. $x \in V_1$ такой, что $Ax = y$.

Обращаясь к базису образа, можем записать $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$ .. $y_q = Ax_q$ для некоторых $x_1 .. x_q \in V_1$.

Утверждаем, что элементы $x_1 \dots x_q$ — линейно независимы.

Предположим, что это не так, т.е. $\exists \lambda_1 \dots \lambda_q \in \mathbb{R} : \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_q x_q = 0$.

$A(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_q x_q) = A(0) \Rightarrow \lambda_1 A x_1 + \dots \lambda_q A x_q = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_q y_q = 0$ — противоречие, т.к. $y_1 \dots y_q$ — базис

Тогда в V_1 есть q лин. незав. эл-тов, а значит, $p \geq q$

Если $p > q$, то пусть $\underbrace{x_1 \dots x_q}_{\text{лнз}} x_{q+1} \dots x_p$ — базис V_1. Т.к. $p > q$ и $q = \dim \operatorname{Im} A$, то эл-ты $Ax_1 \dots Ax_p \in \operatorname{Im} A$, а значит, они линейно зависимы: $\lambda A x_1 + \dots \lambda_p A x_p = 0$ для некоторых $\lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{R}$.

$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_p x_p) = 0$, поскольку A действует взаимно-однозначно из V_1 в $\operatorname{Im} A$ (в «0» переводит только «0»), то линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \dots \lambda_p x_p = 0$, но $x_1 \dots x_p$ — базис $V \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p$. Поэтому $p > q$ не может выполняться, т.е., $p = q$ ■

(28) Ранг оператора. Матричная запись

Опр. $\boxed{\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im} A}$ Св-ва:

1) лин. оператор обратим $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = \dim V = n$

Д-во. $\ker A = 0 \Longleftrightarrow \exists A^{-1}$. Если $\ker A = 0$, то $\operatorname{Im} A = V$, т.е. $\dim \operatorname{Im} A = n$ ■

2) $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A$

$\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$

Д-во: $\operatorname{Im} AB \subseteq \operatorname{Im} A \Rightarrow \dim \operatorname{Im} AB \leq \dim \operatorname{Im} A$, т.е. $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A$ ■

Пусть $\ker B \subseteq \ker AB \Rightarrow \dim \ker B \leq \dim \ker AB \Rightarrow \dim V - \dim \ker AB \leq$ $\leq \dim V - \dim \ker B \Rightarrow \dim \operatorname{Im} AB \leq \dim \operatorname{Im} B \Rightarrow \operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$. ■

Матричная запись л.о.

Пусть $A \in L(V,V)$ и $\dim V = n$.

$\exists$ базис V: $e_1, \dots e_n \Rightarrow \forall x \in V$. $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots \lambda_n e_n$

$Ax = A(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 A e_1 + \lambda_2 A e_2 + \dots + \lambda_n A e_n$.

Следовательно, зная действие A на базис, будем знать действие A на V.

Пусть: $Ae_1 = a_{11} e_1 + \dots + a_{1n} e_n$ Составим матрицу:

$\dots$

$Ae_n = a_{n1} e_1 + \dots + a_{nn} e_n$

$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица лин. оператора A.

$Ax = (\lambda_1 a_{11} e_1 + \dots + \lambda_1 a_{1n} e_n) + (\lambda_1 a_{21} e_1 + \dots \lambda_1 a_{2n} e_n) + \dots + (\lambda_n a_{n1} e_1 + \dots \lambda_n a_{nn} e_n)$

Значит, ~~матрицу~~ л. о. можно записать в виде

$$Ax = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_n a_{n1} \\ \dots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow e_1 \\ \\ \leftarrow e_n \end{matrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(29) Многочлены.

Если A и B – л.о. с матрицами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то матрицей оператора $C = A\circ B$ будет $C = \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$.

Рассмотрим многочлен $f(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m$.
$a_m \dots \in \mathbb{R}$

$$f(A) = a_0 A^m + a_1 A^{m-1} + \dots + a_{m-1} A + a_m \cdot I$$

$A^m = A\circ A\circ \dots \circ A$ (композиция операторов)

$f(A)x = a_0 A^m x + \dots + a_{m-1} Ax + a_m I x$.

Опр. Говорят, что многочлен $f(t)$ аннулирует оператор A если $f(A) = 0$ – нулевой оператор. Многочлен минимальной степени, аннулирующий оператор A и имеющий старший коэфф. $=1$, наз-ся минимальным многочленом оператора A.

Обозн. $\mu_A(t) = t^m + \mu_1 t^{m-1} + \dots + \mu_{m-1} t + \mu_m$ – мин. мн-н оператора A.

Если $\mu_A(t)$ имеет степень m, то операторы $A^{m-1}, A^{m-2}, \dots, A^2, A, I$ линейно независимы. Если данные операторы линейно независимы и оператор A^m линейно выражается через них, то m будет степенью минимального многочлена. Таким образом, $\forall$ оператора $\exists\, \mu_A(t)$.

Оператор обратим тогда и только тогда, когда свободный член его минимального многочлена $\neq 0$.

Д-во: Предположим $\mu_m = 0$. Тогда $A(A^{m-1} + \mu_1 A^{m-2} + \dots + \mu_{m-1} I) = 0$ тогда матрица оператора необратима ($\Delta = 0$), значит, оператор необратим. ■

(30) . Инвариантные подпространства

Опр. Подпространство U пространства V наз-ся инвариантным относительно оператора A, если $Au \in U$ $\forall u \in U$
$AU \subseteq U$.

$Ax : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \to (x, 0)$

$x = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (x, y) $\qquad$ $\mathbb{R} + \mathbb{R}$

Пусть $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_m$. Тогда $\forall x \in V$ может быть записан в виде $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, где $x_1 \in W_1, \ldots x_m \in W_m$

$Ax_1, \ldots Ax_m$ – лин. операторы

$Ax_1 + Ax_2 + \ldots + Ax_m = id$

$Ax_i \circ Ax_j = 0 \quad (i \neq j)$

$Ax_i^2 = Ax_i$

Теорема: Если $Ax_1 \ldots Ax_m \in L(V)$ – операторы, удовл. условиям:

1) $\sum_1^m Ax_i = id$

2) $Ax_i \circ Ax_j = 0. \ \forall i \neq j$

3) $A^2x_i = Ax_i \quad \forall i = \overline{1, n}$,

Тогда пространство раскладывается в прямую сумму своих подпространств.

31) Собств. вектора

Опр. Любой ненулевой вектор из одномерного подпространства, инвариантного относительно оператора A, наз-ся собственным вектором этого оператора.

$\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ 0 \dots 1 \dots 0 \end{pmatrix}$ $\boxed{Ax = \lambda x}$ - усл.е. собств. вектора

λ - собств. значение оператора A, отв. вектору x.
Таким образом, $Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow x(A - \lambda I) = 0$.
Тогда оператор $A - \lambda I$ необратим, $\Rightarrow |A - \lambda I| = 0$.

Если в каком-нибудь базисе пр-ва V матрицей оператора A является матрица $A = (a_{ij})$, то условие необратимости оператора можно записать в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

В матричной записи ...

По усл. $\det(A - \lambda E) = 0$.

Последняя система имеет нетривиальное решение. Все её решения образуют линейное пространство. Оно совпадает с пр-вом V^λ, где $V^\lambda = \{x \in V | Ax = \lambda x\}$. Его размерность $\dim V^\lambda = n - r$, где $r = \operatorname{rank}(A - \lambda E)$. Разложив опр-ль $\det(A - \lambda E)$, получим многочлен

$$\chi_A(t) = t^n + \chi_1 t^{n-1} + \dots + \chi_{n-1} t + \chi_n, \text{ где } \chi_1, \dots \chi_n \in \mathbb{R}, \ t \text{ - переменная}$$

Все его корни — λ оператора. Он называется характеристическим многочленом матрицы A.
Кратность корня λ — кратность собств. значения.

(32) Билинейная ф-я

Опр. Б. ф. на линейном пр-ве V — функция $B: V \times V \to R$ (V - пр-во над R) такая, что:

1) $B(x+y, z) = B(x, z) + B(y, z)$
2) $B(x, y+z) = B(x, y) + B(x, z)$
3) $B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y)$
4) $B(x, \alpha y) = \alpha B(x, y)$.

Билинейной ф-ей явл. скал. произв.
Пусть $e_1 \dots e_n$ - базис пр-ва V.
$x = x_1 e_1 + \dots x_n e_n$
$y = y_1 e_1 + \dots y_n e_n$

$b(x, y) = (x_1 e_1 + \dots x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) = \sum\limits_{i,j} x_i y_j b(e_i, e_j)$

Обозначим $b(e_i, e_j) = \beta_{ij}$ и составим матрицу:

$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица билин. ф-ии

Рав-во $b(x, y) = \sum\limits_{i,j} x_i b(e_i, e_j) y_j$ можно записать в матричном виде.

$b(x, y) = X^T B Y$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

При переходе к нов. базису базисные векторы 1 сист. выраж. через другую. Котор. соотв-мн. коэф. записываются в матрицу перехода. Пусть есть 2 базиса.

$e = (e_1 \dots e_n)$
$e' = (e_1' \dots e_n')$
S - матр. перехода

Тогда $e' = e \cdot S$

Значит, в новом базисе $X = S X'$, $Y = S Y'$ ~~~~

Запишем $b(X, Y) = X^T B Y = (S X')^T B S Y' = (X')^T \underbrace{S^T B S}\, Y' \Rightarrow B' = S^T B S$ - связь матриц билинейной формы в разных базисах

33. Кв. формы.

Опр. Квадратичной формой на пр-ве V наз-ся ф-я вида $k(x)=b(x,x)$ для некоторой ф-ции $b(x,y)$.

Матрицей кв. формы наз-ся матрица соотв. билинейной функции.

т.к. $k(x)=b(x,x)$
$b(x,y)=x^T B y$. (x,y – столбцы) $\Rightarrow k(x)=X^T BX$,

а после всех вычислений: $k(x)=\beta_{11}x_1^2+2\beta_{12}x_1x_2+\beta_{22}x_2^2+2\beta_{13}x_1x_3+\dots$

Опр. Кв. форма в некотором базисе имеет диагональный вид, если её матрица диагональна, т.е. $k(x)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i^2$.

Теорема: Для каждой кв. формы $\exists$ базис, в котором она имеет диагон. вид.

$\square$ матрицу формы k:

$B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \dots & \beta_{1n}\\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn}\end{pmatrix}$ 1) Пусть $\beta_{11}\neq 0$. Вычитаем 1 строку, умноженную на $\frac{\beta_{i1}}{\beta_{11}}$ из всех лежащих ниже строк. Вычитаем 1 столбец, умнож. на подходящие коэфф-ты из всех столбцов, лежащих правее.

Получим $B_1=\left(\begin{array}{c|c}\varepsilon_1 & 0\dots 0\\ \hline 0 & \\ \vdots & C_1\\ 0 & \end{array}\right)$ Матрица C_1 – это симметричная матр. порядка на 1 меньше, чем исходная.

2) Пусть $\beta_{11}=0$: а) Если $\nexists\, i: \beta_{1i}\neq 0$ и $\beta_{i1}\neq 0$, то матрица B уже имеет вид B_1.

б) Пусть $\beta_{1i}\neq 0$ для некот. i. Тогда строка с номером i перест. с 1, столбец с номером i – с 1; Если $\beta_{ii}=0$ то i-я строка "+" к первой, и i-й столбец прибавл. к 1. В новой матрице $\beta_{11}\neq 0$, снова делаем как раньше.

После k шагов получаем:

$B_k=\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}\varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_i\end{matrix} & 0\\ \hline 0 & C_k\end{array}\right)$, с матр. C_k поступаем так же, как выше.

После всех шагов получим: $B'=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_n\end{pmatrix}$.

Диагональный вид наз-ся каноническим, если все коэфф-ты формы равны $-1, 0, 1$.

(34) + и − кв. формы

Опр. Пусть $V^{(-)}$ — подпространство максимальной размерности среди всех подпространств, на которых квадратная форма отр. опр.

Число $\dim V^{(-)}$ — отриц. индекс. Положит. инд. — аналогично.

Опр. Кв. форма положительно опр. на подпростр. $V' \subseteq V$, если $\forall x \neq 0 \in V$ $k(x) > 0$.

— — — отр. опр. на $V' \in V$, если $\forall x \neq 0 \in V'$ $k(x) < 0$.

Теорема: число отрицательных и положительных коэфф. в каноническом виде не зависит от базиса.

Д-во: Докажем, что если в каком-то базисе форма k приведена к каноническому виду, то число коэфф $= -1$ равно отриц. индексу формы k.
Пусть в базисе $e_1 \dots e_n$ форма k ранга r с индексом S имеет канон. вид

$k(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_j^2 + x_{j+1}^2 + \dots + x_n^2$. Пусть L_1 — лин. оболочка векторов $e_1 \dots e_j$, L_2 — лин. об. векторов $e_{j+1} \dots e_n$. $\forall x \in L_1$ $x_{j+1} = x_{j+2} = \dots = x_n = 0$, $\forall x \in L_2$ $x_1 = x_2 = \dots = x_j = 0$. Тогда $\forall x \in L_1$ $k(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_j^2$ $(x = (x_1 \dots x_n))$ $\forall 0 \neq x \in L_1$ $k(x) < 0$. $\Rightarrow$

Следовательно, форма k отр. опр. на подпр-ве L_1, поэтому её индекс $S \geq j$.

Далее, $\dim L_2 = n - j$. Пусть $\exists$ подпрост. $V^{(-)}$ размерности $S > j$, на котором форма k отриц. опр.

Тогда $\dim L_2 + \dim V^{(-)} = n - j + S = n + (S - j) > n \Rightarrow$

$L_2 \cap V^{(-)} = \{z\}$, $z \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} &k(z) < 0, \text{ т.к. } z \in V^{(-)} \\ &k(z) \geq 0, \text{ т.к. } z \in L_2 \end{aligned}\right| \Rightarrow S = j$$

Число коэфф $= -1$ равно отриц. индексу и не зависит от базиса. Число коэф. $= 1$ равно $n - S$ и не зависит от базиса, т.к. ни V, ни S не зависят от базиса.

(35) Крит. Сильвестра. Δ. преобр.

Для положительно определённой квадратичной формы н. и д., чтобы миноры её матрицы $M_k = \begin{vmatrix} \beta_{11} \dots \beta_{1n} \\ \beta_{n1} \dots \beta_{nn} \end{vmatrix} > 0 \ \forall k = \overline{1,n}$.

Д-во: Следует из св-в определителя, связанных с прибавлением к строке другой строки, умноженной на число.

Преобразование базисных векторов наз-ся треугольным, если новый базис $f_1 \dots f_n$ получается из старого $e_1 \dots e_n$ по ф-лам:

$f_1 = e_1$
$f_2 = \alpha_{21} e_1 + e_2$
$f_n = \alpha_{n1} e_1 + \alpha_{n2} e_2 + \dots + e_n$

Рассмотрим миноры матрицы кв. формы: $M_1 = \beta_{11}$, $M_2 = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$, ...

$M_{n-1} = \begin{vmatrix} \beta_{11} \dots \beta_{n-1} \\ \beta_{n-1\,1} \dots \beta_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}$

Теорема: Пусть миноры $M_1, M_2, \dots M_{n-1}$ отличны от 0. Тогда $\exists$ только одно Δ преобразование базисных векторов, с помощью которого форму k можно привести к каноническому виду.

Д-во: Если форма k в базисе имеет канонич. вид ($\beta_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$), то в этом базисе для док-ва достаточно построить с помощью треугольного преобразования такой базис $f_1 \dots f_n$, в котором $b(f_i, f_j) = 0$ для $i \neq j$.

Треуг. соотн. будут выполнены, если выполнены условия:

$b(e_1 \dots f_j) = 0$
$b(e_2 \dots f_j) = 0 \quad \forall j = 2, 3 \dots n$.
$b(e_j \dots f_j) = 0$

Положим: $f_j = \alpha_{j1} e_1 + \alpha_{j2} e_2 + \dots + \alpha_{j\,j-1} e_{j-1} + e_j$
$b(e_i\, e_j) = a_{ij}$
и запишем ф-лы в развернутом виде.

$$\left.\begin{matrix} \alpha_{j1} a_{11} + \alpha_{j2} a_{12} + \dots + \alpha_{j\,j-1} a_{1\,j-1} \\ \alpha_{j1} a_{j-1\,1} + \alpha_{j2} a_{j-1\,2} + \dots + \alpha_{j\,j-1} a_{j-1\,j-1} + a_{j-1\,j} \end{matrix}\right\} = 0.$$

Надо указать значения α_{ik}, чтобы данные равенства выполнялись, т.е. нужно доказать, что последняя система имеет решение. Но её опр-ль равен M_{j-1}, который по усл $\neq 0$. Значит, она имеет ед. реш. Тогда $\exists$ коэфф. α_{jk}, и поэтому $\exists$ треуг. преобр.

$$\lambda_1 = \mu_1, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \dots \lambda_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} \quad \left(\lambda_j = \beta_{jj} = b(f_j, f_j)\right)$$

36 Евклидовы пр-ва.

Опр. Веществ. лин. пр-во E наз. евклидовым, если в нём определена операция скал. умнож.

$(x, y) : E \cdot E \to \mathbb{R}$.

1) $(x, y) = (y, x)$

2) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$

3) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$

4) $(x, x) > 0$

Т.е. пр-во евклидово, если на нём задана "+" опр. кв. форма

Опр. $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Опр. $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}$ (имеет смысл $\forall$ ненулевых векторов)

Только нулевой вектор ортогонален самому себе.

Только нулевой вектор ортогонален каждому.

Замечание: скалярное произведение может быть записано в виде $(x,y) = X^T \Gamma Y$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} (e_1 e_1) & \dots & (e_1 e_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (e_n e_1) & \dots & (e_n e_n) \end{pmatrix} -$$

матрица Грама базиса $e_1, \dots e_n$

<u>Теорема</u> Пусть $x_1, \dots x_k \in E$, $\dim E = n$

1) Если $x_1, \dots x_k$ — линейно независимы, то

$$\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1 x_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x_k x_1) & \dots & (x_k x_k) \end{vmatrix} > 0.$$

2) Если $x_1 \dots x_k$ — линейно зависимы, то

$$\begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1 x_k) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x_k x_1) & \dots & (x_k x_k) \end{vmatrix} = 0.$$

Докажем только (2):

Пусть $x_1 \dots x_2$ — л.з., тогда $\exists \alpha_1, \dots \alpha_k \in \mathbb{R}_*$ такие, что $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = 0$.

л.к. слева.

2

Найдем k скалярных произведений:

$(0, x_1), \dots (0, x_k)$, где 0 записан в виде линейной комбинации слева

Получим:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(x_1, x_1) + \dots + \alpha(x_1, x_k) = 0 \\ &\overline{\alpha_1(x_k, x_1) + \dots + \alpha(x_k, x_k)} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Это однородная СЛУ относительно $\alpha_1 \dots \alpha_k$

Т.к. она имеет нетривиальное решение, то ее определитель равен нулю.

Базис, в котором квадратичная форма скалярного произведения имеет канонический вид, называется <u>ортонормированным</u>.

Т.к. она положительно определена, матрица Грама ортонормированного базиса — единичная, т.е. $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 1 = 0$ для $i \neq j$ $\Rightarrow$ $e_i \perp e_j$ $i \neq j$ и $\|e_i\| = 1$.

<u>Утверждение</u>: 1) n попарно ортогональных ненулевых векторов $h_1, \dots h_n$ в n-мерном евклидовом пространстве составляют базис

③

2) Разложение любого вектора по этому базису задаётся формулой $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, h_i)}{|h_i|^2} \cdot h_i$ (будет одно из заданий №2 – д-во).

3) $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, h_i)^2}{|h_i|^2}$

Матрица S называется ортогональной, если $S^T S = E$.

Ортогональные матрицы (и только они!) могут служить матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому.

Любая ортогональная матрица порядка 2 имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть E' – подпр-во пр-ва E (E – евклидово)

$\dim E' = k$, $\dim E = n$.

4

$E'^{\perp} = \{x \in E \mid (x, y) = 0$ для всех $y \in E'\}$.

Это множество называется ортогональным дополнением ~~подпространства~~ подпространства E'. Оно является: 1) $E'^{\perp}$ - подпространство

2) $\dim E'^{\perp} = n-k$

$E = \mathbb{R}^3$
(x, y, z)
$E' = (\mathbb{R}, 0, 0)$. $\dim E' = 1$
$E'^{\perp} = (0, \mathbb{R}, \mathbb{R})$. $\dim E'^{\perp} = 2$

Евклидово пространство является прямой суммой любого своего подпространства и его ортогонального дополнения: $E = E' \oplus E'^{\perp}$, таким образом $\forall X \in E$ может быть записан как $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in E'$, $X_2 \in E'^{\perp}$

Пусть $\dim E = n$, $\dim E' = k \Rightarrow \dim E'^{\perp} = n-k$, и рассмотрим ортогональный базис $h_{k+1}, h_{k+2}, \dots h_n$ в $E'^{\perp}$

Тогда $X_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(X, h_i)}{|h_i|^2} \cdot h_i$

Базис Евклидова пр-ва можно превратить в ортогональный:

Пусть $f_1, \dots f_n$ - базис E.

Полагаем $h_1 = f_1$

5

$$h_2 = f_2 - \frac{(f_2, h_1)}{|h_1|^2} \cdot h_1$$

— — — — — — —

$$h_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_{k+1}, h_i)}{|h_i|^2} \cdot h_i$$

Значит, $h_1, \dots h_n$ – ортогон. базис в E.

Процесс, опис. данными ф-лами наз-ся ортогонализацией. Матрица перехода явл. верхней треугольной с единицами на диагонали

Данный базис можно ортонормировать, полагая $e_i = \frac{h_i}{|h_i|}$