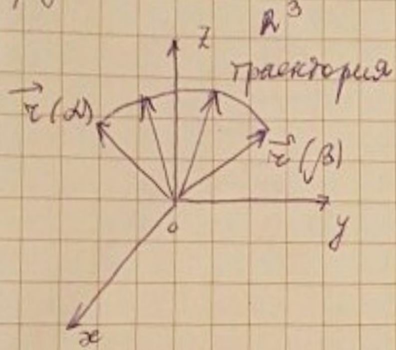
(3) Определение векторной функции скалярного аргумента, предел векторной функции по Коши и по Гейне, свойства пределов.

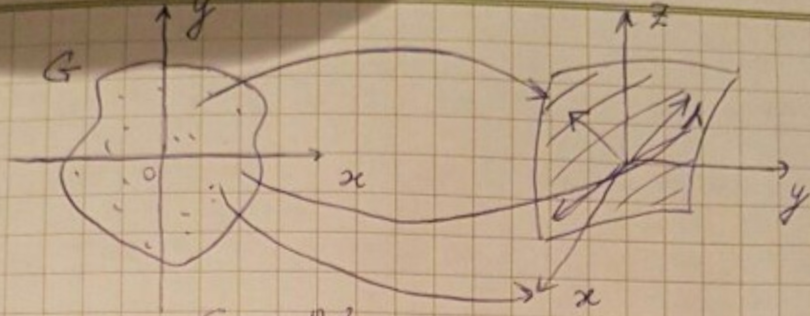
Опр 1.
Если каждому числу $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$, то говорят, что на отр $[\alpha, \beta]$ задана вектор-ф-я скалярного аргумента t: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$.



$\vec{r}(t)$ - координата точечной частицы.

Опр.2.
Если каждой точке $M \in G \subset \mathbb{R}^m$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$, то говорят, что на мн-ве G задана вектор-ф-я нескольких аргументов: $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, ..., q_m)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$

$M(q_1, q_2, ..., q_m)$



$G \subset \mathbb{R}^2$

$n = 3$

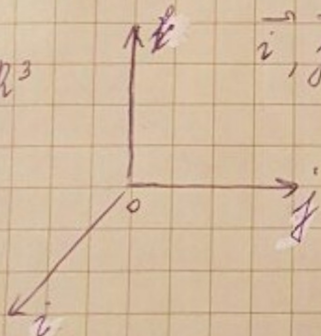
$\vec{r} = \vec{r}(u, v), \ (u, v) \in G$

Отображение

$\vec{r} = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\vec{r}: \ G \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^3$



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (\mathbb{R}^3)$

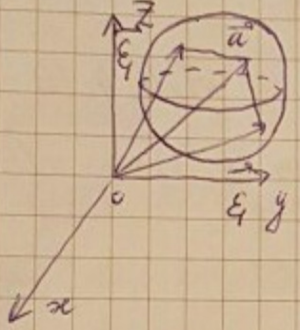
$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}$

$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v) \end{cases}$ (от неск-х переменных u, v)

Определение предела по Коши.

Вектор $\vec{a}$ наз-ся пределом вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в т. $t_0 \in (\alpha, \beta)$, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall t: |t - t_0| < \delta: |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall t: |t - t_0| < \delta): |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon.$$



Определение предела по Гейне.

Вектор $\vec{a}$ наз-ся пределом в.-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в т. $t_0 \in (\alpha, \beta)$, если для $\forall \{t_n\} \xrightarrow[n \to \infty]{} t_0$,

$$\{\vec{r}(t_n)\} \xrightarrow[n \to \infty]{} \vec{a}.$$

Свойства пределов.

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{A}, \quad \lim_{t \to t_0} \vec{g}(t) = \vec{B}, \quad \lim_{t \to t_0} h(t) = c, \quad c - const$$

1) $\lim\limits_{t \to t_0} [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \vec{g}(t) = \vec{A} + \vec{B}.$

② $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) \cdot \vec{f}(t) = c\vec{A}$.

③ $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)) = (\vec{A} \cdot \vec{B})$.

Док-во

$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$.

$\vec{g}(t) = g_1(t)\vec{i} + g_2(t)\vec{j} + g_3(t)\vec{k}$.

$\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)) = \lim\limits_{t \to t_0} [f_1(t) \cdot g_1(t) + f_2(t) \cdot g_2(t) + f_3(t) \cdot g_3(t)] = \underbrace{\lim\limits_{t \to t_0} f_1(t)}_{A_1} \underbrace{\lim\limits_{t \to t_0} g_1(t)}_{B_1} + \ldots = (\vec{A} \cdot \vec{B})$

④ $\lim\limits_{t \to t_0} [\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)] = [\vec{A}, \vec{B}]$

Док-во

$$[\vec{f}(t), \vec{g}(t)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

② Непрерывность векторной функции скалярного аргумента. Действия с непрерывными ф-ями.

Опр. 1

Вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ наз-ся непрерывной в т. $t_0 \in (\alpha, \beta)$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

Ф-я непрерывна на (α, β), если она непр-на в $\forall$ его точке.

Вектор-ф-я нескольких переменных $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_m)$ наз-ся непрерывной в т. $(q_1, q_2, \dots, q_m) \in G$, если $\lim\limits_{(q_1, \dots, q_m) \to (q_1^0, \dots, q_m^0)} \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_m) =$
$= \vec{r}(q_1^0, \dots, q_m^0)$.

Действия с непр-ми функциями.

Пусть вектор-функции $\vec{f}(t)$ и $\vec{g}(t)$ непрерывны на некотором мн-ве, тогда на этом мн-ве непрер-ны и функции:

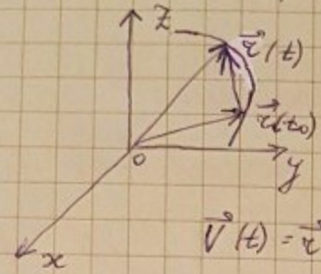
* $\vec{f}(t) + \vec{g}(t)$,
* $\vec{f}(t) - \vec{g}(t)$,
* $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))$
* $\dfrac{\vec{f}(t)}{\vec{g}(t)}$, $\vec{g}(t) \neq 0$.

③ Производная векторной ф-ии скалярного аргумента, её геометрический смысл.

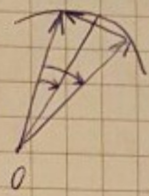
Опр. 1

Производной вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в т. $t_0 \in [\alpha, \beta]$

нау-ся значение предела $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}=\vec{r}\,'(t_0)$



$\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$



$\vec{V}(t)=\vec{r}\,'(t)$

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

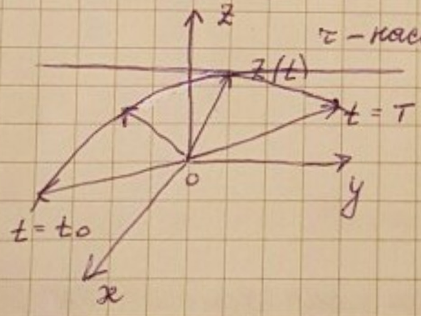
$\vec{r}\,'(t_0)=x'(t)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}$

$\vec{r}\,'(t)=\lim\dfrac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left[\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\vec{i}+\right.$

$\left.+\dfrac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\vec{j}+\dfrac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\vec{k}\right]=$

$=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+k'(t)\vec{k}.$

τ – насательная



Опр. 2.

Вектор-функция $\vec{r}=\vec{r}(t)$ нау-ся дифференц-й в т. $t=t_0$, если $\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)=$
$=\vec{A}\Delta t+\vec{o}(\Delta t)$, где $\vec{A}=\vec{r}\,'(t)$

Дифференциал:

$d\vec{r}(t)=\vec{r}\,'(t)\,dt$

ГС производной.

Опр. 3.

Множ-во концов вектора $\vec{r}(t)$, помещённого началом в т. $O \in \mathbb{R}^3$, наз-ся годографом векторной ф-ии $\vec{r}(t)$

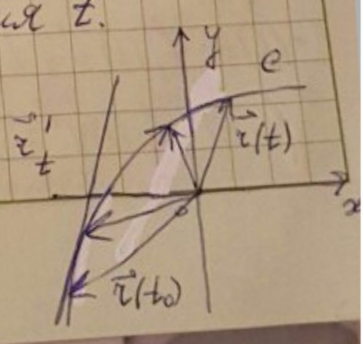
Опр. 4.

Годограф непр-ой вектор-функции назовём кривой C, ф-ю $\vec{r}(t)$ - векторным заданием кривой C или параметризацией кривой C, а аргумент t - параметром.

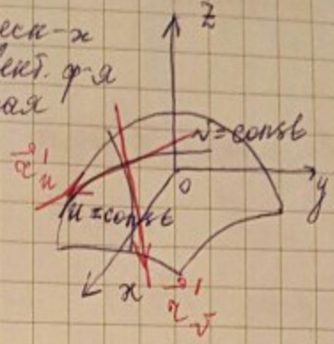
Теорема.

Пусть ориентированная кривая C задана вект-м ур-ем $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где $\vec{r}(t)$ – дифференц-ма в т. $t_0 \in [\alpha, \beta]$

Тогда вектор $\vec{r}\,' = \vec{r}\,'(t)$ касается кривой C в точке, определяемой значением t_0, и направлен в сторону возрастания t.



Для ф-ии неск-х переменных: годограф - вект. ф-я 2-х перем-х, образующая пов-ть.

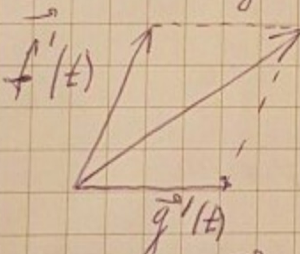


④ Правила дифференцирования векторных ф-ий скалярного аргумента.

$\vec{f}, \vec{g} : [t_0, T] \to \mathbb{R}^3$

$h(t),\ t \in [t_0, T]$

① $[\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t)]' = \vec{f}\,'(t) \pm \vec{g}\,'(t)$



② $[h(t) \cdot \vec{f}(t)]' = h'(t) \cdot \vec{f}(t) + h(t) \cdot \vec{f}\,'(t)$

Док-во:

$(h(t)[f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}])' =$

$= (h(t) \cdot f_1(t)\vec{i} + h(t) f_2(t)\vec{j} + h(t) f_3(t)\vec{k})' =$

$= (h(t) \cdot f_1(t))'\vec{i} + (h(t) \cdot f_2(t))'\vec{j} + (h(t) f_3(t))'\vec{k} =$

$= [\lambda'(t) f_1(t) + \lambda(t) \cdot f_1'(t)]\vec{i} + [\lambda'(t) f_2(t) + \lambda(t) f_2'(t)]\vec{j} +$
$+ [\lambda'(t) f_3(t) + \lambda(t) f_3'(t)]\vec{k} = \lambda'(t)\vec{f}(t) + \lambda(t)\vec{f}'(t).$

③ $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' = (\vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t)) + (\vec{f}(t)\vec{g}'(t)).$

Док-во:

$(\vec{f} \cdot \vec{g})' = (f_1 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3)' =$
$= f_1' g_1 + f_1 g_1' + f_2' g_2 + f_2 g_2' + f_3' g_3 + f_3 g_3' =$
$= (\vec{f}'(t)\vec{g}(t)) + (\vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)).$

④ $[\vec{f}(t), \vec{g}(t)] = [\vec{f}'(t), \vec{g}(t)] + [\vec{f}(t), \vec{g}'(t)]$

Док-во:

$$[\vec{f}(t), \vec{g}(t)]' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}' =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} = [\vec{f}'(t), \vec{g}(t)] + [\vec{f}(t), \vec{g}'(t)].$$

⑤ Ф-ла Тейлора.

$\vec{r} : [t_0, T] \to \mathbb{R}^3$, у которой $\exists$ все производные до $(n+1)$-го порядка в окрестности т. $t^* \in (t_0, T)$

$$\vec{r}(t^*+\Delta t)=\vec{r}(t^*)\Delta t+\frac{1}{2!}\vec{r}''(t^*)(\Delta t)^2+\ldots+$$

$$+\vec{r}^{(n)}(t^*)\frac{(\Delta t)^n}{n!}+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\vec{r}^{(n+1)}(t^*+\theta\Delta t)$$

$$0<\theta<1$$

5 Интегрирование векторной ф-ции скалярного арг-та.

Пусть $\vec{f}:[t_0,T]\to\mathbb{R}^m$ - огранич. ф-я и мн-во точек $P=\{q_0,q_1,\ldots,q_n\}$, таких что

$$t_0=q_0<q_1<\ldots<q_{i-1}<q_i<\ldots<q_n=T,$$

образуют произвольное разбиение сегмента $[t_0,T]$

Составим интегральную сумму

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}\vec{f}(\xi_i)\Delta q_i,$$

где ξ_i - произвольная т. сегмента $[q_{i-1},q_i]$,

$\Delta q_i=q_i-q_{i-1}$.

Обозначим $\lambda(P)=\max\limits_i\Delta q_i$ за период разбиения.

Перейдём к пределу интегральной суммы σ при $\lambda(P)\to 0$, если такой $\lim\ \exists$ и не зависит от способа разбиения сегмента точками, то говорят, что ф-я $\vec{f}(q)$ интегрируема по Риману на $[t_0, T]$, т. е. $\vec{f}(q) \in R[a, b]$. Такой предел наз-ся интегралом от вект. ф-ии $\vec{f}(q)$ по $[t_0, T]$.

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma = \int_{t_0}^{T} \vec{f}(q)\,dq.$$

Свойства $\int$

1) Если $\vec{f}(q) \in C[t_0, T]$, то $\vec{f}(q) \in R[t_0, T]$.

Пусть $\vec{f}(q) \in R(t_0, T]$, $\vec{g}(q) \in R(t_0, T]$, тогда:

2) $$\int_{t_0}^{T} (\alpha \vec{f}(q) + \beta \vec{g}(q))\,dq = \alpha \int_{t_0}^{T} \vec{f}(q)\,dq + \beta \int_{t_0}^{T} \vec{g}(q)\,dq,$$

где $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \vec{f}(q) + \beta \vec{g}(q) \in R[t_0, T]$.

3) $$\int_{t_0}^{T} \vec{f}(q)\,dq = \int_{t_0}^{c} \vec{f}(q)\,dq + \int_{c}^{T} \vec{f}(q)\,dq,$$

где $c \in (t_0, T)$, $\vec{f}(q) \in R[t_0, c]$, $\vec{f}(q) \in R[c, T]$.

4) $$\int_{t_0}^{T} \vec{f}(q)\,dq = \vec{F}(T) - \vec{F}(t_0),$$

Если $\vec{F}'(q) = \vec{f}(q)$ на $[t_0, T]$, то...

6. Определение векторной ф-ии многих переменных. Предел и непрерывность. Понятие годографа.

Опр. 1.

Если каждой точке $M \in G \subset \mathbb{R}^m$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$, то говорят, что на мн-ве G задана вектор-ф-я нескольких аргументов: $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_m)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$

Опр. 2.

Векторная ф-я неск-х перем-х $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_m)$ наз-ся непрерывной в т. $(q_1, q_2, \dots, q_m) \in G$, если $\lim\limits_{(q_1, \dots, q_m) \to (q_1^0, \dots, q_m^0)} \vec{r}(q_1, \dots, q_m) = \vec{r}(q_1^0, \dots, q_m^0)$

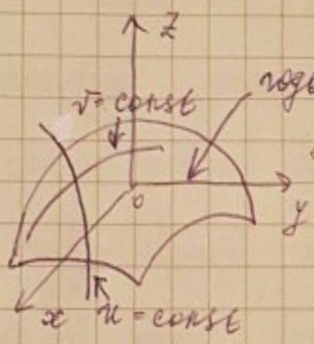
Опр. 3

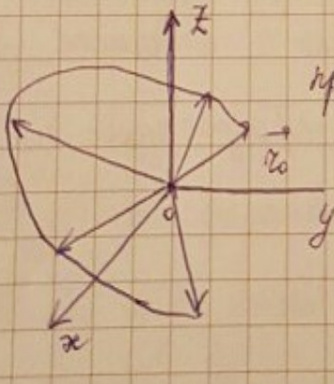
Вектор $\vec{a}$ наз-ся пределом вектор-функции со значениями в $\mathbb{R}^n$, $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, \dots, q_m)$ в т. $M_0(q_1^0, q_2^0, \dots, q_m^0)$, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall M(q_1, q_2, \dots, q_m) : |M - M_0| < \delta : |\vec{r}(M) - \vec{a}| < \varepsilon$

Записывают: $\lim\limits_{(q_1,\dots,q_m)\to(q_1^0,\dots,q_m^0)} \vec{r}\,(q_1,\dots,q_m) = \vec{r}\,(q_1^0,\dots,q_m^0) = \vec{a}$.

Опр. 4.

Множество концов вектора $\vec{r}(t)$ называется годографом векторной функции $\vec{r}(t)$, $t = [t_0, T]$





(7) Дифференцируемость векторной функции многих перем-х! Теорема о существ-и частных производных у дифференц-й ф-ии.

Опр 1.

Вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_m)$ наз-ся дифференцируемой в т. $M = M_0(q_1^0, \dots, q_m^0)$, если её полное приращение представимо в виде:

$$\vec{r}(q_1^0 + \Delta q_1, q_2^0 + \Delta q_2, \dots, q_m^0 + \Delta q_m) - \vec{r}(q_1^0, \dots, q_m^0) = \Delta \vec{r}(M_0) = \sum_{i=1} A_i \Delta q_i + O(\Delta M),$$

где $\vec{A}_i$ - зависят только от координат т. M_0

Теорема

Если ф-я нескольких аргументов дифер-ма в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней конечные частные производные по всем переменным.

Док-во.

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_m)$ диф-ма в т. $M_0(q_1^0, \dots, q_m^0)$

Её полное приращение равно:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(q_1^0 + \Delta q_1, \dots, q_m^0 + \Delta q_m) - \vec{r}(q_1^0, \dots, q_m^0) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i \Delta q_i + \vec{O}(\Delta M)$$

Тогда $\Delta\vec{r} \to 0$ при всех $\Delta q_i \to 0$. Пусть $\Delta q_2 = \Delta q_3 = \ldots =$
$= \Delta q_m = 0$, тогда приращение можно записать:

$$\Delta_{q_1}\vec{r} = \vec{A}_1 \Delta q_1 + \vec{O}(\Delta q_1), \quad \frac{\Delta_{q_1}\vec{r}}{\Delta q_1} = \vec{A} + \frac{\vec{O}(\Delta q_1)}{\Delta q_1}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta q_1 \to 0$:

$$\lim_{\Delta q_1 \to 0} \frac{\Delta_{q_1}\vec{r}}{\Delta q_1} = \lim_{\Delta q_1} \vec{A}_1 + \lim_{\Delta q_1} \frac{\vec{O}(\Delta q_1)}{\Delta q_1} = \vec{A}_1, \text{ т.е.}$$

$\exists$ конечный предел $\lim\limits_{\Delta q_1} \dfrac{\Delta_{q_1}\vec{r}}{\Delta q_1} = \dfrac{\partial \vec{r}(M_0)}{\partial q_1}$.

Аналогично доказыв-ся существ-е конечных
ч.п. $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}(M_0), \ldots, \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_m}(M_0)$.

8 Многомерная формула Тейлора. Остаточный член ф-лы Тейлора.

$\vec{f}: [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $\vec{f}(q) \in C^n[t_0, T]$
и $\vec{f}^{(n+1)}(q)$ существуют в $\forall$ т. $q \in (t_0, T)$.

Если q_0 и q - любые точки из $[t_0, T]$, то
справедлива ф-ла Тейлора:

$$\vec{f}(q) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\vec{f}^{(i)}(q_0)}{i!}(q-q_0)^i + \frac{(q-q_0)^{n+1}}{(n+1)!}\vec{f}^{(n+1)}(\xi),$$

$\xi \in (q_0, q)$

Это ф-ла с остаточным членом Лагранжа,

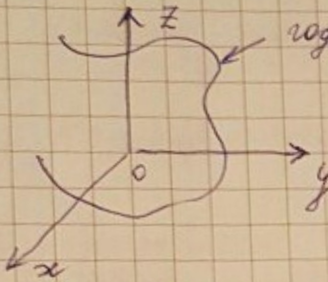
который показывает, какую погрешность мы допускаем при разложении ф-ии $\vec{f}(q)$ в ряд Тейлора. Если ф-я $\vec{f}(q)$ имеет в окрестности т. q_0 непр-е производные до $(n+1)$-го порядка, то для $\forall q$ из этой окрестности найдётся т. $\xi \in (q_0, q)$ такая, что

$$r_n(q) = \frac{(q-q_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Тогда ф-ю можно записать в виде

$$f(q) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(q_0)}{i!}(q-q_0)^i + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(q-q_0)^{n+1}$$

(9) Способы задания пространственной кривой. Определение криволинейного $\int$ 1-го рода, его св-ва



годограф $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

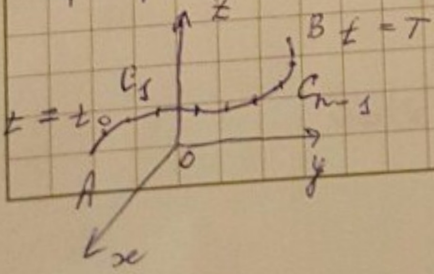
а) $y = f(x)$,
$z = z(x)$ — явное задание

б) $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$ — параметрич-е задание

в) $F(x, y, z) = 0$,
$G(x, y, z) = 0$.

Криволинейные $\int$ 1-го рода.

Пусть на отрезке $[t_0, T]$ задана вектор-ф-я $\vec{r} = \vec{r}(t) : [t_0, T] \Rightarrow R^3$. Годограф этой ф-ии — простр-я кривая AB



$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

$$AB: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ -кусочно-гладкая кривая.

На кривой задана непр-я ф-я:

$f(x,y,z), (x,y,z) \in \smile AB$

Произвольным образом выбираем послед-ть точек $\{c_1, \dots, c_{n-1}\}$, лежащую на кривой AB.

$\smile c_{i-1}c_i$ - элементарная дуга.

Произвольно на каждой дуге $\smile c_{i-1}c_i$ выберем т. $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$

Составим сумму:

$$\lim_{\max_i \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\underbrace{\Delta l_i}_{\text{длина } \smile c_{i-1}c_i} \equiv \int_{AB} f(x,y,z)\,dl -$$

криволинейный $\int$ 1-го рода ($\int$ по длине)

Свойства $\int$

(1) Значение $\int$ не зависит от направления движения по кривой

$$\int_{BA} f(x,y,z)\,dl = \int_{AB} f(x,y,z)\,dl.$$

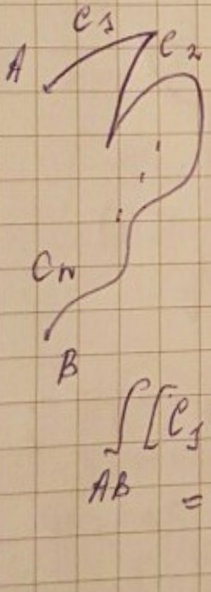
(2) $f(x,y,z)=1$

$$\int\limits_{AB} dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = L_{AB}$$ – длина кривой AB

$\oint f(x,y,z)\,dl$ – $\int$-л по замкнутой кривой C.

(3) Аддитивность.

AB – кусочно-гладкая кривая, $AB = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$



$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{C_i} f(x,y,z)\,dl.$$

(4) Линейность.

$\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{AB} [c_1 f_1(x,y,z) + c_2 f_2(x,y,z)]\,dl = c_1 \int\limits_{AB} f_1(x,y,z)\,dl + c_2 \int\limits_{AB} f_2(x,y,z)\,dl.$$

(5) Оценка интеграла.

$$\left|\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl\right| \le \max_{(x,y,z)\in AB} |f(x,y,z)|$$

грубая оценка.

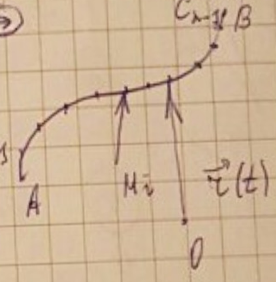
(19) Теорема о вычислении криволинейного $\int$ 1-го рода.

Пусть AB - гладкая кривая, задаваемая ур-ем $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [t_0, T]$, а $f(x, y, z)$ - интегрируема на кривой AB. Тогда справедлива ф-ла:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int_{t_0}^{T} f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Док-во.

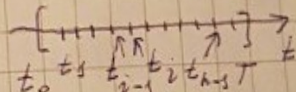
$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta l_i \;\Big|\; \lim_{\max\limits_i \Delta l_i \to 0} \Longrightarrow$$



$c_i\,(t = i)$, $C_{i-1}\,(t = t_{i-1})$

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t)|\,dt \approx$$

$$\approx |\vec{r}(\tau_i)|\,\Delta t_i, \quad t_{i-1} < \tau_i < t_i$$



$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$\Delta l_i \to 0 \Rightarrow \Delta t_i = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{\max\limits_i \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot |\vec{r}\,'(\tau_i)|\,\Delta t_i = \int_{t_0}^{t} f(M) \cdot |\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Замечание.

а) $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

$f(x, y, z) = f(x(t), y(t), z(t))$, $\vec{r}\,'(t) = x'_t\vec{i} + y'_t\vec{j} + z'_t\vec{k}$

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t), y(t), z(t))\cdot\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}$$

б) AB – плоская кривая

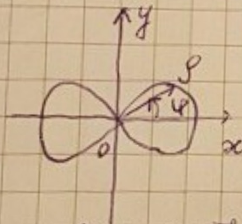
$$y = \varphi(x), \quad x \in [a; b]$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + \varphi(x)\vec{j},$$

$$\vec{r}\,'_x = \vec{i} + \varphi'(x)\vec{j} \Rightarrow |\vec{r}\,'_x| = \sqrt{1 + \varphi'^2(x)}$$

Док-во.

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1+\varphi_x'^2}\,dx$$



$AB:\ \rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$

$$\vec{r} = \rho(\varphi)\cos\varphi\,\vec{i} + \rho(\varphi)\sin\varphi\,\vec{j}$$

$$\vec{r}\,'_\varphi = \rho'(\varphi)\cos\varphi\,\vec{i} - \rho(\varphi)\sin\varphi\,\vec{i} +$$

$$+ \rho'(\varphi)\sin\varphi\,\vec{j} + \rho(\varphi)\cos\varphi\,\vec{j} =$$

$$= [\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi]\,\vec{i} + [\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi]\,\vec{j}$$

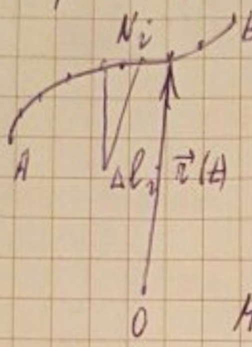
$$|\vec{r}\,'_\varphi| = \sqrt{\rho'^2(\varphi)\cos^2\varphi + \rho^2(\varphi)\sin^2\varphi - \cancel{2\rho'(\varphi)\rho(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi} +}$$

$$\overline{+ \rho'^2(\varphi)\sin^2\varphi + \rho^2(\varphi)\cos^2\varphi + \cancel{2\rho'(\varphi)\rho(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}} =$$

$$= \sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)} \Rightarrow$$

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

Приложение $\int$.



Стержень массы M с заданной линейной плотностью $\rho = \rho(\vec{r})$.

$$\Delta M_i \approx \rho(N_i)\Delta l_i$$

$$M = \lim_{\max\limits_i \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta M_i = \lim_{\max\limits_i \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(N_i)\Delta l_i =$$

$$= \int\limits_{AB} \rho(x,y,z)\,dl,$$

$$\vec{r}_{ц.м} = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} \rho(x,y,z)\vec{r}\,dl,$$

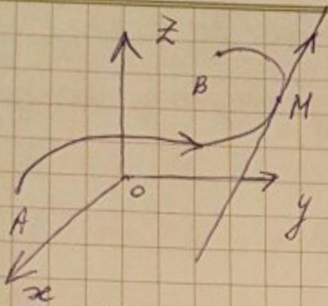
$$x_{ц.м.} = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} \rho(x,y,z)\,x\,dl,$$

$$y_{ц.м.} = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} \rho(x,y,z)\,y\,dl,$$

$$z_{ц.м.} = \frac{1}{M}\int\limits_{AB} \rho(x,y,z)\,z\,dl.$$

11 Определение криволинейного $\int$ 2-го рода. Его св-ва.

Пусть задана гладкая пространственная кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [t_0, T]$.



$\vec\tau$ – ед. вектор касат-й к кривой AB.

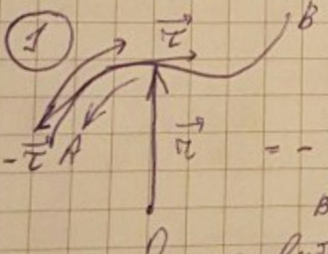
$\vec r\,'(t) \uparrow\uparrow \vec\tau$

$$\vec\tau = \frac{\vec r\,'(t)}{|\vec r\,'(t)|}$$

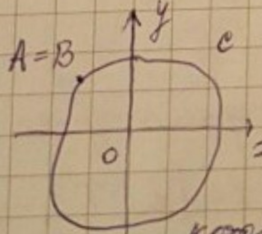
Пусть на кривой AB задана огранич-я вектор-функция $\vec A(M)$, где $M \in \smile AB$.

Тогда $\int\limits_{AB} (\vec A(M), \vec\tau)\,dl$ – криволинейный $\int$ 2-го рода

Свойства.



1 $\int\limits_{AB} (\vec A(M), \vec\tau)\,dl = \int\limits_{BA} (\vec A(M), -\vec\tau)\,dl = -\int\limits_{BA} (\vec A(M), \vec\tau)\,dl$, т.е. $\int$ зависит от выбранного обхода на кривой.



Положит. направление обхода кривой C – направление, при котором область, охватываемая кривой, остаётся по левую руку от движения (против ч.с).

Отрицательное напр-е - обратное (по ч. с.)

$$\oint_C (\vec{A}(M), \vec{\tau})\, dl \text{ – } \int \text{ по замкнутому контуру}$$

② Аддитивность

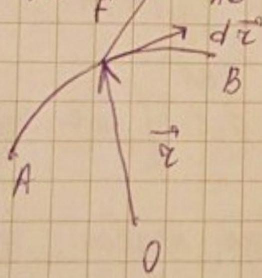
③ Линейность.

④ Физич. приложение

Рассмотрим силовое поле:

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

$$A = \int_{AB} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$



Потенциальная сила $\vec{F}$:

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = 0.$$

⑤ Вычисление.

Пусть кривая AB задана векторным ур-ем:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [t_0, T].$$

$$\vec{A}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}, \quad M \in \smile AB.$$

$$\int_{AB} (\vec{A}(M), \vec{\tau})\, dl = \int_{AB} \left(\vec{A}(M), \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}\right) |\vec{r}\,'(t)|\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} (\vec{A}, \vec{r}\,') \, dt = \int_{t_0}^{T} \Big[P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) +$$

$$+ Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t) \Big] dt =$$

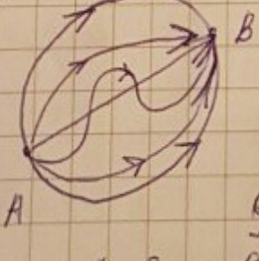
$$= \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$$\begin{cases} dx = x'_t\, dt, \\ dy = y'_t\, dt, \\ dz = z'_t\, dt \end{cases}$$

12) Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU \qquad U = U(x, y, z)$$

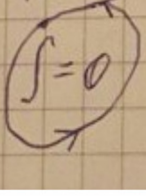
$$\int_{AB} dU(x,y,z) = U(x,y,z)\Big|_A^B = U(B) - U(A)$$



Потенциальный случай:

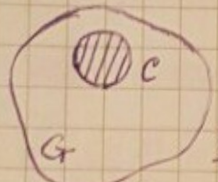
U – потенциал.

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$



Опр. 1. Обл. G - односвязная, если для $\forall$ замкнутого контура C, лежащего в G, область, ограниченная этим контуром, принадлежит G.

Теорема.

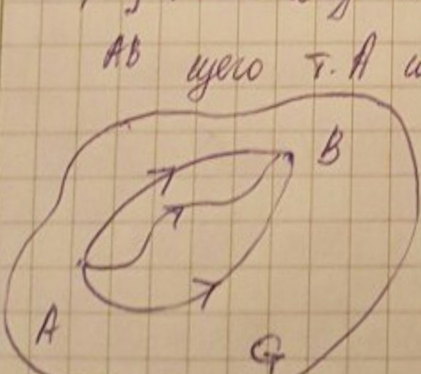


Пусть $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(G \cup \Gamma)$, $\exists \frac{\partial P}{\partial y}$ и $\exists \frac{\partial Q}{\partial x}$

Тогда следующие четыре условия равносильны между собой:

1) $\oint\limits_C P dx + Q dy = 0$, где C - $\forall$ замкнутый контур в G.

2) $\int\limits_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от пути, соединяющего т. A и т. B в обл. G.



3) Выражение: $Pdx + Qdy = dU(x,y)$, где (являлось полным диф-лом от некот-й ф-ии)

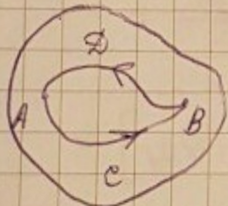
$U(x,y)$ - однозначно в обл. G.

4) Всюду в обл. G:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Док-во.

$1^\circ \to 2^\circ$.



$$\oint\limits_{ACBD} Pdx + Qdy = 0$$

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BDA} Pdx + Qdy = 0$$

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy - \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy = 0$$

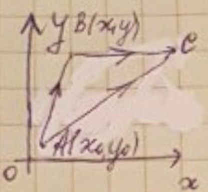
$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy$$ - не зависит от пути!

$2^\circ \to 3^\circ$:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = U(x,y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x}$$

$$V(x+\Delta x, y) - V(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy =$$



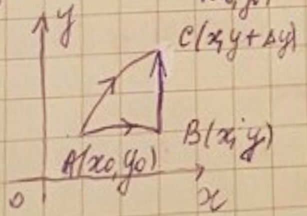
$$= \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx + \underbrace{Q\,dy}_{=0} = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_1\,dx \overset{\text{т.о средн.}}{=}$$

$$= P(x+\Delta x, y)\,\Delta x.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x+\overset{\to 0}{\Delta x}, y)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = P(x,y).$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{V(x, y+\Delta y) - V(x,y)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y}\left[\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y+\Delta y)} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy\right] =$$



$$= \lim_{\Delta y \to 0} \int\limits_{(x,y)}^{(x,y+\Delta y)} P\underbrace{dx}_{=0} + Q\,dy =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{Q(x, y+\overset{\to 0}{\Delta y})\cancel{\Delta y}}{\cancel{\Delta y}} = Q(x,y)$$

Т.о., $\exists \dfrac{\partial V}{\partial x} = P,$

$\exists \dfrac{\partial V}{\partial y} = Q.$ $\quad \Rightarrow \exists\, dV$

$$dV(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy,$$

ч.т.д.

$3^\circ \to 4^\circ$:

$$dU = P\,dx + Q\,dy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} = P \;\Big|\; \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q \;\Big|\; \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} \\ &\;\;(\text{II}) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned} \text{ ч.т.д.}$$

$4^\circ \to 1^\circ$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \oint P\,dx + Q\,dy = \iint \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy$$

(по ф-ле Грина).

13 Отыскание функции по её полному дифференциалу

Теорема.

Пусть $P(x,y), Q(x,y) \in C^1(G \cup \Gamma)$, $\exists \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тогда, чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ было полным диф-лом некой ф-ии $U(x,y)$, необх. и достаточно, чтобы в G выполнялось условие:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При этом ф-я восстанавливается по полному диф-лу с помощью криволинейного $\int$ 2-го рода:

$$U(x,y) = \int\limits_{A(x_0,y_0)}^{B(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

Док-во:

1) Необходимость.

$P\,dx + Q\,dy = dU$, след-но $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$; $Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

$$\| \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

2) Достаточность.

Т.к. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ не зависит от пути интегрирования, след-но,

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = P\,dx + Q\,dy$$

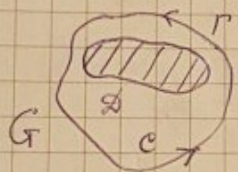
(из пункта 3° из вопроса 12.)

След-но, $V(x,y) = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$, ч.т.д.

(14) Формула Грина

Теорема.

Пусть G — простая односвязная область на $\mathbb{R}^2$, а $P(x,y)$ и $Q(x,y) \in C^1(G \cup \Gamma)$
непрерывны.

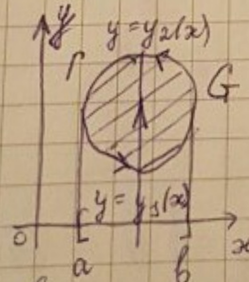


$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy -$$

ф-ла Грина.

Док-во

а)



$$\iint\limits_C \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int\limits_a^b P(x, y_2(x))\,dx -$$

$$- \int\limits_a^b P(x, y_1(x))\,dx = -\left[\int\limits_b^a P(x, y_2(x))\,dx + \int\limits_a^b P(x, y_1(x))\,dx\right] =$$

$$= -\oint\limits_\Gamma P\,dx$$

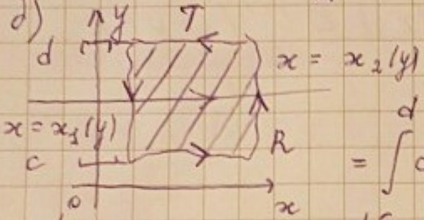
положит. направление обхода

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_\Gamma P\,dx$$

$$\iint_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_{\Gamma_i} P\,dx.$$

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_i} P\,dx = \oint_\Gamma P\,dx.$$

б)

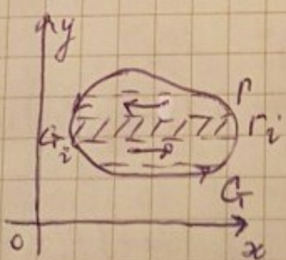


$$\iint_T \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx =$$

$$= \int_c^d Q(x_2(y), y)\,dy - \int_c^d Q(x_1(y), y)\,dy =$$

$$= \int_c^d Q(x_2(y), y)\,dy + \int_d^c Q(x_1(y), y)\,dy = \oint_R Q\,dy$$

$$\iint_T \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_R Q\,dy.$$



$$\iint_{G_i} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_{\Gamma_i} Q\,dy \quad (i = \overline{1,n})$$

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_i} Q\,dy = \oint_\Gamma Q\,dy.$$

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy, \text{ ч.т.д.}$$

Вычисление площадей плоских фигур

$$S_D = \iint_D dx\,dy \overset{①}{=} \oint_C x\,dy \overset{②}{=} -\oint_C y\,dx \overset{③}{=}$$

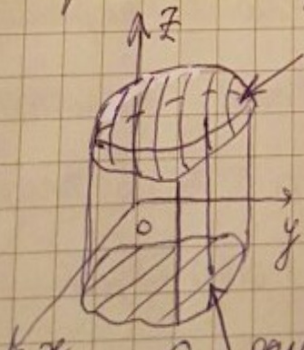
$$= \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \Big(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{\Downarrow}\Big)\,dx\,dy.$$

① $\begin{cases} Q = x, \\ P = 0 \end{cases}$ ② $\begin{cases} Q = 0, \\ P = -y \end{cases}$ ③ $\begin{cases} Q = \frac{x}{2} \\ P = -\frac{y}{2} \end{cases}$

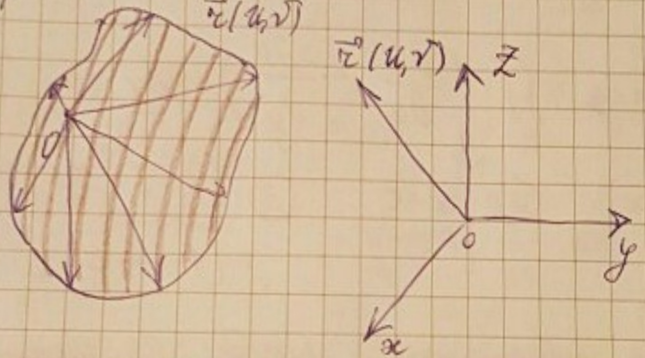
15 Понятие поверхности, способы её задания в трёхмерном пространстве. Двусторонние и односторонние поверхности. Вывод ур-я тора.



$(x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2$

общая пов-ть (составная)

Поверхность – геометрическое место точек, описываемое концами вектора $\vec{r}(u,v)$, где параметры u, v принимают значения из G ~ годограф вектор-ф-ии двух переменных $\vec{r}: G \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.



$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}.$$

1) Поверхность наз-ся простой, если её параметризация $\vec{r}: G \to \mathbb{R}^3$ осуществляет взаимно-однозначное отображение области G в плоскости в трёхмерное простр-во $\mathbb{R}^3$ (отсутствуют участки касания и самопересечения).

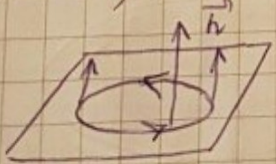
2) Простая пов-ть наз-ся кусочно-гладкой, если её параметризация непрерывно

диффер-мая ф-я в G за исключением конечного числа кривых в G (состоит из конечного числа её гладких частей.

3) Простая пов-ть - гладкая, если её параметризация непр-но диф-мая ф-я в G. (во всех точках имеет касат-ю плоскость).

4) Если есть хотя бы один замкнутый контур, при обходе по которому нормаль к поверх-ти меняет положение на обратное, то поверх-ть - односторонняя. (лента Мёбиуса)

5) Если нормаль не меняет своего направления, то поверх-ть - двусторонняя.



(обход по $\forall$ замкнутому контуру на пов-ти не имеющему общих точек с границей, не меняет направление нормали)

Способы задания.

1) Векторное задание

$$\vec r = \vec r(u,v) = x(u,v)\vec i + y(u,v)\vec j + z(u,v)\vec k.$$

$$(u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$$

2) Параметрическое

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in G \subset \mathbb{R}^2$$

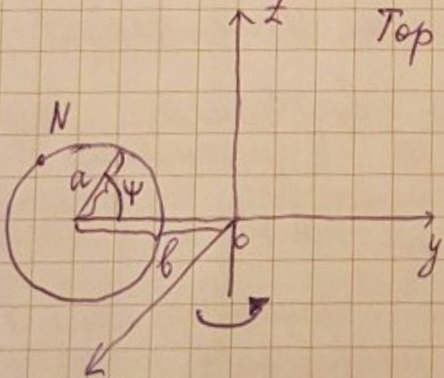
3) Явное

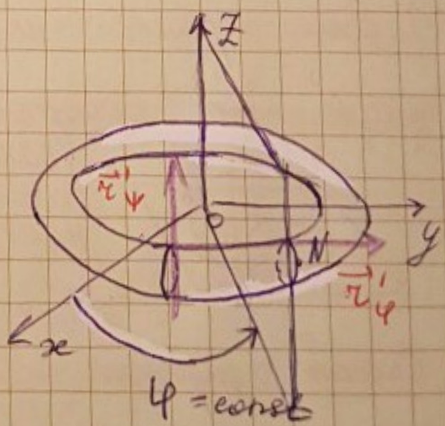
$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = z(x,y) \end{cases} \quad (x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2$$

4) Неявное

$$F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0.$$

Тор





$$r = b + a\cos\psi$$

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \psi \leq 2\pi \end{cases}$$

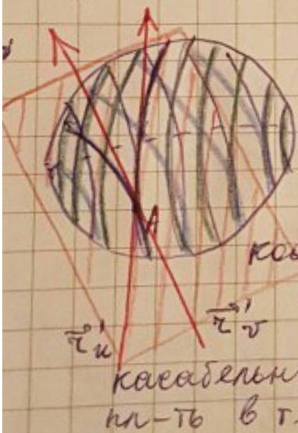
$$\begin{cases} z = a\sin\psi, \\ y = (b+a\cos\psi)\sin\varphi, \\ x = (b+a\cos\psi)\cos\varphi \end{cases}$$

– ур-е тора в параметрич. виде.

$$\vec{r} = (b+a\cos\psi)\cos\varphi\,\vec{i} + (b+a\cos\psi)\sin\varphi\,\vec{j} + a\sin\psi\,\vec{k}.$$

(16) Кривые на поверхности. Нормаль и касат-я плоскость к гладкой поверхности.

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ – вектор-функция, годограф которой определяет гладкую пов-ть ($\exists\, \vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v$).



$\vec{r} = \vec{r}(u, v_0)$ $\quad \vec{r}\,'_u(u_0, v_0)$,

$\vec{r} = \vec{r}(u_0, v)$ $\quad \vec{r}\,'_v(u_0, v_0)$

$A(u_0, v_0)$

$\vec{r}(u(t), v(t))$

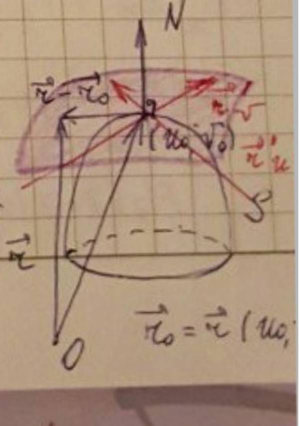
$$\vec{r}\,'_t = \vec{r}\,'_u \cdot u'_t + \vec{r}\,'_v \cdot v'_t.$$

$$\vec{N} = [\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]$$

перпендикуляр к касат-й плоскости.

$\vec{N} \perp \vec{r}\,'_u$,

$\vec{N} \perp \vec{r}\,'_v$



Уравнение касательной плоскости.

$(\vec{N}, \vec{r}-\vec{r_0})=0$, где $\vec{N}=[\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]\Big|_{\substack{u=u_0\\ v=v_0}}$

$S: z=z(x,y)$

$\vec{r}=\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+z(x,y)\vec{k}$.

$\vec{r}'_x=\vec{i}+z'_x(x_0,y_0)\vec{k}$,

$\vec{r}'_y=\vec{j}+z'_y(x_0,y_0)\vec{k}$.

$\vec{N}=[\vec{r}'_x, \vec{r}'_y]=[\vec{i}+z'_x(x_0,y_0)\vec{k}, \vec{j}+z'_y(x_0,y_0)\vec{k}]=$

$=\underbrace{[\vec{i},\vec{j}]}_{\vec{k}}+z'_x(x_0,y_0)[\vec{k},\vec{j}]+z'_y(x_0,y_0)[\vec{i},\vec{k}]+$

$+z'_x(x_0,y_0)\cdot z'_y(x_0,y_0)\underbrace{[\vec{k},\vec{k}]}_{0}=-z'_x(x_0,y_0)\vec{i}-$

$-z'_y(x_0,y_0)\vec{j}+\vec{k}$.

$\vec{r}-\vec{r_0}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$.

$-(x-x_0)z'_x(x_0,y_0)-(y-y_0)z'_y(x_0,y_0)+z-z(x_0,y_0)=0$

$z-z(x_0,y_0)=z'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+z'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

$S: F(x,y,z)=0$ – неявное задание.

$dF=0$.

$F'_x dx+F'_y dy+F'_z dz=0$, $dz=-\underbrace{\frac{F'_x}{F'_z}}_{\frac{\partial z}{\partial x}}dx-\underbrace{\frac{F'_y}{F'_z}}_{\frac{\partial z}{\partial y}}dy$

$z-z(x_0,y_0)=-\frac{F'_x}{F'_z}(x-x_0)-\frac{F'_y}{F'_z}(y-y_0)$

$F'_z(z-z(x_0,y_0))+F'_y(y-y_0)+F'_x(x-x_0)=0$.

$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

$$\vec{N} = [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

(u_0, v_0)

Нормаль к касательной пл-ти (нормаль к S).

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$u = x,$
$v = y.$

$$A = \begin{vmatrix} y'_x & z'_x \\ y'_y & z'_y \end{vmatrix} = \overset{=0}{y'_x} z'_y - z'_x \overset{=1}{y'_y} = -z'_x.$$

$$B = \begin{vmatrix} z'_x & x'_x \\ z'_y & x'_y \end{vmatrix} = -z'_y,$$

$$C = \begin{vmatrix} x'_x & y'_x \\ x'_y & y'_y \end{vmatrix} = 1$$

$$\vec{N} = -z_x \vec{i} - z_y \vec{j} + \vec{k}.$$

$$\cos\alpha = -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}, \quad \cos\beta = -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

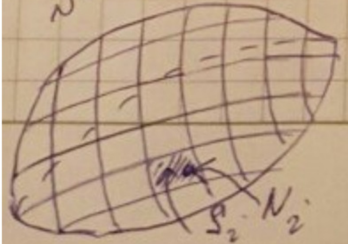
$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$ — направл-е косинусы нормали.

17 Определение поверхностного $\int$ 1-го рода, его сведение к двойному.

S - ограниченная поверхность в $\mathbb{R}^3$, кусочно-гладкая.

Пусть $f(M)$ - скалярная ф-я, заданная на S $(M \in S)$, ограниченная на S.

Разобьем пов-ть S кусочно-гладкими кривыми на n частей: $S_1, S_2, \ldots, S_n$



$i = \overline{1,n}$, $d(S_i)$ - диаметр эл-та S_i,

ΔS_i - площадь S_i, т. $N_i \in S_i$

Составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\,\Delta S_i$$

Если $\exists$ конечный предел интегральной суммы при $\max d(S_i) \to 0$, то этот предел наз-ся поверхностным $\int$ 1-го рода и обознач-ся:

$$\lim_{\max d(S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\,\Delta S_i = \iint_S f(N)\,dS.$$

* $N(x,y,z)$, $(x,y,z) \in S$

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS$$

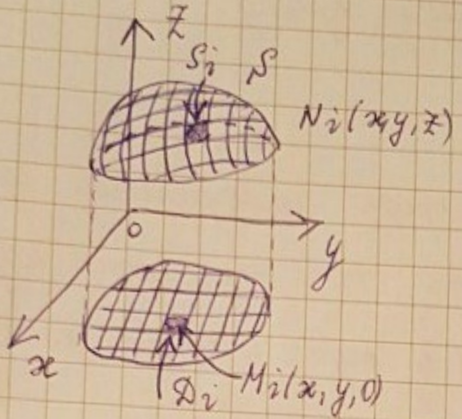
Сведение пов-го $\int$ 1-го рода к 2-му.

Теорема.

Пусть S - гладкая ограниченная пов-ть, задаваемая ур-ем $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$, а $f(x,y,z)$ - некоторая ограниченная ф-я, определённая на S. Тогда справедлива ф-ла.

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

Док-во.



$$f(N_i) = f(x_i, y_i, z_i) = f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))$$

$$z_i = z(x_i, y_i) = z(M_i)$$

т.о. среднем

$$\Delta S_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\,dy = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, \Delta x_i \Delta y_i$$

$$\star \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta S_i \to S_{пов} - \text{площадь } S$$

$$\star \sum_{i=1}^{n} f(N_i) \Delta S_i \overset{1.\ N_i(x_i^*, y_i^*)}{=} \sum_{i=1} f(x, y, z(x,y)) \times$$

$$\times \sqrt{1 + z_x'^2(x_i^*, y_i^*) + z_y'^2(x_i^*, y_i^*)}\, \Delta x_i \Delta y_i$$

$$\lim_{\max d(S_i) \to 0} \sum \ldots = \iint\limits_{D} f(x, y, z(x,y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\, dx\,dy, \text{ ч.т.д.}$$

Следствия

$$\cancel{\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}}$$

$\star$ $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_D \frac{f(x,y,z(x,y))}{\cos\gamma}\,dx\,dy = \iint\limits_D \frac{f(x,y,z(x,y))}{\cos(\vec{n}, z)}\,dx\,dy$$

$\star$ $x = x(y,z)$, $(y,z) \in G$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G \frac{f(x(y,z),y,z)}{\cos(\vec{n}, x)}\,dy\,dz$$

$\star$ $y = y(x,z)$, $(x,z) \in T$.

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_T \frac{f(x,y(x,z),z)}{\cos(\vec{n}, y)}\,dx\,dz.$$

Параметрич. задание.

$S: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_S f(M)\,dS = \iint\limits_\Omega f(M)\,\underbrace{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|}_{|\vec{N}|}\,du\,dv = \iint\limits_\Omega f(M)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,du\,dv.$$

Для кусочно-гладкой ф-ии из $\overbrace{m \text{ кусков}}^{\text{гладких}}$:

$$\iint\limits_S f(M)\,dS = \sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{S_i} f(M)\,dS$$

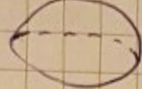
S

S_i

(18) Физические приложения поверхностного $\iint$ 1-го рода

(1) Вычисление площади

$$\iint\limits_S dS = S_{пов}$$

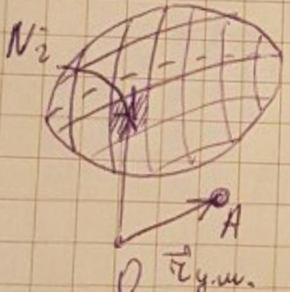


(2) Масса оболочки.

$\rho = \rho(N)$ - плотность

$$\Delta M_i \approx \rho(N_i)\Delta S_i$$

$$M = \lim_{\max\limits_i d(S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(N_i)\,\Delta S_i = \iint\limits_S \rho(N)\,dS \quad N \in S$$



(3) центр тяжести оболочки.

$A(x_{цм}, y_{цм}, z_{цм})$

$$x_{ц.м.} = \frac{1}{M}\iint\limits_S x\rho(N)\,dS$$

$$y_{ц.м.} = \frac{1}{M}\iint\limits_S y\rho(N)\,dS$$

$$z_{цм} = \frac{1}{M}\iint\limits_S z\rho(N)\,dS$$

$$\vec{r}_{цм} = x_{цм}\vec{i} + y_{цм}\vec{j} + z_{цм}\vec{k} = \frac{1}{M}\iint \vec{r}\rho(N)\,dS$$

Пусть S - кусочно-гладкая пов-ть и S

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} -$$

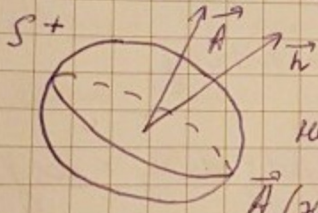
вектор-ф-я, заданная на S; P, Q, R - огранич-е ф-ии. Тогда под интегралом $\iint\limits_S \vec{A}(N)\,dS$ понимается сумма:

$$\vec{i}\iint\limits_S P(N)\,dS + \vec{j}\iint\limits_S Q(N)\,dS + \vec{k}\iint\limits_S R(N)\,dS.$$

(19) Определение поверхностного интеграла 2-го рода. Его свойства.

Пусть S - гладкая двусторонняя поверхность с выбранным направлением нормали $\vec{n}$ (с выбр-й стороной пов-ти):

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}.$$



Пусть на S определена непрерывная вектор-функция:

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Тогда поверхностный интеграл:

$$\iint\limits_{S^+}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iint\limits_S (\vec{A}(x,y,z), \vec{n})\,dS -$$

пов-й $\int$ второго рода.

Пусть $f(M) = (\vec{A}(M), \vec{n}(M))$, $M \in S$, тогда:

$$\iint\limits_{S^+} f(M)\,dS = \iint\limits_S (\vec{A}(N), \vec{n}(M))\,dS$$

* Пов-й $\int$ 2-го рода зависит от выбранной стороны поверхности, причём при переходе с одной стороны на другую меняет знак на противоположный ($\iint_{S^-}(\vec{A},\vec{n})\,dS = -\iint_{S^+}(\vec{A},\vec{n})\,dS$)

В декартовой системе коорд-т:

$$\vec{A}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

$$\vec{n}(M) = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}.$$

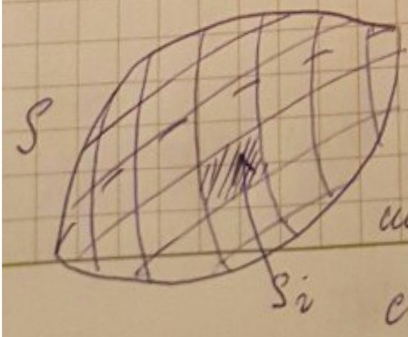
$\Downarrow$

$$\iint_{S^+}(\vec{A}(M),\vec{n}(M))\,dS = \iint_{S^+}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy,$$

$dy\,dz = \cos\alpha\,dS$, $dx\,dz = \cos\beta\,dS$, $dx\,dy = \cos\gamma\,dS$ - проекции dS на плоскости yz, zx, xy

* Физический смысл.



Пусть в простр-ве $\mathbb{R}^3$ движется жидкость, частицы которой имеют в каждой точке скорость $\vec{v}$.

Вычислим количество жидкости через двусторонною пов-ть S в указанную сторону за ед. времени (т.е. поток поля скоростей $\vec{v}$.)

Разобьем S кусочно-гладкими кривыми на n ячеек S_i $(i=\overline{1,n})$. Скорость частиц жидкости через ячейку S_i постоянна и равна $\vec{v}(M_i)$, $M_i \in S_i$, тогда поток через S_i: $\Pi \approx (\vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i))\Delta S_i$, $\vec{n}(M_i)$ - нормаль выбранной стороны (напр-е потока).

Поток через всю пов-ть S:

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i))\Delta S_i$$

$$\Pi = \lim_{\max\limits_i d(S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}(M_i), \vec{n}(M_i))\Delta S_i = \iint\limits_S (\vec{v}(M), \vec{n}(M))dS$$

поток (за единицу времени) жидкости через S.

* Вычисление

а) в параметрич. виде:

$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{A}, \vec{n})\,dS = \iint\limits_{\Omega} (\vec{A}, \vec{r}'_u, \vec{r}'_v)\,du\,dv.$$

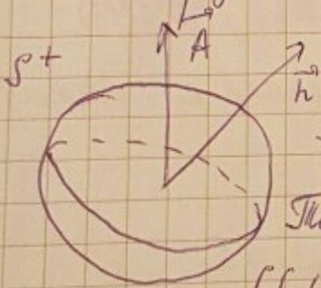
б) Явное задание:

$z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{A}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_{D} [R(x,y, z(x,y)) - P(x,y, z(x,y))\, z'_x - Q(x,y, z(x,y))\, z'_y]\, dxdy$$

(20) Сведение поверхностного $\int$ 2-го рода к двойному.

Пусть S - гладкая двусторонняя пов-ть с $\vec{n} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$ выбранным направлением нормали $\vec{n}$. На S определена непр-я вектор-функция



$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}.$$

Тогда пов-й интеграл

$$\iint\limits_{S^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS$$ сводится

к поверхностному $\int$ 2-го рода:

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{A}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_{S} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy$$

$dydz = \cos\alpha\, dS$, $dzdx = \cos\beta\, dS$, $dxdy = \cos\gamma\, dS$.

б) S задана в параметрич. виде:

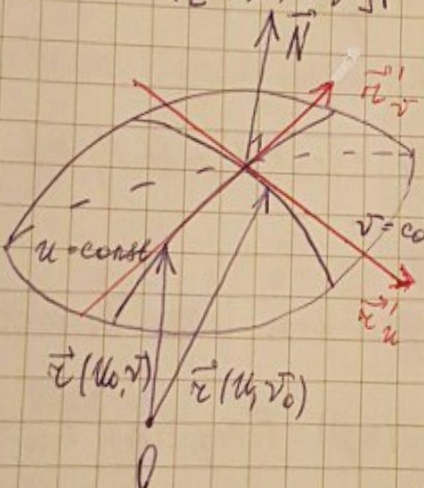
$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{A}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_{\Omega} (\vec{A}, \vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v)\, du\, dv$$

Док-во.

S^+ – гладкая пов-ть с определённой нормалью.

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]}{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}.$$



Тогда:

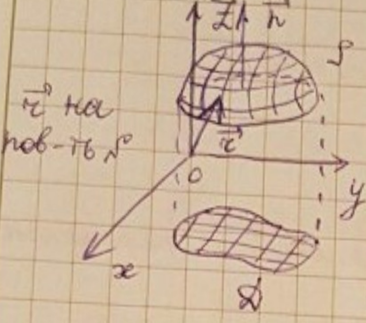
$$\iint\limits_{S} f(M)\, dS = \iint\limits_{\Omega} f(\vec{r})\, \underbrace{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|\, du\, dv}_{dS}$$

$$\iint\limits_{S^+} (\vec{A}, \vec{n})\, dS = \iint\limits_{\Omega} \left(\vec{A}, \frac{[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]}{\cancel{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|}}\right) \cancel{|[\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v]|}\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} (\vec{A}, [\vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v])\, du\, dv = \iint\limits_{\Omega} (\vec{A}, \vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v)\, du\, dv$$

б) Явное задание поверхности S:

$z = z(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} =$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,y)\vec{k}$$

$u = x,$
$v = y.$

$$\vec{r}'_x = \vec{i} + z'_x\vec{k},$$
$$\vec{r}'_y = \vec{j} + z'_y\vec{k}$$

$$(\vec{A}, \vec{r}'_x, \vec{r}'_y) = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = -Pz'_x - Qz'_y + R$$

Тогда поверх-й интеграл 2-го рода вычисл-ся:

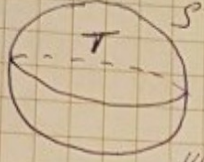
$$\iint_{S^+} (\vec{A}, \vec{n})\,dS = \iint_D \Big(R(x,y,z(x,y)) - P(x,y,z(x,y))\,z'_x -$$
$$- Q(x,y,z(x,y))\,z\Big)\,dx\,dy$$

21 **Формула Гаусса-Остроградского.**

Теорема

Пусть S - замкнутая кусочно-гладкая

двусторонняя поверхность, а $\vec{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ - внешняя нормаль к S, замыкающей простую обл. T, $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ -



функции, непрерывные в замкнутой области $T \cup S$, имеющие непрер-е производные 1-го порядка в обл. T.

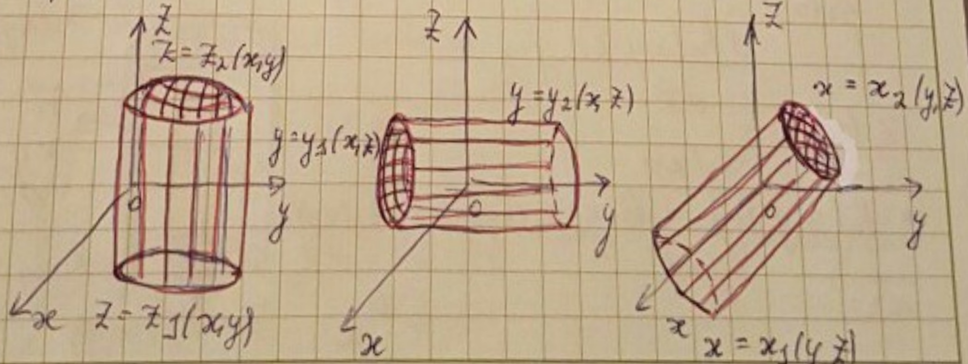
Тогда справедлива ф-ла Г.-О.:

$$\oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

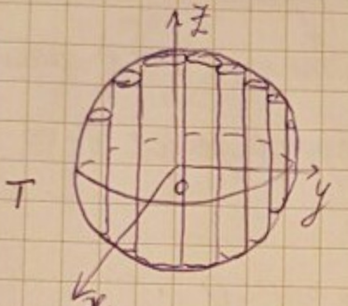
Док-во:

Опред-е 1.



z-цилиндрическая пов-ть. y-цилиндрическая пов-ть. x-цилиндрическая пов-ть.

Область $T \subset \mathbb{R}^3$ наз-ся простой, если её можно представить в виде конечной совокупности как Z-цилиндрич., так и x-цилиндрич., и y-цилиндрич. областей.

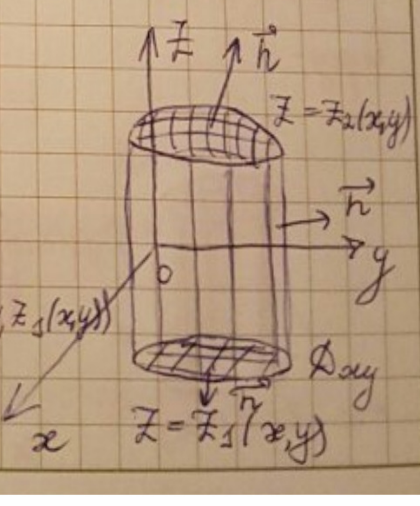


Возьмём Z-цилиндрич. область, состоящую из верхней пов-ти $Z = Z_2(x,y)$, нижней пов-ти $Z = Z_1(x,y)$ и боковой цилиндрич. поверхности. Проведём внешнюю нормаль.

Вычислим интеграл:

$$\int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,Z)}{\partial Z}\, dZ =$$

$$= R(x,y,Z)\Big|_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} = R(x,y,Z_2(x,y)) - R(x,y,Z_1(x,y))$$



$$\iint\limits_{D_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} [R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))]\,dx\,dy$$

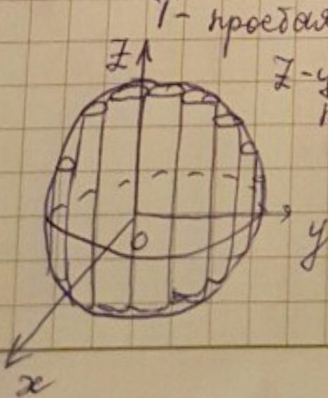
$$\star \iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\,dx\,dy -$$
$$- \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\,dx\,dy = \iint\limits_{S_{верх} \cup S_{нижн}} R(x,y,z)\cos\gamma\,dS =$$
$$= \oiint\limits_S R\cos\gamma\,dS.$$ (т.к. к боковой пов-ти нормаль $\perp z$)

$$\star \iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S R\cos\gamma\,dS$$ – z-цилиндрич. I

$$\star \iiint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S Q\cos\beta\,dS$$ – y-цилиндрич. II

$$\star \iiint\limits_T \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_S P\cos\alpha\,dS$$ – x-цилиндрич. III

T – простая область.



z-цилиндрич-я пов-ть.

$$\iiint\limits_{T_i} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{S_i} R\cos\gamma\,dS \quad i=\overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \iiint_{T_i} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz = \iiint_{T} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\,dy\,dz.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \oiint_{S_i} R\cos\gamma\, dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_{верх} \cup S_{нижн}} R\cos\gamma\, dS = \oiint_{S} R\cos\gamma\, dS.$$

Аналогично для $\forall$ простой области

(x – цилиндрич, y – цилиндрич.)

Складывая (I), (II), (III), получаем фор-лу Г.-О.:

$$\iiint_{T\,(\text{простая})} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \oiint_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS$$

22 Применение ф-лы Г.-О. к вычислению объёмов тел, примеры.

$$\iiint_{T} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \oiint_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

Ф-ла Г.-О.

Если $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, то

$$\iiint_{T} dx\,dy\,dz = \oiint_{S} (\vec{A}, \vec{n})\, dS = V_T$$

$\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ – внешняя нормаль.

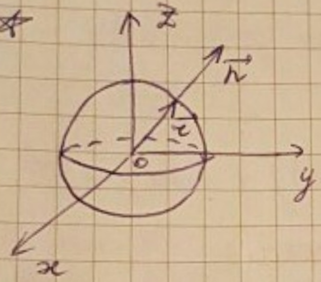
Примеры

☆ Пусть $\vec{A} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, тогда по ф. Г.-О.:

$$\oiint\limits_S (\vec{r}, \vec{n})\,dS = 3\iiint dx\,dy\,dz = 3V_T \text{, тогда}$$

$$V_T = \frac{1}{3}\oiint\limits_S (\vec{r}, \vec{n})\,dS.$$

☆



$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

$$V_ш = \frac{1}{3}\oiint\limits_S (\vec{r}, \vec{n})\,dS = \frac{1}{3}\oiint\limits_S \underset{a}{|\vec{r}|}\cdot\underset{1}{|\vec{n}|}\,dS = \frac{a}{3}\overset{4\pi a^2}{S_{сф}} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

а) параметрич. задание S.

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega$$

$$V_T = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Omega} (\vec{r}, \vec{r}\,'_u, \vec{r}\,'_v)\,du\,dv$$

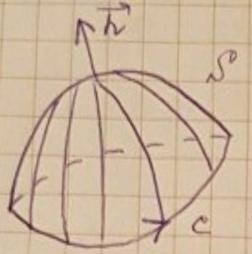
б) явное задание.

$$z = z(x,y),\ (x,y) \in D,\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x,y)\vec{k}.$$

$$(\vec{r}, \vec{r}\,'_x, \vec{r}\,'_y) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = -xz'_x - yz'_y + z.$$

$$V_T = \frac{1}{3}\iint\limits_{D_{xy}} (z - xz'_x - yz'_y)\,dx\,dy.$$

(23) Формула Стокса.



S-двусторонняя замкнутая поверхность. В области Ω задана непрерывно диф-мая вектор-функция

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Тогда справедлива ф-ла Стокса:

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

где $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$.

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

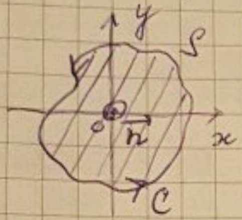
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] dS$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \text{ -}$$

Ф-ла Грина – частный случай ф-лы Стокса.



Док-во ф-лы Стокса:

Пусть S задаётся явно: $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$.

$z = z(x,y)$

$$\oint\limits_C P\,dx \xrightarrow{1} \oint\limits_L \xrightarrow{2} \iint\limits_D \xrightarrow{3} \iint\limits_S$$

(1) $\oint\limits_C P\,dx = \oint\limits_C P(x,y,z)\,dx = \oint\limits_L P(x,y,z(x,y))\,dx.$

Ф. Грина, где $Q = 0$.

(2) $\oint\limits_L P(x,y,z(x,y))\,dx = -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy =$

$= -\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}\right) dx\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) \times$

$\times \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$

$$\cos\alpha = -\frac{z'_x}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},\quad \cos\beta = -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\beta = -z'_y\cos\gamma \Rightarrow z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

(3) $$\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)\frac{dx\,dy}{\cos\gamma} =$$

$$= \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS$$

$$* \oint\limits_{C} P\,dx = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS$$

$$* \oint\limits_{C} Q\,dy = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS$$

$S: y = y(x,z),\ (x,z) \in \tilde{D}$

$$* \oint\limits_{C} R\,dz = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS$$

$S: x = x(y,z),\ (y,z) \in \tilde{\tilde{D}}$

Следствие: $\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$

(24) Применение ф-лы Стокса к исследованию криволинейных интегралов.

Теорема.

Пусть ф-ии $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z) \in C'(\Omega)$, где Ω – (замкнутая огранич.) пространственно-односвязная область в $\mathbb{R}^3$. Тогда эквивалентны 4 утверждения:

1) $\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$, C – $\forall$ замкнут. в Ω.

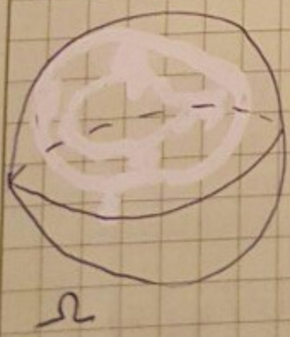
2) $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ – не зависит от формы кривой AB.

3) $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU(x,y,z)$.

4) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$.

Док-во.

$1^\circ \to 2^\circ$



Ω

$$\oint\limits_{ACBD} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

$$\int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int\limits_{BDA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$\int\limits_{ACB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int\limits_{ADB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{ACB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{ADB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz -$$

не зависит от пути!

$2^\circ \to 3^\circ$

$$\int_{ACB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(x,y,z)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$U(x+\Delta x, y, z) - U(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x+\Delta x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz -$$

$$- \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} P\,dx + Q\,\underset{0}{\underset{\parallel}{dy}} + R\,\underset{0}{\underset{\parallel}{dz}} =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} P(x,y,z)\,dx \overset{\text{т. о среднем}}{=\!=} P(x+\Delta x, y, z)\,\Delta x.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x+\Delta x, y, z)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = P(x,y,z)$$

Аналогично: $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y,z)$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = R(x,y,z)$$

Т.о., $\exists\ \dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z} \Rightarrow \exists\, dU(x,y,z)$

$$dU(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz =$$
$$= P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$ ч.т.д

$3^\circ \to 4^\circ$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \Big| \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q, \Big| \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = R \Big| \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \Big| \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Big| \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = R \Big| \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial R}{\partial y} \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}}$$
ч.т.д.

$4^\circ \to 1^\circ$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \oint P\,dx + Q\,dy = \iint \Big(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{=0}\Big)dx\,dy$$

Аналогично: $\oint R\,dz + P\,dx = 0,$

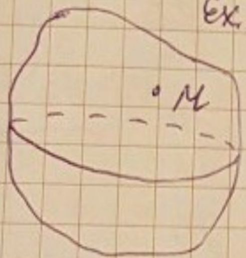
$$\oint Q\,dy + R\,dz = 0.$$

(25) Определение скалярного поля, поверхности и линии уровня; типы поверх. Производная по направлению.

Опр 1.

Говорят, что в обл. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определено скалярное поле, если $\forall$т. $M \in \Omega$ поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$

$$u: (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$$

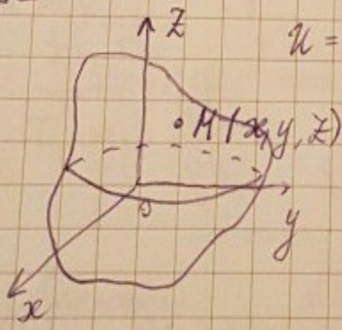


Ex.: * Распределение температуры: $T(M)$

* Плотность: $\rho(M)$

* Поле освещённости в $\forall$ т. области Ω.

Ω



$u = u(x,y,z)$

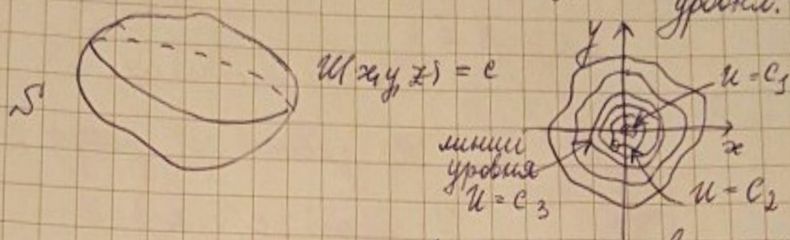
Опр. 2.

(П.У.)

Поверхностью уровня наз-ся геометрич-е место точек, в которых скалярное поле

$U(M)$ имеет заданное значение C.

$U(M) = C \Rightarrow U(x, y, z) = C$ - ур-е пов-ти уровня.



В центре поле возрастает, от центра - убывает.

Св-ва:

1) ПУ (с разными C) заполняют всю обл. Ω.

2) Никакие две ПУ $U(M) = C_1$ и $U(M) = C_2$ ($C_1 \neq C_2$) не имеют общих точек.

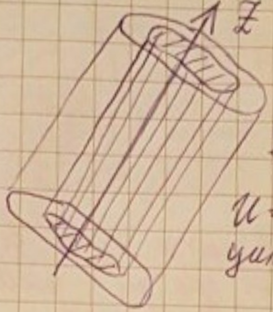
3) Через т. $M_0 \in \Omega$ проходит ПУ с ур-ем $U(M) = U(M_0)$

Опр. 3

Если скалярное поле задано функцией двух перем-х $U = U(x, y)$, то его наз-ют плоским. ПУ в этом случае вырождаются в линии уровня, опред-е ур-ем $U(x, y) = C$.

Типы полей.

① Плоскопараллельное поле: $U(x,y)=c$.



Не зависит от коорд. Z.

$U=U(x,y)$, $U(x,y)=c$ — цилиндрич. поверхности.

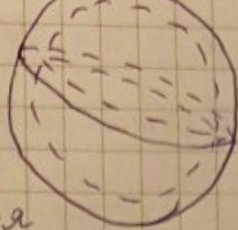
② Осесимметрическое поле.

$U=U(r,z)$ нет зависимости
$r=\sqrt{x^2+y^2}$
от угла φ

(поле осесим-е, если оно переходит само в себя при повороте простр-ва на $\forall$ угол вокруг оси симметрии этого поля)

$U(r,z)=c$ — пов-ти вращения.

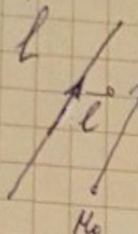
③ Сферическое поле.



$U(r)=c$ — семейство концентрич. сфер

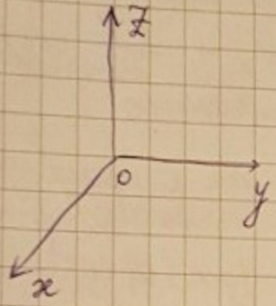
Поле зависит лишь от расст-я т. M до некот-го фиксир-го т. M_0.

Опр 4.



$$h = |\overrightarrow{M_0M}| \qquad \lim_{h\to 0}\frac{u(M)-u(M_0)}{h} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial l}$$

П по напр-ю



$l^0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор в направлении l.

$\overrightarrow{M_0M} = l^0 h \Rightarrow |\overrightarrow{M_0M}| = h.$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\overrightarrow{M_0M} = \underbrace{h\cos\alpha}_{=\Delta x}\,\vec{i} + \underbrace{h\cos\beta}_{=\Delta y}\,\vec{j} + \underbrace{h\cos\gamma}_{=\Delta z}\,\vec{k}.$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x_0 + h\cos\alpha, y_0 + h\cos\beta, z_0 + h\cos\gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{h} =$$

$$= \frac{d}{dh}u(x_0 + h\cos\alpha, y_0 + h\cos\beta, z_0 + h\cos\gamma)\Big|_{h=0}$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma$$

Производная по направлению характеризует скорость изменения ф-ии в данной точке в данном направлении.

(26) Градиент скалярного поля, его физический смысл. Связь с производной по направлению и поверхность уровня.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \mathrm{grad}\, u$$

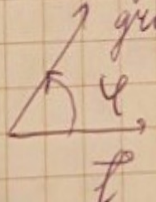
$$\vec{l}^{\,0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma =$$

производная по направлению

$= (\mathrm{grad}\,u, \vec{l}^{\,0})$ — связь градиента с производной по напр-ю.

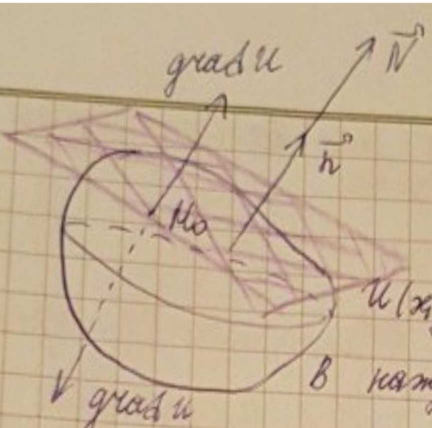
$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\mathrm{grad}\,u|\cdot\overset{=1}{|\vec{l}^{\,0}|}\cdot\cos\varphi = |\mathrm{grad}\,u|\cos\varphi$$



Если $\mathrm{grad}\,u \uparrow\uparrow \vec{l}^{\,0}$, то $\frac{\partial u}{\partial l} = |\mathrm{grad}\,u|$ принимает наибольшее значение.

Физический смысл.

$\mathrm{grad}\,u$ в т. $M \in \mathbb{R}^3$ указывает направление наибыстрейшего возрастания поля u в этой точке, а длина $|\mathrm{grad}\,u|$ — скорость возрастания поля в этом направлении.



grad $u \parallel \vec{n}$.

В каждой т. $M_0 \in \Omega$ grad $u(M_0)$ перпенд-н к ПУ $u(M) = u(M_0)$, проходящей через эту точку.

Д-во:

Ур-е касательной к ПУ $u = u(M_0)$:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}(z-z_0)=0.$$

$$\vec{N}\left\{\frac{\partial u(M_0)}{\partial x},\frac{\partial u(M_0)}{\partial y},\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right\},$$

$\vec{N} \parallel \vec{n}$

$\Downarrow$

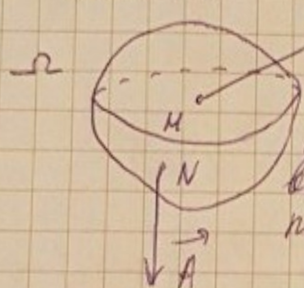
$$\text{grad}\, u(M_0)=\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\vec{k}$$

grad $u(M_0) \parallel \vec{n}$.

27 Определение векторного поля, векторные линии и векторные трубки.

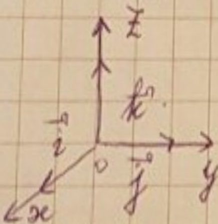
Опр. 1.

Говорят, что в обл. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ определено векторное поле $\vec{A}(M)$, если каждой т. $M \in \Omega$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{A}: (\Omega \subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$.



Ex.: * Поле скоростей: $\vec{v}(M)$

силовые поля:
- * Поле напряжённостей: $\vec{E} = \vec{E}(M)$
- * Поле тяготения: $\vec{F} = \vec{F}(M)$

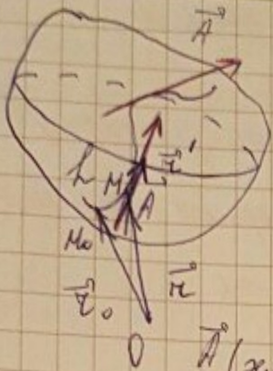


$$\vec{A}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

$P, Q, R \in C^1(\Omega)$ – непр. дифф-мые ф-ии.

Опр. 2.

Кривая L наз-ся векторной линией поля $\vec{A}(M)$ в обл. Ω, если касат-я к линии L в любой её точке совпадает с направлением поля $\vec{A}$.



$L: \vec{r} = \vec{r}(t), \ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$

Найти $\vec{r}(t)$ такую, что:

$$\begin{cases} \vec{r}\,'(t) = \lambda \vec{A}, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r}_0 \end{cases}$$

$$\vec{A}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$

$\vec{r}(t_0) = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = \vec{r}_0$

$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} = \lambda P\vec{i} + \lambda Q\vec{j} + \lambda R\vec{k}.$

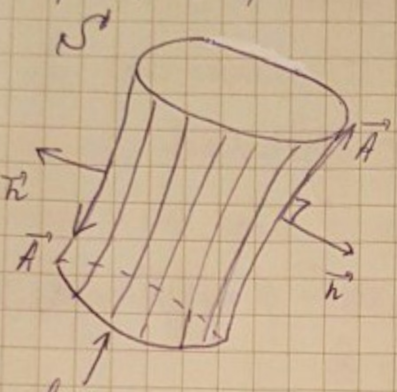
$$\begin{cases} x'(t) = P\lambda \Rightarrow dx = P\lambda dt \Rightarrow \dfrac{dx}{P} = \lambda dt, \\ y'(t) = Q\lambda \Rightarrow dy = Q\lambda dt \Rightarrow \dfrac{dy}{Q} = \lambda dt, \\ z'(t) = R\lambda \Rightarrow dz = R\lambda dt \Rightarrow \dfrac{dz}{R} = \lambda dt \end{cases}$$

$\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$ – ур-е на опр-е векторной линии.

($x(t_0) = x_0, \ y(t_0) = y_0, \ z(t_0) = z_0$ – нач. условия).

Опр 3.

Ограниченная некоторой поверхностью S часть простр-ва наз-ся векторной трубкой, если нормаль к пов-ти S в $\forall$ точке перпендикулярна направл-ю поля $\vec{A}$.



Поверхность „соткана" из векторных линий.

$(\vec{n}, \vec{A}) = 0$

вект. линии, т.к. касат-е к ним совпадают с направлением поля $\vec{A}$.

частные случаи.

(1) Плоскопараллельное поле

$\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$.

(2) Осесимметричное поле.

$\vec{A} = P(r,z)\vec{i} + Q(r,z)\vec{j} + R(r,z)\vec{k}$

$\begin{cases} P(r,z) = P(r) \\ Q(r,z) = Q(r) \\ R(r,z) = R(r) \end{cases}$ – цилиндрич-е поле.

(3) Одномерное поле (вект-е линии – прямые // Ox)

$\vec{A} = P(x)\vec{i} + Q(x)\vec{j} + R(x)\vec{k}$

28 Определение дивергенции векторного поля. Теорема о её вычислении в декартовой системе координат. Инвариантный вид ф-лы Гаусса - Остроградского.

Производная по объёму:

$$\lim_{T \to M_0} \frac{F(T)}{V(T)} = C$$

$V(T)$ - объем обл. T

$F(T)$ - аддитивная ф-я области (ex: масса $m(T_1)$, заряд $q(T)$).

Опр.1 $F(T)$ обл. $T \subset \mathbb{R}^m$ аддитивна, если удовл-ет св-вам:

① Если $F(T)$ опред-на для обл. T_1 и T_2, то она опред-на и для $T_1 \cup T_2$.

② Если $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, то $F(T_1 \cup T_2) = F(T_1) + F(T_2)$.

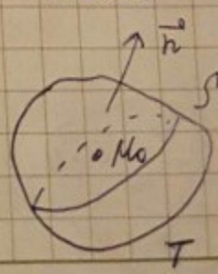
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0, \exists \forall \mathring{O}_\delta(M_0) \in T): \left\| \frac{F(T)}{V(T)} - c \right\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$$

(окрестность т. M_0)

Опр. 2.

Дивергенцией векторного поля $\vec{A}$ в т. $M_0 \in T \subset \mathbb{R}^3$ наз-ся производная по объему от потока векторного поля:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{T \to M_0} \frac{\oiint (\vec{n}, \vec{A}) dS}{V(T)}$$



Теоремы.

Пусть $\vec{A}$ – непр.-дифф-е векторное поле в обл. $T \subset \mathbb{R}^3$, $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \in C^1(T)$.

Тогда: $div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ – скаляр.

Док-во.

$$\iint\limits_S (\vec{A}, \vec{n})\,dS = \iint (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS =$$

$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$,

$\vec{A} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$.

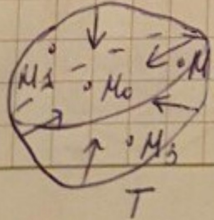
$$= \iint\limits_S P\cos\alpha\,dS + \iint\limits_S Q\cos\beta\,dS + \iint\limits_S R\cos\gamma\,dS =$$

Ф-ла Г.-О.:

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \times dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_T \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

по т. о среднем $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{M_1 \in T} V(T) + \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_2 \in T} V(T) + \left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{M_3 \in T} V(T)$



$$div\vec{A} = \lim_{T \to M_0} \left[\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{M_1} + \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_2} + \left.\frac{\partial R}{\partial z}\right|_{M_3} \right] =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}.$$

Инвариантная форма ф-лы Г.-О.:

$$\oiint_S (\vec{A}, \vec{n})\, dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{A}\, dV.$$

(29) Физический смысл дивергенции

$dV = v_n\, dt \cdot dS$ – объём жидкости, протекающей через dS за время dt.

$\frac{dV}{dt} = v_n dS = (\vec{v}, \vec{n}) dS$ – объём жидкости, протекающей через dS за единицу времени; $\iint_S (\vec{v}, \vec{n}) dS$ – полный объём жидкости, протекающей через S за единицу времени (поток жидкости через S)

Т.о., дивергенция определяет кол-во жидкости, протекающей через пов-ть S за ед. времени.

$\frac{1}{V(T)} \oiint_S (\vec{v}, \vec{n}) dS$ – средняя плотность источников (стоков), т.е. кол-во жидкости, возникающей (исчезающей) за ед. времени в ед. объёма обл. T.

$$\operatorname{div}\vec{v} = \lim_{T\to M_0} \frac{\oiint(\vec{v},\vec{n})\,dS}{V(T)}$$ — плотность источников (стоков) в т. M_0.

* Если $\oiint\limits_S (\vec{v},\vec{n})\,dS > 0$ - наличие источников в т.

* Если $\oiint\limits_S (\vec{v},\vec{n})\,dS < 0$ - наличие стоков в т.

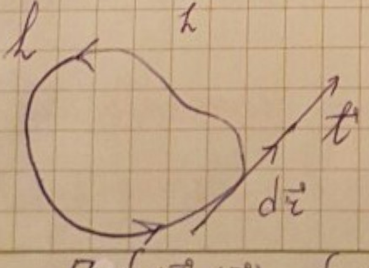
Т.о., div показывает наличие источников (стоков) в векторном поле.

(30) Циркуляция векторного поля. Определение ротора векторного поля. Теорема о его вычислении в декартовой с.к. Инвариантный вид ф-лы Стокса.

Опр. 1.

Циркуляцией вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру L наз-ся криволинейный интеграл 2-го рода от вектора $\vec{A}$ по контуру L:

$$\Gamma = \oint\limits_L (\vec{A}, d\vec{r}) = \oint\limits_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{A},\vec{n})\,dS$$ — работа поля $\vec{A}$



$\vec{t}$ - касательный вектор к L,

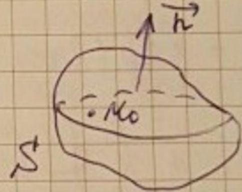
$d\vec{l} = d\vec{r}$.

$$\Gamma = \oint\limits_L (\vec{A}, d\vec{r}) = \oint\limits_L A_l\,dl,$$ где A_l - проекция $\vec{A}$ на напр-е $\vec{l}$.

Опр 2.

Пусть $\vec{A}$ – векторное поле, определённое в обл. $T \subset \mathbb{R}^3$. Тогда ротором (вихрем) векторного поля в т. $M_0 \in T$ наз-ся производная по объёму от вращения векторного поля $\vec{A}(M)$:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \lim_{T \to M_0} \frac{\oiint\limits_S [\vec{n}, \vec{A}]\, dS}{V(T)}$$



Теорема.

Пусть $\vec{A}$ – непр. диф-мое векторное поле в обл. $T \subset \mathbb{R}^3$, т.е. $\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$,

$P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z) \in C^1(T)$

Тогда:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Док-во:

$$\oiint\limits_S [\vec{n},\vec{A}]\,dS = \oiint\limits_S \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS \circleddash$$

$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$.

$$\circleddash \oiint\limits_S \Big[(R\cos\beta - Q\cos\gamma)\vec{i} + (P\cos\gamma - R\cos\alpha)\vec{j} +$$

$$+ (Q\cos\alpha - P\cos\beta)\vec{k}\Big]\,dS =$$

$$= \vec{i}\oiint\limits_S (R\cos\beta - Q\cos\gamma)\,dS + \vec{j}\oiint\limits_S (P\cos\gamma - R\cos\alpha)\,dS +$$

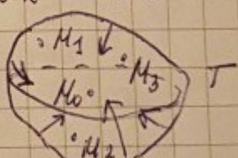
$$+ \vec{k}\oiint\limits_S (Q\cos\alpha - P\cos\beta)\,dS =$$

$$= \vec{i}\iiint\limits_T \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz + \vec{j}\iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\times$$

$$\times\, dx\,dy\,dz + \vec{k}\iiint\limits_T \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz \overset{\text{по т. о среднем}}{=\!=}$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_1} V(T) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\Bigg|_{M_2} V(T) +$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Bigg|_{M_3} V(T)$$



$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\Bigg|_{M_0}\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\Bigg|_{M_0}\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\Bigg|_{M_0}\vec{k} =$$

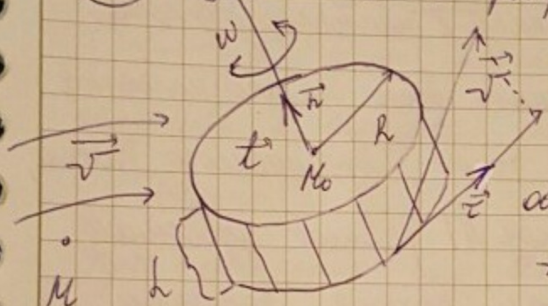
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}_{M_0}, \text{ ч.т.д.}$$

Инвариантная форма ф-лы Стокса

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_C (\vec A, d\vec r) = \iint_S (\vec n, \operatorname{rot}\vec A)\,dS$$

$(\operatorname{rot}\vec A = [\vec\nabla, \vec A])$.

31. Физический смысл ротора.



$\vec\tau$ - ед. вектор, касат-й к ободу колеса

$\vec t$ - ед. вектор вдоль оси вращения,

$v_к$ - скорость колеса.

колесо помещено в т. M, под действием жидкости начинает вращаться, $\vec v$ может составлять с $\vec\tau$ $\forall$ угол.

Найдём угловую скорость вращения колеса $\omega_к$.

$$v_к = \frac{1}{2\pi R}\oint_C (\vec v, \vec\tau)\,dl$$

$$\omega_к = \frac{v_к}{R} = \frac{1}{2\pi R^2}\oint_C (\vec v, \vec\tau)\,dl \overset{\text{ф. Стокса}}{=}$$

$$= \frac{1}{2\pi R^2}\iint_S (\operatorname{rot}\vec v, \vec n)\,dS \overset{\text{т. о среднем}}{=} \frac{1}{2\pi R^2}(\operatorname{rot}\vec v, \vec t)\Big|_{M_0} \times \overset{= \pi R^2}{\iint_S dS} = \frac{1}{2}(\operatorname{rot}\vec v, \vec t)\Big|_{M_0}.$$

$$\omega_k = \frac{1}{2}(\mathrm{rot}\,\vec{v}, \vec{t}), \ \vec{t} \uparrow\uparrow \mathrm{rot}\,\vec{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max \omega_k = \frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\vec{v}| \cdot \underbrace{|\vec{t}|}_{=1} = \frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\vec{v}|.$$

$$|\mathrm{rot}\,\vec{v}| = 2 \max \omega_k$$

Таким образом, ротор поля вектора – вектор, указывающий напр-е наибольшей угловой скорости вращения беск. малого колёсика в данной точке, вращаемого полем, по модулю $|\mathrm{rot}\,\vec{A}|$ равный удвоенной угловой скорости вращ-я колёсика.

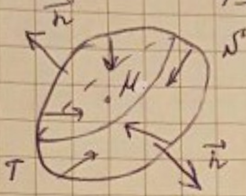
32. Инвариантное определение градиента через производную по объёму и его следствия.

$$\mathrm{grad}\, U(M) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Пусть $\vec{F} = \vec{n} \cdot U(M)$, $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверх-ти S. Тогда справедливо определение градиента скалярного поля.

Пусть S – кусочно-гладкая замкнутая пов-ть, ограничивающая обл. $T \subset \mathbb{R}^3$, а $U(M)$ – непр дифф-е скалярное поле, определённое в $T \cup S$. Тогда градиент $\operatorname{grad} u(M)$ - величина предела:

$$\operatorname{grad} u(M) = \lim_{T \to M} \frac{\oiint \vec{n}\, u\, dS}{V(T)}$$ - инвариантное определение.



Покажем, что из данной ф-лы вытекает ф-ла для градиента в декартовой системе координат.

Теорема:

Пусть скалярное поле $u(M)$ - непр. диф-ма в обл. T, запишем его в декартовой с.к. как $u = u(x, y, z)$. Тогда:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Док-во.

$$\oiint_S \vec{n}\, u\, dS = \vec{i}\oiint_S u\cos\alpha\, dS + \vec{j}\oiint_S u\cos\beta\, dS + \vec{k}\oiint_S u\cos\gamma\, dS =$$

$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$.

$$\underline{\underline{\text{ф-ла Г.-О.}}}\ \vec{i}\iiint_T \frac{\partial u}{\partial x}dV + \vec{j}\iiint_T \frac{\partial u}{\partial y}dV + \vec{k}\iiint_T \frac{\partial u}{\partial z}dV =$$

$$= \iiint_T \left[\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right] dV \ \underline{\underline{\text{т. о среднем}}}$$

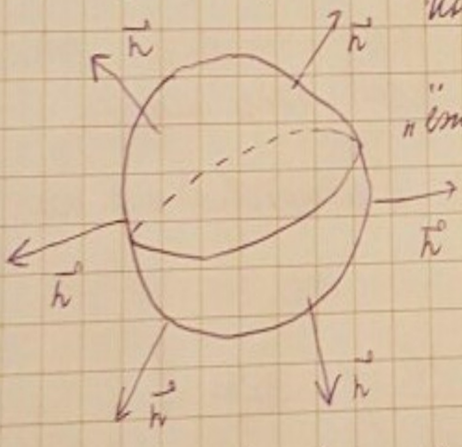
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)\Big|_{M_0} \underbrace{\iiint_T dV}_{V(T)}$$

$$\operatorname{grad} u(M) = \lim_{T \to M} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)_{M_0} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)_{M}, \text{ ч.т.д.}$$

Следствие

$$\operatorname{grad} 1 = \vec{0} \Rightarrow \oiint_S \vec{n}\, dS = \vec{0}.$$
$(u(M) = 1)$



Интеграл по такой области равен нулю.

„ёжик"

Сумма всех векторов нормали замкнутой кусочно-замкнутой пов-ти S, огранич-щей обл. T, равна нулю. (например, для куба)

(33) Оператор Гамильтона. Правила действий с вектором „набла". Общая теорема Г.-О.

$$\vec\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec i + \frac{\partial}{\partial y}\vec j + \frac{\partial}{\partial z}\vec k$$ – вектор „набла";

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec i + \frac{\partial u}{\partial y}\vec j + \frac{\partial u}{\partial z}\vec k = \vec\nabla u$$

$$\operatorname{div}\vec A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \vec A = P\vec i + Q\vec j + R\vec k.$$

$$\operatorname{div}\vec A = (\vec\nabla, \vec A)$$

$$\operatorname{rot}\vec A = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = [\vec\nabla, \vec A].$$

Действия с вектором „набла"

1) $\operatorname{div}(u\vec A) = (\vec\nabla, u\vec A) = (\vec\nabla, \overset{\downarrow}{u}\vec A) + (\vec\nabla, u\overset{\downarrow}{\vec A}) =$

$= (\vec A, \vec\nabla u) + u(\vec\nabla, \vec A) = (\vec A, \operatorname{grad} u) + u\operatorname{div}\vec A;$

2) $\operatorname{grad}(u\cdot v) = \vec\nabla uv = v\operatorname{grad} u + u\operatorname{grad} v;$

3) $\operatorname{rot}(u\vec A) = [\vec\nabla, u\vec A] = [\vec\nabla, \overset{\downarrow}{u}\vec A] + [\vec\nabla, u\vec A] =$

$= [\vec\nabla u, \vec A] + u[\vec\nabla, \vec A] = [\operatorname{grad} u, \vec A] + u\operatorname{rot}\vec A.$

4) $\operatorname{div}[\vec A, \vec B] = (\vec\nabla, [\vec A, \vec B]) = (\vec\nabla, \vec A, \vec B) = (\vec\nabla, \overset{\downarrow}{\vec A}, \vec B) +$

$+ (\vec\nabla, \vec A, \overset{\downarrow}{\vec B}) = (\vec B, \vec\nabla, \vec A) - (\vec\nabla, \overset{\downarrow}{\vec B}, \vec A) = (\vec B, \vec\nabla, \vec A) -$

$- (\vec A, \vec\nabla, \vec B) = (\vec B, \operatorname{rot}\vec A) - (\vec A, \operatorname{rot}\vec B)$

5) $\operatorname{rot}[\vec A,\vec B]=[\vec\nabla,[\vec A,\vec B]]=[\vec\nabla,[\overset{\downarrow}{\vec A},\vec B]]+$

$+[\vec\nabla,[\vec A,\overset{\downarrow}{\vec B}]]=\overset{\downarrow}{\vec A}(\vec\nabla,\vec B)-\vec B(\vec\nabla,\vec A)+$

$+\vec A(\vec\nabla,\vec B)-\overset{\downarrow}{\vec B}(\vec\nabla,\vec A)=(\vec B,\vec\nabla)\vec A-(\vec A,\vec\nabla)\vec B+$

$+\vec A\operatorname{div}\vec B-\vec B\operatorname{div}\vec A$

6) $\operatorname{grad}(\vec A,\vec B)=\vec\nabla(\vec A,\vec B)=\vec\nabla(\vec B,\overset{\downarrow}{\vec A})+\vec\nabla(\vec A,\overset{\downarrow}{\vec B})=$

b a c b a c

$=[\vec B,[\vec\nabla,\overset{\downarrow}{\vec A}]]+\overset{\downarrow}{\vec A}(\vec B,\vec\nabla)+[\vec A,[\vec\nabla,\overset{\downarrow}{\vec B}]]+$

$+\overset{\downarrow}{\vec B}(\vec A,\vec\nabla)=[\vec B,[\vec\nabla,\vec A]]+\vec A(\vec B,\vec\nabla)+[\vec A,[\vec\nabla,\vec B]]+$

$+(\vec A,\vec\nabla)\vec B=[\vec A,\operatorname{rot}\vec B]+[\vec B,\operatorname{rot}\vec A]+(\vec A,\vec\nabla)\vec B+$

$+(\vec B,\vec\nabla)\vec A.$

$[\vec\nabla x,\vec\nabla y]\overset{!}{=}[\operatorname{grad}x,\operatorname{grad}y],[\vec\nabla x,\vec\nabla y]=[\vec\nabla,\vec\nabla]xy=0$ – неверно

Общая теорема Г.-О. $[\vec i,\vec j]=\vec k\neq 0$ – верно.

$$\operatorname{grad}u=\lim_{T\to M_0}\frac{\oiint_S\vec n\,u\,dS}{V(T)}=\vec\nabla u$$

$$\operatorname{div}\vec A=\lim_{T\to M_0}\frac{\oiint_S(\vec n,\vec A)\,dS}{V(T)}=(\vec\nabla,\vec A)$$

$$\operatorname{rot}\vec A=\lim_{T\to M_0}\frac{\oiint_S[\vec n,\vec A]\,dS}{V(T)}=[\vec\nabla,\vec A]$$

$$\oiint_S\vec n\,u\,dS=\iiint_T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec i+\frac{\partial u}{\partial y}\vec j+\frac{\partial u}{\partial z}\vec k\right)dV=\iiint_T\vec\nabla u\,dV$$

$$\oiint_S(\vec n,\vec A)\,dS=\iiint_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iiint_T(\vec\nabla,\vec A)\,dV$$

$$\oiint_S[\vec n,\vec A]\,dS=\iiint_T\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \partial/\partial x&\partial/\partial y&\partial/\partial z\\ P&Q&R\end{vmatrix}dV=\iiint_T[\vec\nabla,\vec A]\,dV$$

34 Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа.

	$\operatorname{grad} u$	$\operatorname{div}\vec{A}$	$\operatorname{rot}\vec{A}$
grad	—		—
div	Δu	—	
rot	$\vec{0}$	—	

$\left.\begin{matrix}\operatorname{grad}(\operatorname{grad} u)\\ \operatorname{grad}(\operatorname{rot}\vec{A})\end{matrix}\right\} - \bar{\exists}$, т.к. grad может действ-ть только на скалярное поле, а $\left.\begin{matrix}\operatorname{grad} u\\ \operatorname{rot}\vec{A}\end{matrix}\right\}$ векторы

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) u = \Delta u$$

оператор Лапласа

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = (\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]) = 0$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k},$$

$$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta \text{ - оператор Лапласа.}$$

$\left.\begin{matrix}\operatorname{div}(\operatorname{div}\vec{A})\\ \operatorname{rot}(\operatorname{div}\vec{A})\end{matrix}\right\} - \bar{\exists}$, т.к. div, rot могут действ-ть только на векторы, а $\operatorname{div}\vec{A}$ – скаляр.

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = [\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u] = \overset{=0}{[\vec{\nabla}, \vec{\nabla}]} u = \vec{0}$$

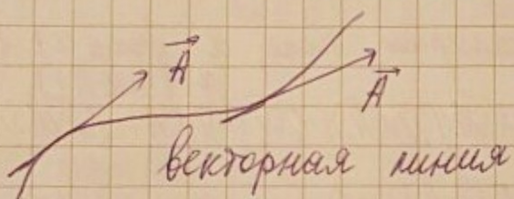
$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]] = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]] + [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{A}]] =$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla})$$

35 Потенциальное поле. Теорема о вычислении потенциала.

Опр. 1.

Пусть в обл. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задано непр. диф-мое векторное поле $\vec{A}(M)$, $M \in \Omega$. Поле $\vec{A}(M)$ наз-ся потенциальным, если его можно представить как $\vec{A} = \operatorname{grad} u$, где $u(x,y,z)$ - потенциал векторного поля $\vec{A}$.



Теорема.

Если векторное поле $\vec{A}$ имеет потенциал, то он определяется с точностью до const.

Док-во.

Пусть $u(M)$ и $v(M)$ - два потенциала поля $\vec{A}$.

Тогда из опред-я: $\begin{cases} \vec{A} = \operatorname{grad} u, \\ \vec{A} = \operatorname{grad} v \end{cases}$, (1)

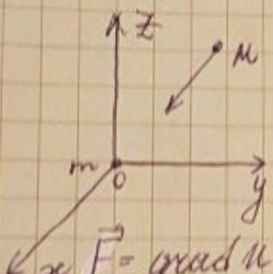
$\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} v = \operatorname{grad}(u - v) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial(u-v)}{\partial l} =$

$= (\operatorname{grad}(u - v), \vec{l}) = 0 \Rightarrow u - v = const, \quad u = v + const.$

Расчёт потенциала. $\int_{M_0}^{M} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{M_0}^{M} (\operatorname{grad} u, d\vec{r}) = \int_{M_0}^{M} \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right) = \int_{M_0}^{M} du = u(M) - u(M_0)$

$$u(M) = \int_{M_0}^{M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + u(M_0)$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$



$$\vec{F} = -\gamma \frac{Mm\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$u = \gamma \dfrac{mM}{r}$ – потенциал гравитац-го поля.

$\vec{F} = \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} \gamma \dfrac{mM}{r} = \gamma m M \operatorname{grad} \dfrac{1}{r} =$

$= \gamma m M \left(\nabla \dfrac{1}{r}\right) = -\gamma \dfrac{mM}{r^3} \vec{r}.$

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r}\right)' \cdot (r'_x + r'_y + r'_z) = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) =$$

$$= -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

36 Критерий потенциальности поля. Циркуляция потенциального поля.

Теорема.

Для того, чтобы векторное поле $\vec{A}(M)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{0}$.

Док-во.

$\Rightarrow$ Необходимость.

$\vec{A}$ - потенц-е, $\vec{A}=\operatorname{grad}u$, $\operatorname{rot}\vec{A}=\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u)=$
$=\vec{0}$.

$\Leftarrow$ Достаточность.

$\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{0}$, $\vec{A}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}, \\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

условие для $\exists$ полного диф-ла.

$Pdx+Qdy+Rdz=dU$

$$dU(x,y,z)=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz$$

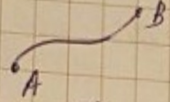
$\Downarrow$

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\ Q=\frac{\partial U}{\partial y},\ R=\frac{\partial U}{\partial z}\Rightarrow$$

$$\vec{A}=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=\operatorname{grad}U,$$ ч.т.д.

$$\int_{AB} (\vec{A}, d\vec{r}) = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AB} dU = U(B) - U(A) -$$

работа



Циркуляция векторного поля вдоль кривой AB.

Если $\vec{A}$ - силовое поле, то его циркуляция - (независит от пути) работа этого поля вдоль $\smile AB$.

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \times dS =$$

ф. Стокса

$$= \iint_S (\vec{n}, [\vec{\nabla}, \vec{A}])\,dS = \iint_S (\mathrm{rot}\,\vec{A}, \vec{n})\,dS.$$

$\vec{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Т. к. для потенц-го поля $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$, то

$$\oint_C (\vec{A}, d\vec{r}) = 0.$$

(37) Соленоидальное поле. Теорема о вычислении векторного потенциала. Критерий соленоид-ти поля

Опр 1

Векторное поле $\vec{A}(M)$, $M \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ наз-ся соленоидальным, если его можно представить как $\vec{A} = \mathrm{rot}\,\vec{B}$, где $\vec{B}$ - вект-ый потенциал поля $\vec{A}$.

$$R = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial x}\, dz + f'_x(x,y) - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dz - g'_y(x,y)$$

$$R = -\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dz + f'_x(x,y) - g'_y(x,y)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)$$

$$\cancel{R} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz + f'_x - g'_y = \cancel{R(x,y,z)} - R(x_0, y_0, z_0) +$$

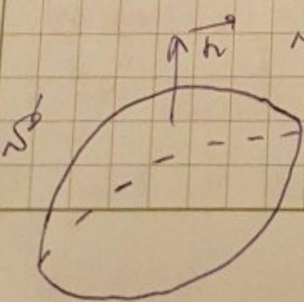
$$+ f'_x - \underbrace{g'_y}_{=0}, \Rightarrow f'_x = R(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow f(x,y) = \int_{x_0}^{x} R(x,y,z)\, dx + h(y)$$

$(g(x,y) = 0)$

(38) Понятие потока векторного поля, его физический смысл.

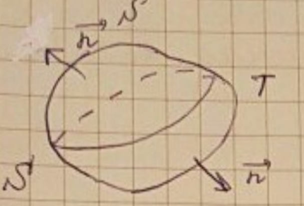
Опр. Пусть S − двусторонняя гладкая поверхность, расположенная в обл. Ω, в которой задано поле $\vec{A}(M)$. Потоком векторного поля $\vec{A}(M)$ через пов-ть S наз-ся интеграл:

$$\Pi = \iint_S (\vec{n}, \vec{A})\, dS$$ − поток вект. поля $\vec{A}$ через пов-ть S.



Поток соленоидального поля через ∀ замкнутую кусочно-гладкую пов-ть равен нулю.

$$\oiint_S (\vec{n}, \vec{A})\, dS = \iiint_T \operatorname{div} \vec{A}\, dV = 0 \quad (\operatorname{div}\vec{A} = 0)$$



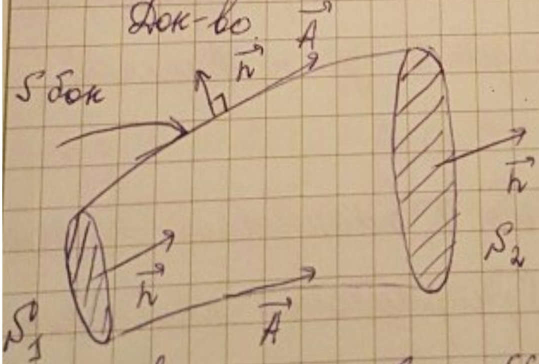
Физический смысл. (в. 29)

39 Закон сохранения интенсивности векторной трубки

Теорема

Поток соленоидального поля через ∀ сечение векторной трубки не меняется.

Док-во



$\vec{A}$ - соленоидальное.

$$\Downarrow$$

$$\Pi = \oiint_S (\vec{n}, \vec{A})\, dS = 0$$

$$\Downarrow$$

векторная трубка поля $\vec{A}$.

$$\underbrace{\iint_{S_{бок}} (\vec{n}, \vec{A})\, dS}_{(\vec{n} \perp \vec{A})}^{=0} + \iint_{S_1} (-\vec{n}, \vec{A})\, dS + \iint_{S_2} (\vec{n}, \vec{A})\, dS = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\iint_{S_1} (\vec{n}, \vec{A})\, dS = \iint_{S_2} (\vec{n}, \vec{A})\, dS,$$ чтд.

40 Лапласово векторное поле. Теорема о лапласовом поле.

Опр. 1

Векторное поле $\vec{A}(M)$, $M \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ наз-ся лапласовым, если одновременно выполн-ся два равенства:

$$\begin{cases} \vec{A} = \operatorname{grad} u, \\ \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B} \end{cases}$$ (и потенц., и соленоидальное)

Условие соленоидальности: $\operatorname{div} \vec{A} = 0$,

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$$

$$(\vec{\nabla}, \vec{\nabla} u) = \Delta u = 0$$ - уравнение Лапласа.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

u - гармоническая ф-я (имеет непр-е производные 2-го порядка и удовл-ет ур-ю Лапласа)

Теорема.

Если на границе обл. T, охватываемой кусочно-гладкой пов-тью S, нормальные компоненты лапласова поля равны нулю то поле обращ-ся в ноль внутри обл. T.

Док-во.

Рассмотрим поток:

$$\Pi = \oiint_S (\vec{n}, \vec{A})\, dS = 0, \quad \oiint_S (\vec{n}, u\vec{A})\, dS = \overset{\text{ф. Г.-О.}}{0} =$$

$(\vec{n}, \vec{A}) = A_n$, $\quad (\vec{n}, u\vec{A}) = uA_n = 0.$

$$= \iiint_T \operatorname{div}(u\vec{A})\, dV = \iiint_T |\vec{A}|^2 dV \Rightarrow |\vec{A}| = 0 \text{ (внутри } T)$$

$$\operatorname{div} u\vec{A} = (\vec{\nabla}, u\vec{A}) = (\vec{\nabla}, \overset{\downarrow}{u}\vec{A}) + (\vec{\nabla}, u\overset{\downarrow}{\vec{A}}) =$$

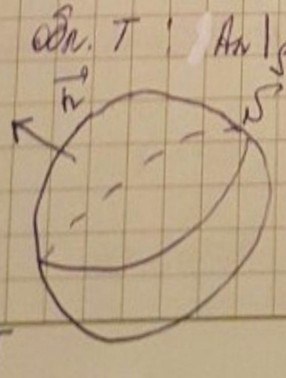
$$= (\vec{A}, \vec{\nabla} u) + u(\vec{\nabla}, \vec{A}) = (\vec{A}, \operatorname{grad}(u)) + u \operatorname{div} \vec{A} =$$

$$= (\vec{A}, \vec{A}) = |\vec{A}|^2$$

$\operatorname{grad}(u) = \vec{A}$ $(\operatorname{grad} u = \vec{A})$; $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ (по опр-ю $\vec{A}$.)

Следствие из теоремы о лапласовом поле:

Если два лапласовых поля $\vec{A}(M)$ и $\vec{B}(M)$ имеют одинаковые нормальные составляющие на замкнутой пов-ти S, охват-щей обл. T: $A_n|_S = B_n|_S$, то $\vec{A} = \vec{B}$ внутри обл. T.



$$\vec{C}(M) = \vec{A}(M) - \vec{B}(M)$$

$$C_n|_S = A_n|_S - B_n|_S = 0, \text{ по теореме}$$

$$\vec{C} \equiv 0 \text{ внутри обл. } T.$$

41 Основная теорема векторного анализа.

Любое непрерывно дифф-е векторное поле $\vec{A}(M)$ можно представить в виде суперпозиции потенциального и соленоидального полей.

Док-во.

$\vec{A}(M) = \vec{B}(M) + \vec{C}(M)$

$\vec{B}(M)$ - потенциальное,

$\vec{C}(M)$ - соленоидальное.

$\vec{B} = \operatorname{grad} U$, $U = U(x, y, z)$.

$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$ (по теореме о необх. и достаточном условии потенциальности поля).

$\vec{C}(M) = \vec{A}(M) - \vec{B}(M) = \vec{A}(M) - \operatorname{grad} U$

Из необх. и дост-го условия соленоидаль-ти:

$\operatorname{div} \vec{C}(M) = \operatorname{div}(\vec{A}(M) - \operatorname{grad} U) = \operatorname{div} \vec{A}(M) - \Delta U = 0$

$\Delta U = \operatorname{div} \vec{A}$ - ур-е Пуассона (всегда имеет реш-е)

Т.о., $U \to \vec{B} = \operatorname{grad} U \to \vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$.

42 Обратная задача векторного анализа.

Определить непр. дифференцируемое вект-е поле $\vec{A}$ по его ротору и дивергенции.

Решение.

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{B}, \\ \mathrm{div}\,\vec{A} = u \end{cases}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0.$$

Согласно ОТВА: $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, где $\begin{cases} \vec{A}_1 \text{ - потенц. поле} \\ \vec{A}_2 \text{ - соленоид. поле} \end{cases}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{A}_1}_{0} + \mathrm{rot}\,\vec{A}_2 = \mathrm{rot}\,\vec{A}_2 = \vec{B}.$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \mathrm{div}\,\vec{A}_1 + \underbrace{\mathrm{div}\,\vec{A}_2}_{0} = u.$$

$\mathrm{rot}\,\vec{A}_1 = 0$, | $\mathrm{rot}\,\vec{A}_2 = \vec{B}$,

$\mathrm{div}\,\vec{A}_1 = u$ | $\mathrm{div}\,A_2 = 0$

$\vec{A}_1 = \mathrm{grad}\,\psi$ | $\vec{A}_2 = \vec{A}_0 + \mathrm{grad}\,\varphi$, где $\vec{A}_0$ - ч.р. 1-го ур-я

$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\psi) = u$ | $\mathrm{div}\,\vec{A}_2 = \mathrm{div}[\vec{A}_0 + \mathrm{grad}\,\varphi] = \mathrm{div}\,\vec{A}_0 + \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathrm{div}\,\vec{A}_0 + \Delta\varphi = 0$

$\Updownarrow$

$\Delta\psi = u$ | $\Delta\varphi = -\mathrm{div}\,\vec{A}_0$ - ур-е Пуассона

ψ находится.

(43) Вывод уравнения неразрывности движения жидкости.

$\vec{v}(x,y,z)$ - поле скоростей жидкости.

$\rho(x,y,z,t)$ - плотность жидкости в т. (x,y,z) в момент времени t.

$\Delta t \dfrac{\partial \rho}{\partial t} \Delta V$ - кол-во жидкости через объём за время Δt.

$$\Delta Q = \Delta t \iiint\limits_T \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$ - полное изменение колич-ва жидкости.

$$\left(\frac{dQ}{dt} = F\right)$$

$$\Pi = \Delta Q = \Delta t \oiint\limits_S (\vec{n}, \rho \vec{v})\, dS$$

$$\iiint\limits_T \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oiint\limits_S (\vec{n}, \rho \vec{v})\, dS = -\iiint\limits_T \operatorname{div}(\rho \vec{v})\, dV$$

$$\iiint\limits_T \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v})\right] dV = 0$$

Для $\forall T$: $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ - ур-е неразрывности.

$\rho = \text{const} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$ - поле соленоидальное (несжим. жидкость)

44 Основной и взаимный базисы. Ковариантные и контрвариантные координаты вектора. Теорема о построении взаимного базиса.

Пусть $\vec{e}_i$ $(i=\overline{1,3})$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^3$

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i$$

$$(\vec{x}, \vec{e}_k) = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i\vec{e}_i, \vec{e}_k\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i \underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}_k)}_{\delta_{ik}} = \sum_{i=1}^{3} x_i\delta_{ik} = x_k$$

$x_k = (\vec{x}, \vec{e}_k)$ – коорд-ты $\vec{x}$ в ортонормир-м базисе.

Пусть $\vec{e}_i$ $(i=1,2,3)$ – некопланарный базис, $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$.

Опр. 1 Пусть $\vec{e}_i$ – основной базис в $\mathbb{R}^3$. Будем говорить, что векторы $\vec{e}^{\,k}$ $(k=1,2,3)$ образуют взаимный базис для базиса e_i, если

$$(\vec{e}_i, \vec{e}^{\,k}) = \delta_i^k = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

Опр 2. Координаты вектора $\vec{A}$ в основном базисе $\vec{e}_i$ называются контравариантными и обознач-ся A^i: $\vec{A} = \sum\limits_{i=1}^{3} A^i \vec{e}_i$, а координаты $\vec{A}$ во взаимном базисе $\vec{e}^k$ наз-ся ковариантными и обознач-ся A_k: $\vec{A} = \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \vec{e}^k$.

$$(\vec{A}, \vec{e}^k) = \sum_{i=1}^{3} A^i \underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}^k)}_{\delta_{ik}} = \sum_{i=1}^{3} A^i \delta_{ik} = A^k$$

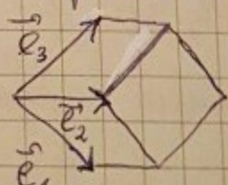
$A^k = (\vec{A}, \vec{e}^k)$, аналогично $A_k = (\vec{A}, \vec{e}_k)$ – координаты вектора $\vec{A}$ в данном базисе.

Теорема о построении взаимного базиса.

Пусть $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ – основной базис в $\mathbb{R}^3$.

Обозначим через $V = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (e_1, [\vec{e}_2, \vec{e}_3]) \neq 0$

$|V|$ – объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.



Тогда $\vec{e}^1 = \dfrac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{V}$, $\vec{e}^2 = \dfrac{[\vec{e}_3, \vec{e}_1]}{V}$, $\vec{e}^3 = \dfrac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{V}$

образуют взаимный базис для $\vec{e}_i$.

Док-во.

$(\vec{e}_i, \vec{e}^k) = \delta_{ik}$?

$V' = (\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3) = (\vec{e}^1, \vec{e}^2, \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{V}) =$

$= \frac{1}{V} (\vec{e}^1, [\underset{a}{\vec{e}^2}, [\underset{b}{\vec{e}_1}, \underset{c}{\vec{e}_2}]]) =$

$= \frac{1}{V} \underset{1}{(\vec{e}^1, \vec{e}_1)} \underset{1}{(\vec{e}^2, \vec{e}_2)} - \frac{1}{V} \underset{0}{(\vec{e}^1, \vec{e}_2)} \underset{0}{(\vec{e}^2, \vec{e}_1)} = \frac{1}{V}$

$(\vec{e}_1, \vec{e}^1) = (\vec{e}_1, \frac{[\vec{e}_2, \vec{e}_3]}{V}) = \frac{1}{V} \underset{V}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = 1$

$(\vec{e}_1, \vec{e}^2) = (\vec{e}_1, \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}_1]}{V}) = \frac{1}{V} (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0$

$(\vec{e}_1, \vec{e}^3) = (\vec{e}_1, \frac{[\vec{e}_1, \vec{e}_2]}{V}) = \frac{1}{V} (\vec{e}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$

$V' = \frac{1}{V} \Rightarrow V \cdot V' = 1$. (базисы (основной и взаимный) имеют одну ориентацию - левую или правую (одного знака))

(45) Определение криволинейных координат в пространстве. Координатные линии и координатные поверхности. Теорема о нахождении локальных базисов (основного и взаимного)

Опр. 1. Пусть x, y, z - прямоугольные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Упорядоч-я тройка чисел

q_1, q_2, q_3 наз-ся криволинейными координатами в $\mathbb{R}^3$, если каждой тройке q_1, q_2, q_3 ставится в соответствие тройка $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ с помощью функций:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3), \end{cases}$$ которые удовл-ют условиям:

а) $x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ - дважды непр-но диф-мы

б) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ или } J = \frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)} \neq 0$$

Опр. 2.

Пов-ть: $$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, c_3) \\ y = y(q_1, q_2, c_3) \\ z = z(q_1, q_2, c_3) \end{cases}$$, где $c_3 = const$, наз-ся координатной пов-тью $q_3 = c_3$

$$\begin{cases} x = x(c_1, q_2, q_3) \\ y = y(c_1, q_2, q_3) \\ z = z(c_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

пов-ть $q_1 = c_1$

$$\begin{cases} x = x(q_1, c_2, q_3), \\ y = y(q_1, c_2, q_3), \\ z = z(q_1, c_2, q_3) \end{cases}$$

пов-ть $q_2 = c_2$.

Опр 3

Кривая

$$\begin{cases} x = x(q_1, c_2, c_3), \\ y = y(q_1, c_2, c_3), \\ z = z(q_1, c_2, c_3), \end{cases}$$

где c_2, c_3 - const, наз-ся координатной линией q_1. Аналогично для q_2 и q_3.

Локальный базис - в каждой т. простр-ва наx-ся свой базис, меняющийся при переходе от одной точки к другой.

Теорема.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы криволин. коорд-ты q_1, q_2, q_3 и радиус-вектор т. $M(x, y, z)$ равен:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k}$$

Тогда

1°: система векторов: $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ $(i=1,2,3)$

образует локальный базис.

2°: Система векторов: $\vec{e}^{\,k} = \vec{\nabla} q_k = \text{grad}\, q_k$

$(k=1,2,3)$ явл-ся взаимным базисом.

Док-во:

1°: Некомпланарность.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \neq 0$

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{D(x,y,z)}{D(q_1,q_2,q_3)} \neq 0.$$

$\Downarrow$

$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ - некомпланарны и образуют базис.

2°: $(\vec{e}_i, \vec{e}^{\,k}) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$

символ Кронекера.

$$\underbrace{(\vec{e}^{\,k}, d\vec{r})} = (\vec{\nabla} q_k, d\vec{r}) = (\operatorname{grad} q_k, d\vec{r}) =$$

$$= \left(\operatorname{grad} q_k, \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\vec{k}\right) dq_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\operatorname{grad} q_k, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right) dq_i = \sum_{i=1}^{3} (\vec{e}^{\,k}, \vec{e}_i) dq_i$$

$$\underbrace{(\vec{e}^{\,k}, d\vec{r})} = (\operatorname{grad} q_k, d\vec{r}) = \left(\frac{\partial q_k}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial q_k}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial q_k}{\partial z}\vec{k}, dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial q_k}{\partial x} dx + \frac{\partial q_k}{\partial y} dy + \frac{\partial q_k}{\partial z} dz = dq_k.$$

$$\sum_{i=1}^{3} (\vec{e}^{\,k}, \vec{e}_i) dq_i = dq_k, \quad dq_i - \forall.$$

$$(\vec{e}_i, \vec{e}^{\,k}) = \delta_{ik}$$

$$\left\{\begin{cases} i \neq k \overset{\text{т.к.}}{=} 0 \\ i = k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \delta_{ik}\right\}, \text{ч.т.д.}$$

(46) Определение ортогональных криволинейных координат. Критерий ортогональности. Элемент длины. Коэффициенты Ламе.

Опр. 1.

Криволинейные коорд-ты (q_1, q_2, q_3) наз-ся ортогональными, если $\forall$ базис $\vec{e}_i = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, 3)$

явл-ся ортогональным, т.е $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$,

$(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0$.

Теорема об условии ортог-ти базиса.

Для того, чтобы система криволинейных координат (q_1, q_2, q_3) была ортогон-ой, необх. и дост-но, чтобы:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0 \text{ при } i \neq j$$

Док-во:

$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$, $\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$

$(i = 1, 2, 3)$ $(j = 1, 2, 3)$

$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ при $i \neq j$ => ортог-ть базиса =>

$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}\right) = 0$ при $i \neq j$ =>

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_j} = 0 \text{ при } i \neq j$$

Эквивалентно.

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right) \text{ - ортог-ная}$$

$$A^T \cdot A = E = \{\delta_{i,j}\}$$

$$A^T = A^{(-1)}$$

$$\det A = J \neq 0$$

Элемент длины.

$$(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q_i} dq_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial q_i} dq_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial q_i} dq_i\right)^2 =$$

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} dq_i \, dq_j + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} dq_i \, dq_j +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} dq_i \, dq_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j}\right) dq_i \, dq_j =$$

(учитываем только $i = j$, т.к. при $i \neq j$ получ-ся нули)

$$= \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \right] (dq_i)^2 =$$

$$= H_1^2 (dq_1)^2 + H_2^2 (dq_2)^2 + H_3^2 (dq_3)^2$$

Т.о. $(dl)^2 = H_1^2 (dq_1)^2 + H_2^2 (dq_2)^2 + H_3^2 (dq_3)^2$,

где $H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}$, $i = 1, 2, 3$ –

коэффициенты Ламе.

(47) Градиент в ортогональных криволинейных координатах.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \Rightarrow$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \vec{i_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \vec{i_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \vec{i_3}$$

$$(\operatorname{grad} u, \vec{i_k}) = \frac{\partial u}{\partial i_k} = \lim_{dq_k \to 0} \frac{\Delta u}{H_k dq_k} = \frac{1}{H_k} \cdot \frac{\partial u}{\partial q_k}$$ – коорд-ты в данном базисе.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{i_\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{i_\varphi} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{i_z}$$ – цилиндрич.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \vec{i_r} + \frac{1}{r\cos\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{i_\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{i_\theta}$$ – сферич-е.

$$\vec{i_k} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}\right|} = \frac{1}{H_k} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k}$$ – нормальный криволин. базис.

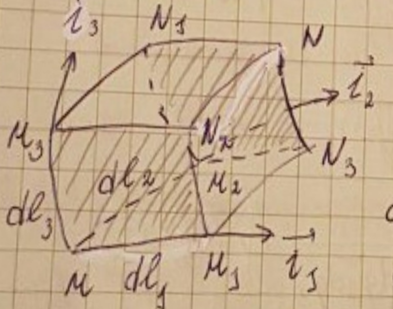
(48) Дивергенция в ортогональных криволинейных координатах.

$$\vec{A} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{V(T)\to M_0} \frac{1}{V(T)} \oiint_S (\vec{A},\vec{n})\,dS$$

Возьмём т. $M(q_1, q_2, q_3)$ и определим в ней орто-ный базис $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, после чего рассмотрим беск. малый параллепипед $MM_2N_3M_1M_3N_1NN_2$.



$$\oiint_S = \iint_{S_{13}} + \iint_{S_{12}} + \iint_{S_{23}} + \dots$$

$dl_1 = H_1 dq_1$, $dl_2 = H_2 dq_2$, $dl_3 = H_3 dq_3$.

$$\iint_{S_{13}} (\vec{A},\vec{n})\,dS = -\iint_{S_{13}} (\vec{A},\vec{i}_2)\,dS \overset{\text{по т. осреднени}}{\approx} -A_2\,\sigma_{13} = -A_2 H_1 H_3\, dq_1 dq_3$$

$$\iint_{S_{13}} (\vec{A},\vec{n})\,dS = \iint_{S_{13}'} (\vec{A},\vec{i}_2)\,dS = \left[A_2 H_1 H_3 + \frac{\partial A_2}{\partial q_2} H_1 H_3 dq_2\right] \times dq_1 dq_3$$

$dq_1 dq_3 \times$

$$dq_1 dq_3 H_1 H_3 A_2(q_1, q_2 + dq_2, q_3) \approx \left[H_1 H_3 A_2(q_1, q_2; q_3) + \frac{\partial A_2 H_1 H_3}{\partial q_2} dq_2\right]$$

$$\frac{1}{V(T)}\left[\iint_{S_{13}} + \iint_{S'_{13}}\right] = \left[\frac{\partial(A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3\right]\frac{1}{V(T)} =$$

$V(T) = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$

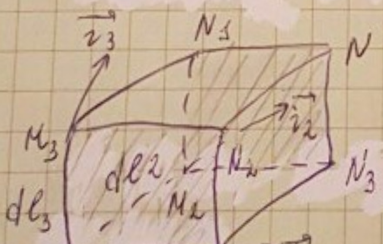
$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\,\frac{\partial(A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2}.$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial(A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3 H_2 H_1)}{\partial q_3}\right]$$

(49) Ротор в ортогональных криволинейных координатах

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \lim_{T\to M_0} \frac{\oint\!\!\oint_S [\vec{n}, \vec{A}]\, dS}{V(T)}$$

Возьмем т. $M(q_1, q_2, q_3)$ и определим в ней ортогональный базис $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, после чего рассмотрим беск. малый параллелепипед $MM_2N_3M_1M_3N_1NN_2$



$$\iint_{S_{13}} [\vec{n}, \vec{A}]\, dS = -\iint_{S_{13}} [\vec{i}_2, \vec{A}]\, dS =$$

$$= \iint_{S_{13}} [\vec{A}, \vec{i}_2]\, dS =$$

$$= \iint_{S_{13}} [\underset{a}{\vec{A}}, [\underset{b}{\vec{i}_3}, \underset{c}{\vec{i}_1}]]\, dS =$$

$$= \iint_{S_{13}} [\vec{i}_3(\vec{A}, \vec{i}_1) - \vec{i}_1(\vec{A}, \vec{i}_3)]\, dS \overset{\text{по т о среднем}}{\approx} (\vec{i}_3 A_1 - \vec{i}_1 A_3)\,\sigma_{13} =$$

$$= (\vec{i}_3 A_1 - \vec{i}_1 A_3) H_1 H_3 \, dq_1 \, dq_3.$$

$$\iint\limits_{S_{13}'} [\vec{n}', \vec{A}] dS = \iint\limits_{S_{13}'} [\vec{i}_2, \vec{A}] dS = - \iint\limits_{S_{13}'} [\vec{A}, \vec{i}_2] dS =$$

$$= -(*)$$

$$(\vec{i}_3 A_1 (q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3) - \vec{i}_1 A_3 (q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3)) H_1 H_3 dq_3 d\vec{q}_3$$

$$= \left[\vec{i}_3 \left(A_1 (q_1, q_2, q_3) H_1 H_3 + \frac{\partial A_1 H_1 H_3}{\partial q_2} dq_2 \right) - \right.$$

$$\left. - \vec{i}_1 \left(A_3 (q_1, q_2, q_3) H_1 H_3 + \frac{\partial A_3 H_1 H_3}{\partial q_2} dq_2 \right] dq_1 dq_3 \right. \quad (*)$$

$$\frac{1}{V(T)} \left[\iint\limits_{S_{13}} + \iint\limits_{S_{13}'} \right] = \frac{1}{V(T)} \left[\frac{\partial (A_3 H_1 H_3 \vec{i}_1)}{\partial q_2} - \frac{\partial (A_1 H_1 H_3 \vec{i}_3)}{\partial q_2} \right] \times$$

$$\times dq_1 dq_2 dq_3 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (A_3 H_1 H_3 \vec{i}_1)}{\partial q_2} - \frac{\partial (A_1 H_1 H_3 \vec{i}_3)}{\partial q_2} \right]$$

$$\lim_{T \to M_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\left[\frac{\partial (A_1 H_1 H_2 \vec{i}_2)}{\partial q_3} - \frac{\partial (A_3 H_3 H_2 \vec{i}_2)}{\partial q_1} \right] + \right.$$

$$+ \left[\frac{\partial (A_2 H_2 H_3 \vec{i}_3)}{\partial q_1} - \frac{\partial (A_1 H_1 H_3 \vec{i}_3)}{\partial q_2} \right] +$$

$$\left. + \left[\frac{\partial (A_3 H_1 H_3 \vec{i}_1)}{\partial q_2} - \frac{\partial (A_2 H_2 H_1 \vec{i}_1)}{\partial q_3} \right] \right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\left[\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_1}\right]H_2\vec{i}_2 +\right.$$

$$+\left[\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2}\right]H_3\vec{i}_3 +$$

$$+\left[\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_3}\right]H_1\vec{i}_1 +$$

$$+\left[\frac{\partial(H_2\vec{i}_2)}{\partial q_3} \overset{=0}{-} \frac{\partial(H_3\vec{i}_3)}{\partial q_2}\right]A_1H_1 +$$

$$+\left[\frac{\partial(H_3\vec{i}_3)}{\partial q_1} \overset{=0}{-} \frac{\partial(H_1\vec{i}_1)}{\partial q_3}\right]A_2H_2 +$$

$$+\left[\frac{\partial(H_1\vec{i}_1)}{\partial q_2} \overset{=0}{-} \frac{\partial(H_2\vec{i}_2)}{\partial q_1}\right]A_3H_3$$

$$\vec{i}_k = \frac{1}{H_k}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k} = \frac{\vec{e}_k}{H_k}, \quad \vec{i}_k H_k = \vec{e}_k$$

$$\frac{\partial\vec{e}_1}{\partial q_2} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_1\partial q_2} = \frac{\partial\vec{e}_2}{\partial q_1} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_2\partial q_1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\left[\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_3}\right]H_1\vec{i}_1 +\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_3H_3)}{\partial q_1}\right]H_2\vec{i}_2 + \left[\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_1H_1)}{\partial q_2}\right]H_3\vec{i}_3\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{i}_1 & H_2\vec{i}_2 & H_3\vec{i}_3 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ H_1A_1 & H_2A_2 & H_3A_3 \end{vmatrix}.$$

50 Оператор Лапласа в ортогональных криволинейных координатах.

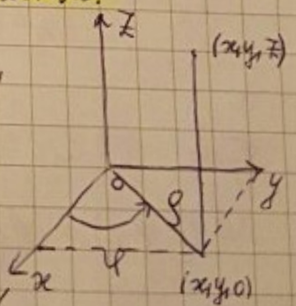
$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)\right].$$

$$\operatorname{grad} U = \frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\vec{i}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\vec{i}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\vec{i}_3$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(A_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_2H_1H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_3H_2H_1)}{\partial q_3}\right].$$

51 Дифференциальные операции теории поля в цилиндрич. координатах.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & 0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ & -\infty < z < +\infty \\ y = \rho\sin\varphi, & (x,y,z) \to (\rho,\varphi,z) \\ z = z \end{cases}$$



$$H_\rho = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi + 0} = \rho, \text{ - коорд-ты Ламе.}$$

$$H_z = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1.$$

$$(dl)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2 + (dz)^2.$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$ – ортогон-я система

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos\varphi\, \vec{i} + \sin\varphi\, \vec{j},$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\rho \sin\varphi\, \vec{i} + \rho\cos\varphi\, \vec{j},$$ – локальный базис.

$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k}.$$

$$\vec{i}_k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} \right| = \frac{1}{H_k} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_k} = \frac{\vec{e}_k}{H_k}$$ – ортонормир-й криволин.-й базис

Пусть $u = u(\rho, \varphi, z)$ – скалярное поле,

$\vec{A}(\rho, \varphi, z) = A_\rho(\rho, \varphi, z)\, \vec{i}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, z)\, \vec{i}_\varphi + A_z(\rho, \varphi, z)\, \vec{i}_z$ – векторное поле, тогда:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \vec{i}_\rho + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \vec{i}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{i}_z$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho A_z)\right],$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \rho\vec{i}_\varphi & \vec{i}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]$$

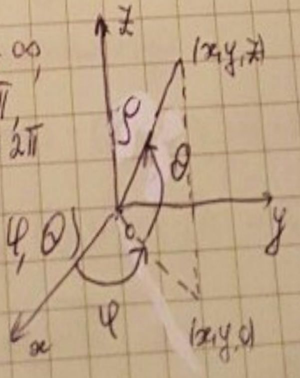
$$= \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)}_{} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} + \rho\frac{\partial^2 U}{\partial z}.$$

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial U}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}.$$

(52) Дифференц-е операции теории поля в сферич-х координатах.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le \rho < +\infty, \\ 0 \le \theta \le \pi, \\ 0 \le \varphi < 2\pi \end{cases}$$

$$(x,y,z) \to (\rho,\varphi,\theta)$$



$$H_\rho = \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + 0} = \rho\cos\theta$$

$$H_\theta = \sqrt{\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta} = \rho$$

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \sin\theta\,\vec{k},$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\rho\cos\theta\sin\varphi\,\vec{i} + \rho\cos\theta\cos\varphi\,\vec{j};$$ – локальный базис.

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -\rho\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} - \rho\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \rho\cos\theta\,\vec{k}.$$

$$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi) = -\rho\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \rho\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta) = -\rho\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi - \rho\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi +$$

$$+ \rho\sin\theta\cos\theta = -\rho\cos\theta\sin\theta + \rho\sin\theta\cos\theta = 0,$$

$$(\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta) = \rho^2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi - \rho^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

$$\Downarrow$$

ортогональная система.

Пусть $u = u(\rho, \varphi, \theta)$ – скалярное поле,

$\vec{A}(\rho, \varphi, \theta) = A_\rho(\rho, \varphi, \theta)\vec{i}_\rho + A_\varphi(\rho, \varphi, \theta)\vec{i}_\varphi + A_\theta(\rho, \varphi, \theta)\vec{i}_\theta$ – векторное поле. Тогда:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial\rho}\vec{i}_\rho + \frac{1}{\rho\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\vec{i}_\theta$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{\rho^2\cos\theta}\left[\frac{\partial(\rho^2\cos\theta A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho\cos\theta A_\theta)}{\partial\theta}\right]$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\rho^2\cos\theta}\begin{vmatrix} \vec{i}_\rho & \rho\cos\theta\,\vec{i}_\varphi & \rho\,\vec{i}_\theta \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial\theta \\ A_\rho & \rho\cos\theta A_\varphi & \rho A_\theta \end{vmatrix}$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2\cos\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right] = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2\cos^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho^2\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right).$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}}$$