

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО СПЕЦКУРСУ  
«ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН»**

**Лектор: д.ф.-м.н. В.П. Реутов**

**ИПФ РАН - 2008**

## 2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

### 2.1 Вывод дисперсионного уравнения и свойства симметрии его решений.

Рассмотрим плоские волны в линейной однородной стационарной среде. Для простоты будем считать, что волны распространяются вдоль оси  $x$  (одномерная задача). Обобщение на неоднородный случай не представляет труда и будет рассмотрено позднее. Для широкого класса линейных сред задача сводится к решению системы уравнений в частных производных вида

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + Cu = 0 \quad (1)$$

где  $A, B, C$  – постоянные (в случае стационарной однородной среды) вещественные матрицы ( $n \times n$ ),  $u$  – вектор-столбец ( $n \times 1$ ). Рассмотрим решение (1) в виде бегущей волны

$$u = \psi e^{ikx - i\omega t} \quad (2)$$

где  $\psi$  – «поляризационный» вектор, который описывает распределение амплитуд колебаний различных составляющих вектора поля  $u$ . После подстановки (2) в (1), получим систему однородных алгебраических уравнений для определения  $\psi$ :

$$(-i\omega A + ikB + C)\psi = 0 \quad (3)$$

Система (3) имеет нетривиальные решения только в том случае, когда ее определитель обращается в ноль. Отсюда находится связь между  $\omega$  и  $k$ , которая называется дисперсионным уравнением

$$D(\omega, k) = \text{Det} \|-i\omega A + ikB + C\| = 0. \quad (4)$$

Таким образом, дисперсионное уравнение дает связь между частотами и волновыми числами собственных волн среды – волн, которые распространяются в среде сами по себе, без приложения внешнего воздействия.

**Задача с начальными условиями.** Рассмотрим решения дисперсионного уравнения (4) относительно волнового числа  $k$ :

$$\omega = \omega(k) \quad (5)$$

Если понимать в выражении (5)  $\omega(k)$  как многозначную функцию, то формулы (5) и (4) полностью равнозначны, а (4) можно рассматривать как неявное задание функции (5). В общем случае дисперсионное уравнение (4) имеет  $n$  корней, или  $n$  дисперсионных ветвей. В (5) эти ветви можно выделить в явном виде

$$\omega = \omega^{(j)}(k), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), найдем собственный вектор задачи  $\psi$  как функцию  $k$  с точностью до произвольного коэффициента, который обозначим через  $a^{(j)}$ :

$$u = a^{(j)} \psi^{(j)}(k) e^{ikx - i\omega^{(j)}(k)t} \quad (7)$$

Обычно коэффициент  $a^{(j)}$  считается произвольной комплексной амплитудой волны, а вектор  $\psi^{(j)}$  определяется однозначно с помощью условия нормировки, которое фактически устанавливает физический смысл  $a^{(j)}$ . Например, если взять нормировку в виде  $\psi_1 = 1$ , то  $a$  будет комплексной амплитудой компоненты поля  $u_1$  (если компонента

$u_1$  является полем давления, то  $a$  – комплексная амплитуда давления и т.п.).

Дисперсионные ветви (6) это полный набор собственных частот волновых возмущений с заданным волновым числом (иногда их называют спектром колебаний сплошной среды). Наличие комплексных корней с  $\text{Im } \omega(k) > 0$  приводит к экспоненциальному нарастанию (неустойчивости) монохроматических волн. Ясно также, что наличие на дисперсионных кривых областей волновых чисел с  $\text{Im } \omega(k) > 0$  приводит к неустойчивости реальных возмущений, которые в соответствии с разложением в интеграл Фурье могут рассматриваться как спектральные пакеты по волновым числам  $k$ . Следует отметить, что условие неустойчивости зависит от того, в какой форме записана экспонента в искомом решении (2). Если решение (2) искать с противоположными знаками в показателе экспоненты, то знак  $\text{Im } \omega(k)$  для неустойчивых волн становится противоположным. В данном курсе мы будем придерживаться записи (2), которая принята в большей части физической литературы.

Решения дисперсионного уравнения  $\omega = \omega(k)$  с вещественными  $k$  дают собственные частоты в задаче с гармоническими по пространству начальными условиями, так как в соответствии с (7) в фиксированный момент времени (без ущерба общности можно взять  $t = 0$ ) получаем

$$u|_{t=0} = a \psi(k) e^{ikx}. \quad (8)$$

Условие (8) означает, что различные компоненты вектора гармонического по пространству поля  $u$  в начальный момент связаны так же, как в бегущей волне. Поэтому в среде будет распространяться только одна эта волна. Чтобы удовлетворить произвольным гармоническим начальным условиям  $u(x, 0) = \hat{u}_k(0) \exp(ikx) + k.c.$  ( $\hat{u}_k(0)$  – вектор комплексных амплитуд гармонического начального возмущения), решение задачи следует искать в виде суммы волн всех дисперсионных ветвей:

$$u = \sum_{j=1}^n a^{(j)} \psi^{(j)}(k) e^{ikx - i\omega^{(j)}(k)t} + k.c. \quad (9)$$

Поскольку физический смысл имеют вещественные решения (1), в (9) добавлено комплексно сопряженное решение (которое также удовлетворяет уравнению с вещественными коэффициентами (1)). Полагая в (9)  $t = 0$ , получим систему  $n$  алгебраических уравнений для определения амплитуд собственных волн  $a^{(j)}$ , которые будут распространяться в среде при  $t > 0$ :

$$\hat{u}_k(0) = \sum_{j=1}^n a^{(j)} \psi^{(j)}(k) \quad (10)$$

Введем собственные вектора (не эрмитовски!) сопряженной задачи, которые удовлетворяют системе уравнений

$$(-i\omega A + ikB + C)^T \zeta = 0 \quad (11)$$

(верхний индекс  $T$  означает транспонирование). Очевидно, что собственные значения сопряженной задачи (11) совпадают с собственными значениями «основной» задачи (3). С помощью несложных преобразований можно показать, что собственные вектора основной и сопряженной задач удовлетворяют условию ортогональности

$$(\zeta^{(m)}, A\psi^{(l)}) = (\zeta^{(m)}, A\psi^{(m)}) \delta_{ml} \quad (12)$$

где  $\delta_{ml}$  – символ Кронекера. С учетом (12) получим явные выражения для амплитуд нормальных волн

$$a^{(m)} = \frac{\zeta^{(m)}(A \cdot \hat{u}_k(0))}{\zeta^{(m)}(A \cdot \psi^{(m)})}. \quad (13)$$

Для перехода в приведенных выше формулах к многомерному пространству следует заменить

$$x \rightarrow \vec{r}, \quad k \rightarrow \vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \vec{\nabla} \quad (14)$$

В случае негармонического начального возмущения, его можно разложить в ряд или в интеграл Фурье по пространственным гармоникам, для каждой из которых получим рассмотренную выше задачу.

Преобразование Фурье имеет несколько вариантов записи с различным вхождением множителя  $2\pi$ . Приведем его для пространства произвольной размерности

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad \hat{u}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (15)$$

где  $d=1,2,3$  – размерность пространства (вектора  $\vec{r}$ ). При работе с преобразованием Фурье полезно иметь в виду спектральное представление для дельта-функции:

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

Спектр дельта-функции в принятой записи преобразования Фурье равен единице. По-видимому отчасти с этим обстоятельством связана популярность записи (15) в физической литературе. Общее решение задачи с начальными условиями можно представить в виде

$$u = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{l=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} a_{\vec{k}}^{(l)} \psi^{(l)}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega^{(l)}(\vec{k})t} d\vec{k} \quad (16)$$

где  $a_{-\vec{k}}^{(l)} = (a_{\vec{k}}^{(l)})^*$ . Нетрудно проверить, что спектральная плотность амплитуды  $a_{\vec{k}}^{(l)}$  определяется формулой (13), в которой  $\hat{u}_{\vec{k}}(0)$  следует считать фурье-представлением начальных условий  $u(x, 0)$ .

**Особенности задачи с граничными условиями.** Разрешая дисперсионное уравнение (4) относительно волнового числа, получим

$$k = k^{(j)}(\omega), \quad j=1,2,\dots,n \quad (17)$$

Решения (17) представляют собой спектр собственных значений в граничной задаче с гармоническими граничными условиями по времени. Действительно, с помощью этого решения можно удовлетворить граничным условиям вида

$$u|_{x=0} = a \psi(\omega) e^{-i\omega t} \quad (18)$$

Все сказанное для начальной задачи переносится с очевидными изменениями на граничную задачу. Обратим внимание на принципиальное отличие, которое связано с тем, что в граничной задаче имеет значение направление распространения волны. Например, если границами среды являются сечения  $x=0$  и  $x=L>0$ , то с границы  $x=0$  можно возбудить только те волны, которые распространяются в положительном направлении оси  $x$ . Остальные волны возбуждаются только с границы  $x=L$  (рис. 1). Здесь и далее под направлением распространения волны подразумевается то направление,

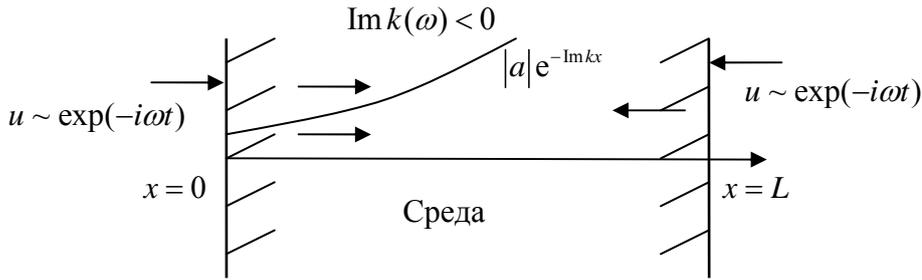


Рис. 1 Направление распространения волн в задаче с граничными условиями и усиление волны, распространяющейся в направлении оси  $x$  (для примера взят случай трех дисперсионных ветвей).

в котором поле волны будет обнаружено в среде при ее возбуждении источником, локализованным внутри среды или на ее границе. В случае бегущих волн можно сказать, что это направление, в котором переносится энергия волн.

**Свойства симметрии решений дисперсионного уравнения.** Возьмем комплексно сопряженное от дисперсионного соотношения (4):

$$D(\omega, k) = D(-\omega^*, -k^*) = 0. \quad (19)$$

Свойство (19) не связано с конкретным видом исходной системы и определяется только тем, что исходные уравнения в частных производных имеют вещественные коэффициенты. Из (19) следует, что, если пара комплексных (в общем случае) значений  $(\omega, k)$  удовлетворяет дисперсионному уравнению, то пара

$$\omega' = -\omega^*, \quad k' = -k^* \quad (20)$$

также удовлетворяет этому дисперсионному уравнению. Таким образом, вся совокупность волн, подчиняющихся дисперсионному уравнению, разбивается на симметричные пары.

В задаче с начальными условиями, разрешая оба уравнения (19) относительно вещественного  $k$ , получим:  $\omega = \omega(k)$  и  $-\omega^* = \omega(-k^*)$ . Отсюда (при вещественном  $k$ ) имеем

$$\begin{aligned} \omega(k) &= -\omega^*(-k), \quad \text{или} \\ \text{Re} \omega(k) &= -\text{Re} \omega(-k), \quad \text{Im} \omega(k) = \text{Im} \omega(-k) \end{aligned} \quad (21)$$

В случае вещественных частот имеем аналогичное свойство для дисперсионных ветвей задачи с граничными условиями

$$k(\omega) = -k^*(-\omega), \quad \text{или} \quad (22)$$

$$\text{Re} k(\omega) = -\text{Re} k(-\omega), \quad \text{Im} k(\omega) = \text{Im} k(-\omega)$$

Отмеченные свойства симметрии, очевидно, являются следствием того, что исходная система уравнений (1) имеет вещественные коэффициенты. Вещественное решение можно получить путем добавления и комплексно сопряженного к (2):

$$u = \psi e^{ikx - i\omega t} + \psi^* e^{-ik^*x + i\omega^* t}. \quad (23)$$

Отсюда ясно, что симметричные пары решений дисперсионного уравнения приводят к одному и тому же вещественному решению исходных уравнений (23), т.е. представляют

собой физически одну и ту же волну. Свойства симметрии позволяют ограничиться построением дисперсионных ветвей не во всей области их определения. Например, достаточно построить дисперсионные ветви в области положительных частот  $\text{Re } \omega > 0$  и всех возможных значений волнового числа  $k$ .

**Групповая скорость и точки ветвления дисперсионных ветвей.** Групповая скорость спектрально узкого волнового пакета, или скорость огибающей волнового цуга на временах, когда эффекты дисперсионного расплывания еще не играют роли формулой  $v_g = d\omega/dk$ . Если дисперсионное уравнение не удается решить в явном виде, то может быть полезно выражение для групповой скорости через дисперсионную функцию. Подставляя в дисперсионное уравнение (4) его решение  $\omega = \omega(k)$ , получим тождество  $D(\omega(k), k) \equiv 0$ . Дифференцируя его по  $k$ , получим

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = - \left. \frac{D'_k}{D'_\omega} \right|_{\omega=\omega(k)}. \quad (24)$$

Дифференцируя тождество дважды, можно получить полезное выражение для производной групповой скорости

$$\frac{dv_g}{dk} = \frac{d^2\omega}{dk^2} = - \left. \frac{1}{D'_\omega} (D''_{\omega\omega} v_g^2 + 2D''_{\omega k} v_g + D''_{kk}) \right|_{\omega=\omega(k)}. \quad (25)$$

Поскольку решение дисперсионного уравнения является многозначной функцией уместен вопрос о точках ветвления его решений, в которых два или несколько корней вырождаются в один. Пусть пара значений  $(\omega_0, k_0)$  удовлетворяет дисперсионному уравнению, т.е. соответствует собственной волне среды. Чтобы получить поведение дисперсионных ветвей в окрестности этой точки, произведем разложение дисперсионной функции в ряд Тейлора:

$$D(\omega, k) = \underbrace{D(\omega_0, k_0)}_{=0} + D'_k(\omega_0, k_0) \underbrace{(k - k_0)}_{\delta k} + D'_\omega(\omega_0, k_0) \underbrace{(\omega - \omega_0)}_{\delta\omega} + \left[ \frac{1}{2} D''_{kk}(\omega_0, k_0) (\delta k)^2 + \frac{1}{2} D''_{\omega\omega}(\omega_0, k_0) (\delta\omega)^2 + D''_{\omega k}(\omega_0, k_0) (\delta k) (\delta\omega) \right] + \text{h.o.t.} = 0 \quad (26)$$

(h.o.t. – члены более высокого порядка, от английского «higher order terms»). Допустим, что в выбранной точке производная  $D'_\omega(\omega_0, k_0) = 0$ . Тогда линейная связь между приращениями частоты и волнового числа в окрестности этой точки отсутствует, т.е.  $\delta k$  должно стать порядка  $(\delta\omega)^2$  – величиной второго порядка малости по сравнению с  $(\delta\omega)$ . Тогда в (26) можно пренебречь первым и последним членами в квадратных скобках. Это дает формулу для пары корней вблизи точки ветвления второго порядка:

$$\omega - \omega_0 = \pm \sqrt{- \left. \frac{2D'_k}{D''_{\omega\omega}} \right|_0} (k - k_0) \sim (k - k_0)^{1/2} \quad (27)$$

Таким образом, в точке ветвления  $\omega(k)$  второго порядка выполнено два условия

$$D(\omega_0, k_0) = 0, \quad D'_\omega(\omega_0, k_0) = 0, \quad (28)$$

Фактически (28) можно рассматривать как систему двух уравнений для двух неизвестных. Такая система, вообще говоря, имеет одно или несколько решений. Если мы попробуем искать точку ветвления третьего порядка, то к (28) добавится условие  $D''_{\omega\omega}(\omega_0, k_0) = 0$ . Получим три уравнения для двух неизвестных. Теперь система имеет решения только при определенном стечении обстоятельств – когда специально подобраны параметры задачи

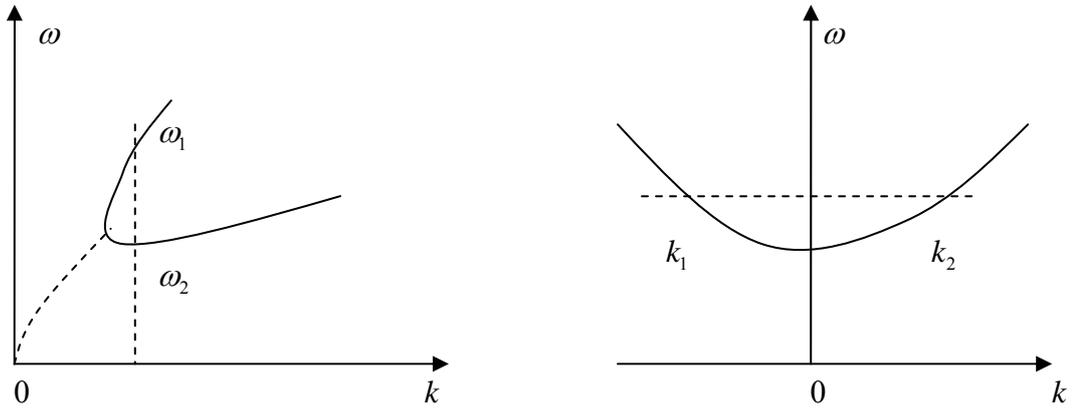


Рис. 2 Примеры ветвления дисперсионных кривых  $\omega(k)$  (слева) и  $k(\omega)$  (справа). В данном случае в точках ветвления два вещественных корня вырождаются в один.

(фактически один из параметров задачи можно включить в число неизвестных). Отсюда важный вывод, в типичной ситуации дисперсионные кривые ветвятся попарно. В этой точке производная  $d\omega/dk = \infty$ . При вещественных  $(\omega_0, k_0)$  (хотя все сказанное справедливо и для комплексных значений) это означает обращение в бесконечность групповой скорости.

На рис. 2 показан пример точки ветвления с вещественными значениями  $(\omega_0, k_0)$ , которая возможна в дисперсионном уравнении с вещественными коэффициентами. В этом случае согласно теореме из алгебры решения являются комплексно сопряженными:  $\omega = \omega_r \pm i\omega_i$ . Точка ветвления разделяет области с комплексно сопряженными и вещественными корнями, а групповая скорость в ней формально равна бесконечности. Поскольку один из комплексно сопряженных корней имеет  $\text{Im } \omega > 0$ , эта точка ветвления одновременно является границей области неустойчивости.

Предположим теперь, что в выбранной точке  $(\omega_0, k_0)$  выполнены условия

$$D(\omega_0, k_0) = 0, \quad D'_k(\omega_0, k_0) = 0, \quad (29)$$

Действуя аналогично предыдущему, получим в окрестности данной точки

$$k - k_0 = \pm \left( -\frac{2D'_\omega}{D''_{kk}} \Big|_0 (\omega - \omega_0) \right)^{1/2} \sim (\omega - \omega_0)^{1/2} \quad (30)$$

Таким образом, условия (29) определяют точки ветвления многозначной функции  $k = k(\omega)$ . Дисперсионные ветви  $k = k(\omega)$  также сшиваются попарно. В этой точке производная  $dk/d\omega = \infty$ . На рис. 2 справа показан пример точки ветвления с вещественными значениями  $(\omega_0, k_0)$ . В данном случае групповая скорость обращается в ноль, а сама точка ветвления находится на границе области непрозрачности, так как при  $\omega < \omega_0$  имеется два комплексно сопряженных корня  $k_r(\omega) \pm ik_i(\omega)$ . На этом примере видна необходимость критерия для определения направления их распространения волн, поскольку понятия групповой скорости в данном случае не достаточно.

## 2.2. Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в LC-линиях.

**Переход от дискретной к распределенной LC-линии.** Простейшим примером для вывода дисперсионного уравнения являются дискретные LC-линии. Рассмотрим простейшую длинную линию из емкостей и индуктивностей, принципиальная схема которой показана на рис. 1. Уравнения Кирхгофа для такой цепочки имеют вид

$$\bar{C} \frac{\partial u_n}{\partial t} = I_n - I_{n+1}, \quad \bar{L} \frac{\partial I_n}{\partial t} = u_{n-1} - u_n, \quad (1)$$

где  $u_n$  – напряжение на емкости,  $I_n$  – ток через индуктивность в звене с номером  $n$ . Здесь и далее мы принимаем, что ток течет от большего к меньшему потенциалу, т.е. направление тока совпадает с направлением переноса положительных зарядов. Считая, что дискретные функции  $u_n, I_n$  мало изменяются на одном звене цепочки (т.е. при изменении аргумента  $n$  на единицу), разложим их в ряд Тейлора

$$u_{n-1} = u_n - \frac{\partial u_n}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2} + \dots, \quad I_{n+1} = I_n + \frac{\partial I_n}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_n}{\partial n^2} + \dots \quad (2)$$

Разложения (2) позволяют аналитически продолжить функции дискретного переменного на промежуточные (нецелые) значения аргумента, где они изначально не определены. Для перехода к распределенной модели предположим, что звенья линии равномерно расположены вдоль оси  $x$  и имеют пространственный размер  $h$ . Введем  $x = n \cdot h$ . Оставляя главные члены разложений, получим уравнения в частных производных

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x}, \quad L \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $C = \bar{C}/h, L = \bar{L}/h$  – удельные емкость и индуктивность. Уравнения (3) есть хорошо известные «телеграфные» уравнения. Они выводятся строго, например для коаксиальных линий путем применения уравнений Максвелла в интегральном виде.

Отыскивая решение (3) в виде бегущих волн

$$(u, I) = a(\psi_1, \psi_2) \exp(-i\omega t + ikx) \quad (4)$$

получим пару алгебраических уравнений

$$i\omega C \psi_1 - ik \psi_2 = 0, \quad ik \psi_1 - i\omega L \psi_2 = 0 \quad (5)$$

Условие существования нетривиальных решений (5) дает дисперсионное уравнение

$$D(\omega, k) = \omega^2 - V^2 k^2 = 0 \quad \left( V = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \quad (6)$$

Дисперсионные ветви имеют простой вид  $\omega_{1,2} = \pm V k$  и соответствуют двум волнам, распространяющимся навстречу друг другу с фиксированной фазовой скоростью  $V$  и распределением амплитуд напряжения и тока  $\psi_1 = 1, \psi_2 = \pm \sqrt{C/L}$  (при данной нормировке  $a$  – амплитуда напряжения. В этом случае говорят, что в системе отсутствует дисперсия (рис.1,б).

Как записать условия применимости приближения непрерывной среды в случае дискретной цепочки? Условие отбрасывания членов со вторыми производными в разложении (2) при записи этого разложения через переменную  $x = n \cdot h$  имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} \gg h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\Lambda}{h} \gg 1, \quad (7)$$

$\sim \delta u / \Lambda$                        $\sim h \delta u / \Lambda^2$

где  $\delta u$  и  $\Lambda$  – характерное изменение напряжения и его пространственный масштаб (см. рис. 1,б). Условие (7) означает, что характерное (типичное) изменение напряжения

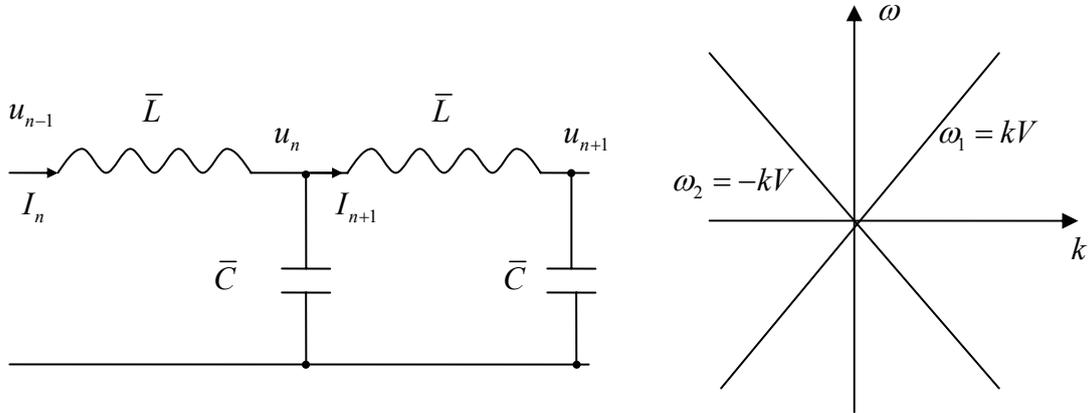


Рис. 1 Принципиальная схема звена длиной LC-линии с дискретными элементами и дисперсионные ветви распределенной модели LC-линии .

происходит на большом числе звеньев цепочки, т.е. на одном звене изменения малы по сравнению с характерными изменениями напряжения. Для синусоидального возмущения  $u \sim \cos(k_*x)$  условие (7) принимает вид

$$k_*h \ll 1 \quad (8)$$

т.е. изменения малы на характерном масштабе волны, которым является величина  $k_*^{-1}$ , а не большая по сравнению с нею длина волны. Для возмущений с непрерывным спектром условие перехода к распределенной модели также можно записать в форме (8), если под  $k_*$  понимать ширину энергонесущей области спектра волновых чисел волны. Наконец, заметим, что иногда удобно не вводить отдельную непрерывную координату, а продолжить дискретную переменную  $n$  на промежуточные дробные значения. В этом случае  $n$  будет по-прежнему измеряться в звеньях, вместо  $x$  в (3) войдет  $n$  (и останутся «дискретные» значения емкости и индуктивности), а условие (7) примет вид

$$\Lambda(\text{в звеньях}) \gg 1 \quad (9)$$

Таким образом, можно сказать, что переход от дискретной цепочки к распределенной происходит в пределе длинных волн.

**LC-линия с произвольными элементами.** Ограничимся гармоническими по времени процессами вида  $\exp(-i\omega t)$ , т.е представим напряжение и ток в виде

$$(u, I) = (\hat{u}, \hat{I}) \exp(-i\omega t) \quad (10)$$

При этом удобно элементы в горизонтальном звене описывать импедансом, а в вертикальном – проводимостью. Схема звена такой линии показана на рис. 2. Уравнения Кирхгофа для распределенной LC-линии принимают вид

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = -Z(\omega) \hat{I}, \quad \frac{\partial \hat{I}}{\partial x} = -Y(\omega) \hat{u} \quad (11)$$

Решение (11) запишем в таком виде, чтобы общая зависимость полей от координаты и времени имела вид бегущей волны:

$$\hat{u} = \psi_1 \exp(ikx), \quad \hat{I} = \psi_2 \exp(ikx) \quad (12)$$

Это приводит к следующему дисперсионному уравнению

$$k^2 = -Z(\omega)Y(\omega) \quad (13)$$

**Аналогия с плоскими электромагнитными волнами в средах с временной дисперсией.**

Рассмотрим плоские электромагнитные волны в изотропной среде с временной дисперсией. В электродинамике временная дисперсия понимается как нелокальность связи вектора электрической индукции и электрического поля, а также вектора магнитной индукции и магнитного поля во времени. Для процессов  $\exp(-i\omega t)$  это ведет к частотной зависимости диэлектрической и магнитной проницаемости среды от частоты:

$$\hat{D} = \varepsilon(\omega) \hat{E}, \quad \hat{B} = \mu(\omega) \hat{H}, \quad (14)$$

Направим без ущерба общности ось  $x$  вдоль волнового вектора  $\vec{k}$  (рис. 3). Тогда уравнения Максвелла принимают вид

$$\frac{\partial \hat{H}_z}{\partial x} = \frac{1}{c} i\omega \varepsilon(\omega) \hat{E}_y, \quad \frac{\partial \hat{E}_y}{\partial x} = \frac{1}{c} i\omega \mu(\omega) \hat{H}_z, \quad (15)$$

Отыскивая решение (15) в виде, аналогичном (12), получим дисперсионное уравнение для плоских электромагнитных волн

$$k^2 = \frac{1}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2 \quad (16)$$

Обратим внимание на то, что уравнения для плоских волн (15) очень похожи на уравнения для линии (11). Это сходство можно сделать полным.

Вспомним, как определяются проводимость емкости и импеданс индуктивности. Для этого используются уравнения

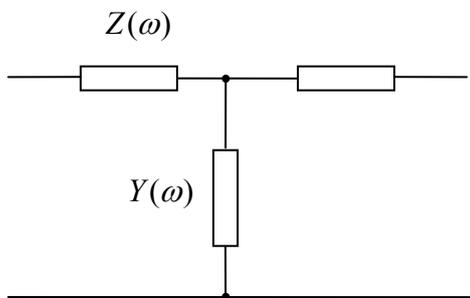


Рис. 2 Электрическая схема звена LC-линии с частотно зависимыми импедансом и проводимостью

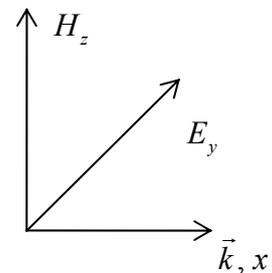


Рис. 3 Электрическое и магнитное поле в плоской электромагнитной волне

$$C \frac{du}{dt} = I, \quad L \frac{dI}{dt} = u \quad (17)$$

Из (17) следует, что при записи зависимости от времени в виде  $\exp(-i\omega t)$  проводимость емкости равна  $-i\omega C$ , а импеданс индуктивности есть  $-i\omega L$  (обратим внимание на отличие знаков от принятых в радиотехнике, где используется запись токов и напряжений  $\sim \exp(+i\omega t)$ ). Пусть теперь имеются элементы с импедансом  $Z(\omega)$  и с проводимостью  $Y(\omega)$ . Введем (чисто формально) эквивалентные им частотно-зависимые емкость и индуктивность

$$\frac{\hat{I}}{\hat{u}} = Y(\omega) \equiv -i\omega C(\omega), \quad \frac{\hat{u}}{\hat{I}} = Z(\omega) \equiv -i\omega L(\omega). \quad (18)$$

Согласно (18), частотно-зависимая емкость это такая «эффективная» емкость, которая дает проводимость, равную  $Y(\omega)$ . Фактически в представлении (18) проводимость и импеданс трактуются в терминах частотно зависимых емкости и индуктивности. Используя эти определения, запишем уравнения LC-линии в виде

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = i\omega L(\omega) \hat{I}, \quad \frac{\partial \hat{I}}{\partial x} = i\omega C(\omega) \hat{u} \quad (19)$$

Они отличаются от (15) только отсутствием множителя  $1/c$ , который легко можно ввести явно, если перейти к индуктивности и емкости, нормированным на некоторые характерные значения  $C_*$  и  $L_*$ :  $L_{нов.} = L/L_*$ ,  $C_{нов.} = C/C_*$ . Тогда в уравнениях (19) появится  $c = 1/\sqrt{L_*C_*}$ , как аналог скорости света. В дальнейшем эти нормировки делать не будем, поскольку реальной пользы они не приносят. Дисперсионное уравнение линии (13) принимает вид

$$k^2 = L(\omega)C(\omega)\omega^2 \quad (20)$$

и тоже полностью аналогично (16). Таким образом, частотно-зависимые емкость и индуктивность фактически являются аналогами диэлектрической и магнитной проницаемости:  $L(\omega) \sim \mu(\omega)$ ,  $C(\omega) \sim \varepsilon(\omega)$ . Эта аналогия не случайна, поскольку фактически речь идет об одних и тех же уравнениях Максвелла. Данная аналогия удобна тем, что решая задачу для LC-линии, мы одновременно получаем решение аналогичной задачи для плоских электромагнитных волн. Для радиотехники введение частотно-зависимых емкости и индуктивности особого значения не имеет (хотя они иногда используются, например в теории кварцевого резонатора).

Известно, что мнимые части  $\varepsilon$  и  $\mu$  определяют затухание электромагнитных волн. Что такое мнимая часть частотно-зависимой индуктивности? В частности, для последовательной LR-цепочки, имеем по определению  $L(\omega)$

$$-i\omega L(\omega) = -i\omega L_0 + R, \quad L(\omega) = L_0 \left( 1 + i \frac{R}{\omega L} \right). \quad (21)$$

Видно, что  $\text{Im} C, \text{Im} L > 0$  соответствуют потерям (затуханию), также как для плоских волн потери в среде даются  $\text{Im} \varepsilon, \text{Im} \mu > 0$ .

**Понятие о средах-моделях.** Используя распределенные LC-линии, можно моделировать дисперсию волн в реальных средах. Для этого надо подобрать частотную зависимость  $L(\omega)$  и  $C(\omega)$ , т.е. надлежащим образом выбрать комбинацию обычных емкостей и индуктивностей, из которых составлены эти частотно-зависимые элементы. Оказывается,

что с помощью LC-линий путем можно моделировать и нелинейные эффекты. Консервативные нелинейности (нелинейности без потерь) моделируются с помощью нелинейной емкости – емкости, которая зависит от напряжения (обычно это барьерная емкость запертого р-п-перехода) или нелинейной индуктивности с сердечником, в котором магнитный поток нелинейно зависит от протекающего тока (например, ферромагнетики). Используя элементы с отрицательной и нелинейной проводимостью (например, туннельные диоды), можно получить активные среды с диссипативной нелинейностью). В таких модельных средах возможны многие нелинейные процессы, характерные для реальных сред. Поскольку уравнения для сред-моделей пишутся значительно проще, чем многих реальных сред, с их помощью удобно изучать методы вывода приближенных уравнений (идеи остаются теми же, что для реальных сред).

Не следует переоценивать значение сред-моделей (например, в них ограничен выбор активных элементов, сложно моделировать нелинейности с производными по координате). На практике среды-модели, предназначенные для моделирования нелинейных волновых процессов, строятся из дискретных элементов и наиболее эффективны для решения одномерных задач. Большой цикл исследований в этом направлении был проведен в ИПФ РАН в 60-70-х годах прошлого века. Более подробно о средах-моделях мы поговорим в следующих лекциях.

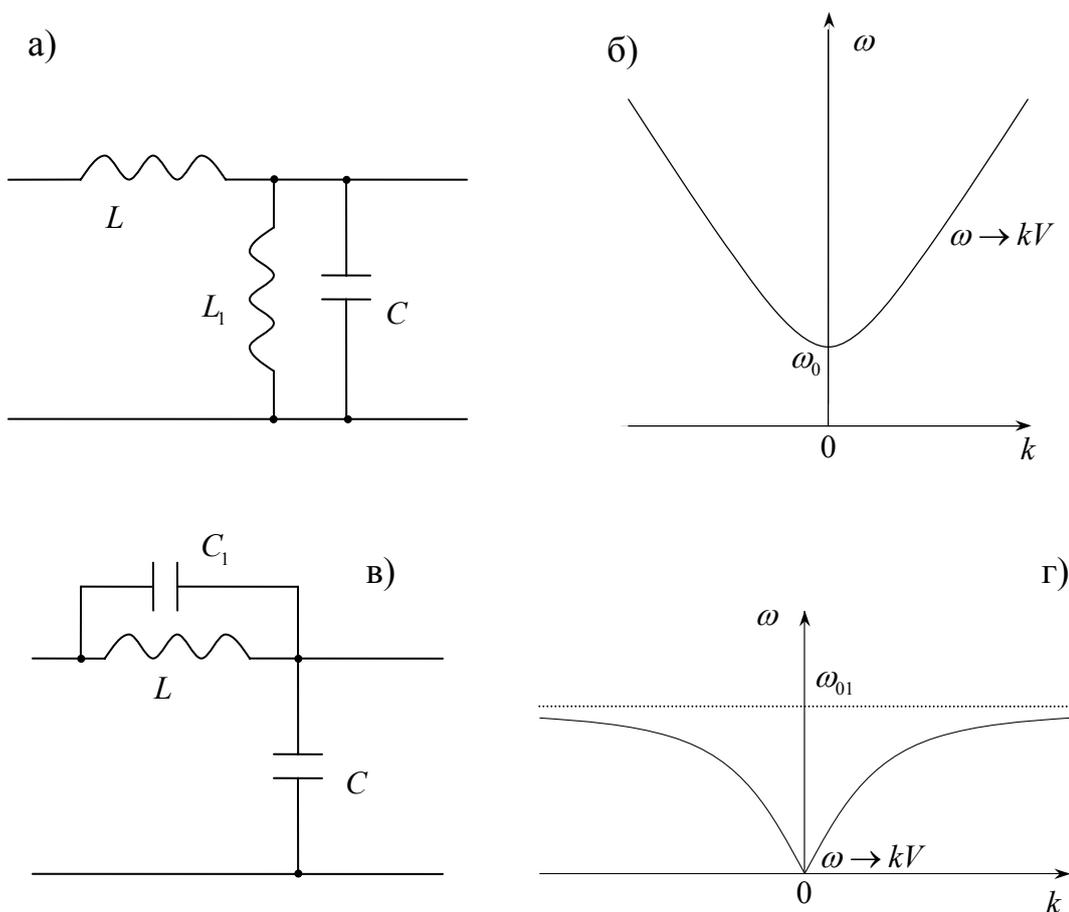


Рис. 4 Схема звена (а) и дисперсионные ветви (б) LC-линии с дисперсией в области низких частот и схема звена (в) и дисперсионные ветви (г) LC-линии с дисперсией в области высоких частот.

**Пример 1. Модель среды с дисперсией в области низких частот.**

Принципиальная схема LC-линии показана на рис. 4а. В этом случае в соответствии с определением частотно-зависимой емкости получим

$$C(\omega) = C - \frac{1}{L_1 \omega^2}, \quad \omega = \pm \sqrt{V^2 k^2 + \omega_0^2}, \quad \left( \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C}}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \quad (22)$$

Дисперсионные кривые показаны на рис. 4,а. Видно, что дисперсия возникает при приближении к резонансной частоте контура  $\omega_0$ . На высоких частотах дисперсия слабая и фазовая скорость близка к скорости  $V$  распространения волн в «обычной» LC-линии. На частотах  $\omega < \omega_0$  отсутствуют решения граничной задачи с вещественными  $k(\omega)$ . Это полоса непрозрачности или непропускания. Физический смысл появления полосы непрозрачности нетрудно понять. На частотах  $\omega < \omega_0$  колебательный контур в вертикальном плече линии имеет индуктивный характер. Это значит, что оба плеча оказываются индуктивными и распространение волн невозможно. Сигнал от источника уменьшается от звена к звену за счет деления напряжения.

**Пример 2. Модель среды с дисперсией в области высоких частот.**

Принципиальная схема LC-линии показана на рис. 4,в. В этом случае согласно определению частотно-зависимой индуктивности

$$L(\omega) = \frac{L}{1 - \omega^2 LC_1}, \quad \omega = \frac{\pm kV}{\sqrt{1 + (k^2/k_0^2)}}, \quad \left( k_0 = \sqrt{\frac{C}{C_1}}, \quad V = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \quad (23)$$

Дисперсионные ветви показаны на рис. 4,г. В данном случае область непрозрачности возникает на частотах  $\omega > \omega_{01} = k_0 V = 1/\sqrt{LC_1}$ , при которых горизонтальное плечо линии имеет емкостной характер.

В электродинамике принято считать, что дисперсия является временной, когда тензоры диэлектрической и/или магнитной проницаемостей являются функцией частоты (т.е. определение дается по физическому принципу – нелокальной связи токов и напряжений по времени). В общей теории волн о характере дисперсии судят по наличию характерных пространственно-временных масштабов. В данном примере с этой точки зрения дисперсию можно считать пространственно-временной, поскольку имеется характерный пространственный масштаб  $k_0^{-1}$ .

### 2.3. Волны пространственного заряда в системе взаимопроникающих холодных потоков заряженных частиц.

*Дисперсионное уравнение для волн пространственного заряда в системе взаимопроникающих потоков заряженных частиц.* Рассмотрим волны пространственного заряда в одномерной системе взаимопроникающих потоков заряженных частиц малой плотности (плотность на несколько порядков меньше по сравнению с плотностью обычных газов при нормальных условиях).

Системы подобного рода реализуются в вакуумной электронике. За счет малой плотности электронов (и/или ионов) частота столкновений мала (в отличие от обычных газов, где ситуация обратная), а длина свободного пробега большая. Поэтому потоки частиц могут проникать один сквозь другой на расстояния, которые вполне достаточны для распространения волны.

Физический смысл волн пространственного заряда можно пояснить «на пальцах» следующим образом. Рассмотрим электронный газ на фоне неподвижных (тяжелых) ионов. Если группа электронов в начальный момент сместилась например, вправо, в направлении оси  $x$ . Тогда слева от этого места образовался недостаток электронов, а справа – избыток. В результате возникнет электрическое поле в положительном направлении оси  $x$  (напомним, что электрическое поле это сила, действующая на единичный положительный заряд). На отрицательные заряды действует возвращающая сила, направленная против оси  $x$ , которая стремится вернуть электроны в исходное положение. Наличие возвращающей силы, как известно, приводит к колебаниям.

Будем считать, что скорости частиц малы по сравнению со скоростью света (нерелятивистский предел). Тепловым разбросом скоростей зарядов будем пренебрегать, то есть все заряды в данном элементе объема среды имеют одинаковую скорость («холодные» потоки). Волны пространственного заряда это чисто продольные волны, в которых электрическое поле направлено строго вдоль направления распространения и заряженные частицы смещаются вдоль этого направления. Магнитное поле токов не играет существенной роли (можно положить возмущения  $\vec{B} = 0$ ).

Сделанные предположения фактически соответствуют квазистатическому приближению, что использовать уравнения электростатики. Потоки могут различаться зарядами, массами и скоростями частиц. Запишем уравнения для  $N$ -компонентной одномерной системы (волны бегут вдоль оси  $x$ ). Отмечая частицы каждой компоненты индексом  $\alpha$ , получим уравнения

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial V_\alpha}{\partial x} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} E, \quad \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(n_\alpha V_\alpha)}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial x} - 4\pi \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha n_\alpha \equiv \frac{\partial D}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

где  $e_\alpha, m_\alpha$  заряд и масса частиц потока  $\alpha$ ,  $E = (\vec{E})_x$  – продольное электрическое поле.

Предполагается, что в невозмущенном состоянии каждый поток имеет свою плотность  $n_\alpha = n_{0\alpha}$  и скорость дрейфа  $V_\alpha = V_{0\alpha}$ . Кроме того, выполняется условие

нейтральности невозмущенной системы  $\sum_{\alpha=1}^N e_\alpha n_{0\alpha} = 0$ . Второе равенство в последнем

уравнении (1) это не дополнительное уравнение, а определение вектора электрической индукции  $\vec{D}$  (в этом случае распределение зарядов в вакууме рассматривается как поляризуемая среда).

В левой части первого уравнения (1) стоит полная производная скорости частиц по времени, а в правой – сила, действующая на заряд. Поскольку теплового разброса нет, скорость частиц в каждой точке пространства одинакова. Для нее и пишется уравнение. По существу это второй закон Ньютона. Второе уравнение это уравнение непрерывности. Уравнения движения частиц в (1) можно получить строго из кинетических уравнений,

поскольку функция распределения каждой компоненты по скоростям в данном случае есть дельта-функция (см. монографию А.Б. Михайловского в списке литературы).

Линеаризуем систему, полагая  $V_\alpha = V_{0\alpha} + \tilde{v}_\alpha$ ,  $n_\alpha = n_{0\alpha} + \tilde{n}_\alpha$  и  $E = \tilde{E}$ . Решение линейной задачи ищем в виде плоской бегущей волны

$$(\tilde{n}_\alpha, \tilde{v}_\alpha, \tilde{E}, \tilde{D}) = (\hat{n}_\alpha, \hat{v}_\alpha, \hat{E}, \hat{D}) \cdot \exp(ikx - i\omega t). \quad (2)$$

Получаем систему алгебраических уравнений для амплитуд

$$\begin{aligned} -i(\omega - kV_{0\alpha})\hat{V}_\alpha &= -\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\hat{E}_\alpha, \quad -i(\omega - kV_{0\alpha})\hat{n}_\alpha - ikn_{0\alpha}\hat{V}_\alpha = 0, \\ ik\hat{E} - 4\pi \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \hat{n}_\alpha &\equiv ik\hat{D} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражая комплексные амплитуды  $\hat{n}_\alpha, \hat{v}_\alpha$  через  $\hat{E}$  и используя данное выше определение  $\hat{D}$ , получим одно уравнение для  $E$  в виде

$$\hat{D} \equiv \varepsilon_{xx}(\omega, k)\hat{E} = 0, \quad \varepsilon_{xx} = 1 - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - kV_{0\alpha})^2}, \quad (4)$$

где  $\omega_{p\alpha} = \sqrt{4\pi e^2 n_{0\alpha} / m_\alpha}$  – плазменная частота компоненты  $\alpha$ . Коэффициент  $\varepsilon_{xx}(\omega, k)$  есть по определению продольная диэлектрическая проницаемость многопоточковой системы. Из условия существования нетривиального решения уравнения (4) имеем дисперсионное уравнение для продольных волн пространственного заряда

$$\varepsilon_{xx}(\omega, k) = 1 - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - kV_{0\alpha})^2} = 0. \quad (5)$$

Мы не будем анализировать дисперсионное соотношение (5) в общем виде, а ограничимся случаем высокочастотных волн в так называемой системе «пучок-плазма». Если частота волн велика колебаниями тяжелых ионов можно пренебречь (масса иона в 2000 раз больше массы электрона), и в конечном счете считать ионный фон неподвижным (ионный фон необходим для поддержания нейтральности системы в отсутствие возмущений). В этом случае имеется одна неподвижная электронная компонента, которую мы будем называть электронной плазмой, и одна движущаяся электронная компонента – электронный пучок. Положим  $\alpha = (1, 2)$ ,  $V_{01} = 0$ ,  $n_{01} = n_p$  – плотность плазмы,  $V_{02} = V_0$  – скорость дрейфа пучка,  $n_{02} = n_b$  – плотность пучка,  $m_{1,2} = m_e$  – масса электрона,  $e_{1,2} = -e < 0$  – заряд электрона. Дисперсионное уравнение принимает в этом случае вид

$$\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0, \quad (6)$$

где  $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_b / m_e}$  – плазменная частота пучка,  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_p / m_e}$  – плазменная частота неподвижной компоненты.

Рассмотрим сначала по отдельности дисперсионные ветки неподвижной и подвижной электронных компонент (пучка и плазмы). Для них соответственно имеем

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0, \quad \varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0. \quad (7)$$

Решая (7), находим ветви колебаний плазмы и пучка как независимых систем

$$\omega = \pm \omega_p, \quad \omega = kV_0 \pm \omega_b. \quad (8)$$

Дисперсионные ветви невзаимодействующих плазмы и пучка показаны на рис. 1а. У неподвижной холодной электронной компоненты частота постоянна. Пара пучковых ветвей наклонены по сравнению с плазменными, что обусловлено доплеровским сдвигом частоты. Верхняя ветвь колебаний пучка называют быстрыми волнами пространственного

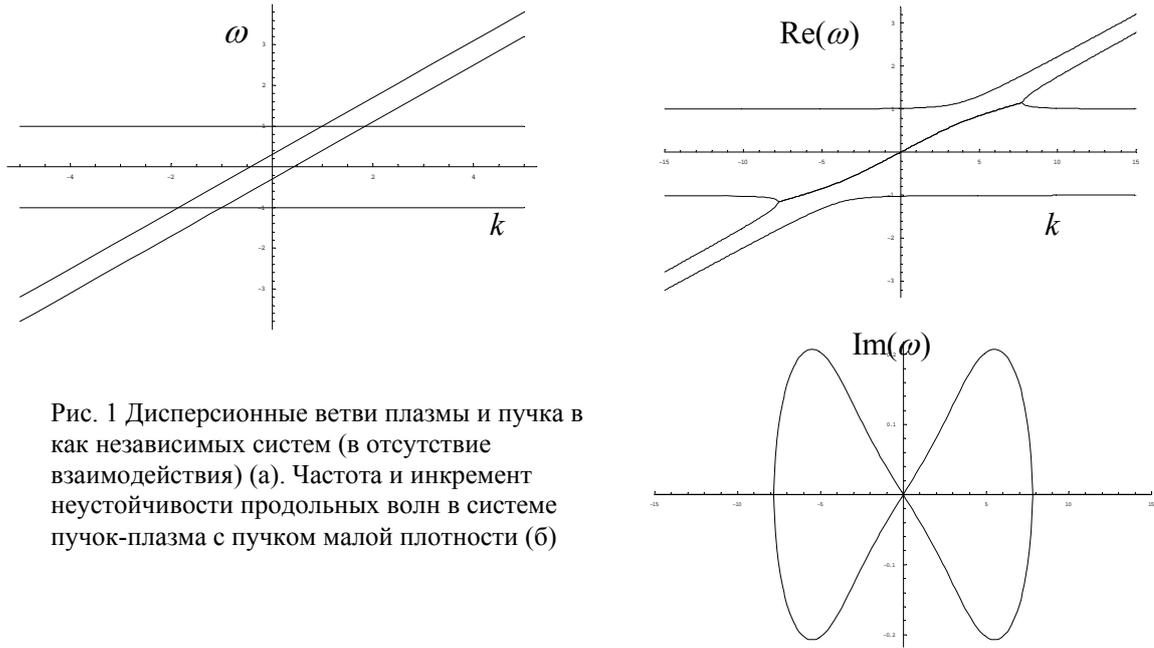


Рис. 1 Дисперсионные ветви плазмы и пучка в как независимых систем (в отсутствие взаимодействия) (а). Частота и инкремент неустойчивости продольных волн в системе пучок-плазма с пучком малой плотности (б)

заряда (БВПЗ), так как их фазовая скорость больше  $V_0$ , а нижняя ветка – медленными волнами (МВПЗ).

При включении взаимодействия через общее электрическое поле дисперсионные ветви деформируются в первую очередь вблизи области их пересечения. Во многих случаях плотность пучка мала по сравнению с плотностью плазмы, т. е. имеется малый параметр  $\alpha = n_b / n_0 = \omega_p^2 / \omega_b^2 \ll 1$ . Используя этот малый параметр, можно получить аналитически комплексные корни дисперсионного уравнения (см., например, монографию А.Б. Михайловского). Полные дисперсионные ветви показаны на рис. 1б. Там, где ветка медленной волны пересекается с плазменной, возникает *точка ветвления* функции  $\omega(k)$ , левее которой корни переходят в комплексную область. Корни комплексно сопряженные, поскольку дисперсионное уравнение имеет вещественные коэффициенты. Можно показать, что *инкремент* неустойчивости максимален при  $k = \omega_p / V_0$ :

$$(\text{Im } \omega)_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \alpha^{1/3} \omega_p. \quad (9)$$

В случае пучков малой плотности инкремент мал по сравнению с плазменной частотой.

Возможно несколько объяснений механизма пучковой неустойчивости. Пока дадим одно из них. Из рис. 1 видно, что часть пучковых веток оказывается в области отрицательной диэлектрической проницаемости плазмы:  $(\epsilon_{xx})_{plasma} < 0$  при  $0 < \omega < \omega_p$ . Но в среде с отрицательной диэлектрической проницаемостью в соответствии с законом Кулона одноименные заряды будут притягиваться, а разноименные – отталкиваться. Поэтому электрическое, вызванное разделением зарядов, не будет возвращать заряды в исходное состояние, а будет отклонять друг от друга. Возвращающая сила превращается в отклоняющую, что и приводит к неустойчивости. Такая неустойчивость с комплексно сопряженными корнями называется *реактивной* (обусловлена реакцией друг на друга связанных консервативных подсистем).

## Дисперсионное уравнение для направляемых волн. Редукция пространственного заряда в пучках ограниченного сечения.

До сих наших примеры дисперсионных уравнений касались плоских волн. Однако часто среда неоднородна в поперечном направлении. Простейший случай – волновод, система ограниченная в поперечном направлении. Очевидно, что понятие дисперсионного уравнения применимо и к направляемым волнам.

В качестве примера рассмотрим волны в пучке ограниченного сечения. На рис. 2 показано два варианта плазменно-пучковых систем с ограниченным сечением. В первом случае пучок радиуса  $a$  пронизывает безграничную плазму. Во втором – система пучок-плазма находится в металлической трубе. Будем считать, что в обоих случаях плазма сильно «замагничена», то есть на систему накладывается сильное магнитное поле, направленное вдоль оси пучка. Это делается для стабилизации пучка. В присутствии сильного магнитного поля задача упрощается, поскольку можно считать, что частицы пучка и плазмы перемещаются вдоль магнитного поля. Всякое поперечное движение переводится магнитным полем в круговое вращение с малым радиусом закрутки. Для частиц остаются одномерные уравнения, записанные выше. В то же время для потенциала следует записать неоднородное уравнение Пуассона.

Пусть ось трубы направлена вдоль координатной оси  $z$ , а радиус трубы равен  $a$ . Потенциал вводится посредством  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ . Линеаризованная система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial t} + V_{0\alpha} \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial z} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{n}_\alpha V_{0\alpha} + n_{0\alpha} \tilde{v}_\alpha)}{\partial z} = 0$$

$$\Delta_\perp \varphi + 4\pi \sum_{\alpha=1}^N e_\alpha \tilde{n}_\alpha \equiv \text{div} \vec{D} = 0$$
(10)

Задачу удобно решать в цилиндрических координатах  $(r, \vartheta, z)$ . Поперечный лапласиан в цилиндрических координатах имеет вид

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

Граничные условия на стенках идеально проводящей трубы сводятся к обращению в ноль касательной компоненты электрического поля

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = 0 \right|_{r=a}$$
(11)

Заметим, что электрическое поле имеет все три компоненты (поскольку потенциал

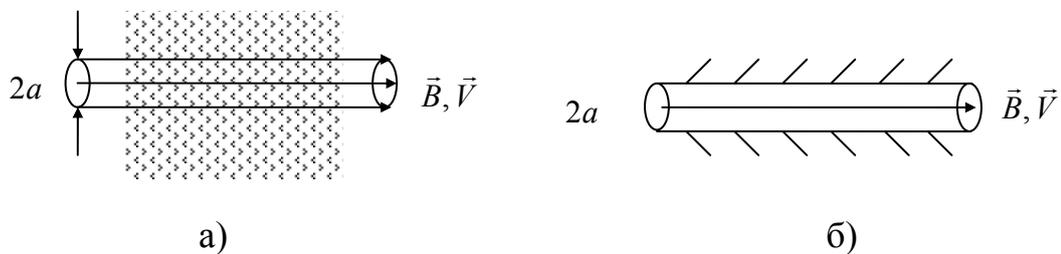


Рис. 2 Система пучок–плазма с пучком ограниченного сечения в безграничной плазме (а) и система пучок–плазма в трубе с идеально проводящими стенками (б)

функция всех трех координат), но на частицы влияет только продольная компонента поля. Решение ищется в виде

$$(\varphi, \tilde{v}_\alpha, \tilde{n}_\alpha) = [\hat{\varphi}(r), \hat{v}_\alpha(r), \hat{n}_\alpha(r)] \exp(ikz - i\omega t - im\theta) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots), \quad (12)$$

Азимутальное волновое число  $m$  принимает целые значения вследствие периодичности полей по азимутальной координате  $\vartheta$  с периодом  $2\pi$ . Подстановка (12) в (10) позволяет выразить амплитуды плотности и скорости через амплитуду потенциала:

$$\hat{n}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{n_{0\alpha} k^2}{(\omega - kV_{0\alpha})^2} \hat{\varphi}, \quad \hat{v}_\alpha = \frac{k}{(\omega - kV_{0\alpha})} \hat{\varphi}. \quad (13)$$

После подстановки (13) в последнее уравнение (10) получим уравнение для амплитудного профиля потенциала

$$\Delta_\perp \hat{\varphi} - k^2 \varepsilon_{zz}(\omega, k) \hat{\varphi} = 0 \quad (14)$$

Раскрывая эту запись имеем

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left( \kappa^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \hat{\varphi} = 0 \quad (15)$$

где введено обозначение  $\kappa^2 \equiv -k^2 \varepsilon_{zz}$ . Решение уравнения Бесселя (15) ищется в виде  $\hat{\varphi}(r) = C J_m(\kappa r)$ , где  $J_m$  – функция Бесселя порядка  $m$ . Величина  $\kappa$  иногда называется «поперечным волновым числом». Вторая собственная функция отброшена из условия ограниченности решения в нуле. Для решения вида (12) граничные условия (11) сводятся к одному требованию  $\hat{\varphi}(a) = 0$ . Тогда из условия, что постоянная  $C$  принимает ненулевые значения получим уравнение

$$J_m(\kappa a) = 0, \quad (16)$$

которое в сочетании с приведенным выше выражением для  $\kappa$  можно рассматривать как дисперсионное уравнение задачи. Обозначая через  $p_{mn}$   $n$ -ый нуль функции Бесселя порядка  $m$ , получим  $\kappa a = p_{mn}$ . Нумерацию нулей по  $n$  следует вести с ненулевого корня, поскольку корень  $\kappa a = p_{m0} = 0$  дает  $\kappa = 0$ , что приводит к тривиальному решению  $\hat{\varphi}(r) \equiv 0$ . С учетом определения  $\kappa$  получим дисперсионное уравнение в виде

$$\frac{p_{mn}^2}{k^2 a^2} + \varepsilon_{zz}(\omega, k) = 0 \quad (17)$$

Введем коэффициент редукции (ослабления) пространственного заряда  $R(ka)$  с помощью соотношения

$$R(ka) = 1 + \frac{p_{mn}^2}{k^2 a^2}, \quad (18)$$

Тогда дисперсионное уравнение ограниченной системы (17) можно записать в виде

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 R(ka)} - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^2 R(ka)} = 0. \quad (19)$$

После замены

$$\omega_{p,b}^2 \rightarrow \bar{\omega}_{p,b}^2 = \frac{\omega_{p,b}^2}{R(ka)} \quad \text{или, что то же самое,} \quad n_{p,b} \rightarrow \bar{n}_{p,b} = \frac{n_{p,b}}{R(ka)} \quad (20)$$

уравнение (19) сводится к дисперсионному уравнению одномерной задачи (6) с новыми плотностями пучка и плазмы  $\bar{n}_{p,b}$ . Теперь ясно, что  $R(ka)$  действительно имеет смысл коэффициента редукции (ослабления) пространственного заряда. Отметим, что выражение (18) для коэффициента редукции сохраняется и для ограниченного по радиусу пучка в безграничной плазме, но для  $p_{mn}$  вместо (16) получается более сложное трансцендентное уравнение.

Эффект редукции пространственного заряда имеет простое объяснение. Например, для пучка в безграничной плазме (рис. 2) ясно, что силовые линии электрического поля

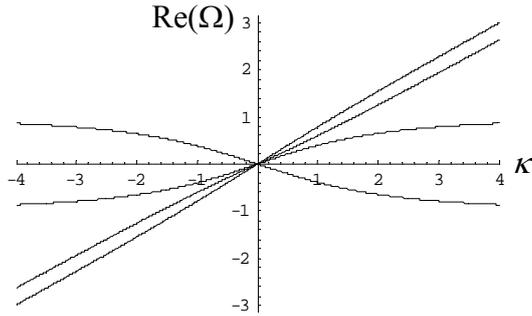


Рис. 3 Дисперсионные ветви системы поток-плазма в трубе при больших скоростях потока ( $v_0 = 0.7$ ,  $\alpha = 0.04$ ).

Пересечение плазменной ветви с пучковой волной отсутствует. Соответственно отсутствует пучковая неустойчивость

сгруппированных частиц «вылезают» за пределы пучка, что равносильно ослаблению сгустков зарядов в одномерной системе. Именно этот эффект описывает коэффициент редукиции. В случае проводящей трубы влияние границ можно свести к введению отраженных виртуальных зарядов (с их помощью можно удовлетворить граничным условиям на стенках). Эти отраженные заряды подавляют электрическое поле при группировке истинных зарядов. Эффект редукиции тем сильнее, чем больше длина волны, так как при малых длинах волн сгустки имеют малый продольный размер и поэтому созданное ими поле почти не испытывает влияния границ.

Чтобы изучить переход к одномерной модели, введем безразмерные волновое число, скорость и частоту:  $\varkappa = ka$ ,  $v_0 = V/(a\omega_p)$ ,  $\Omega = \omega/\omega_p$ . Тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$R(\varkappa) - \frac{1}{\Omega^2} - \frac{\alpha}{(\Omega - \varkappa v_0)^2} = 0. \quad (21)$$

Ограничимся рассмотрением главной моды волновода, которая в наименьшей степени подвержена редукиции заряда, так как имеет наиболее простую (гладкую) поперечную структуру. Для этой моды  $p_{01} = 2,4$  (мода – тип колебаний, характеризуемый определенной пространственной структурой). Дисперсионные ветви этой моды при достаточно больших скоростях потока показаны на рис. 3. Результат легко объясним. Плазменные частоты плазменной и пучковой волн уменьшаются при уменьшении волнового числа (увеличении длины волны) и обращается в нуль при  $k \rightarrow 0$ . Соответственно, дисперсионные ветви приходят в начало координат. Можно показать, что асимптотами дисперсионных ветвей при малых  $\varkappa$  являются прямые, выходящие из точки с нулевой частотой. Поскольку отсутствует пересечение волн плазменной ветви и медленной пучковой волны, неустойчивость не возникает. Выход частот волн на значения в одномерной задаче происходит при достаточно больших волновых числах ( $\kappa = ka > 3$ ). Ясно, что для мелкомасштабных изменениях плотности заряда вдоль оси  $x$  (по сравнению с радиусом трубы) стенки слабо влияют на формирование электрического поля, которое близко к тому, что возникает в одномерной задаче. Если уменьшать безразмерную скорость потока, ветви пучковой и плазменной волн сливаются и, начиная с некоторого значения скорости ( $v_0 \leq 0.63$  при  $\alpha = 0.04$ ), появляется область неустойчивости, которая расширяется от  $\varkappa = 0$  в сторону увеличения волнового числа.

На рис. 4 показаны дисперсионные ветви в пределе малых безразмерных скоростей потока. Эффекты редукиции и отличие дисперсионных ветвей от одномерного случая играют существенную роль в области  $\varkappa < 3$ . При уменьшении скорости потока верхняя граница неустойчивости смещается в область  $\varkappa > 3$  и неустойчивость становится близка к той, что была рассмотрена ранее в рамках одномерной модели. Таким образом, редукиция пространственного заряда слабо влияет на пучковую неустойчивость при  $ka > 3$ , где в

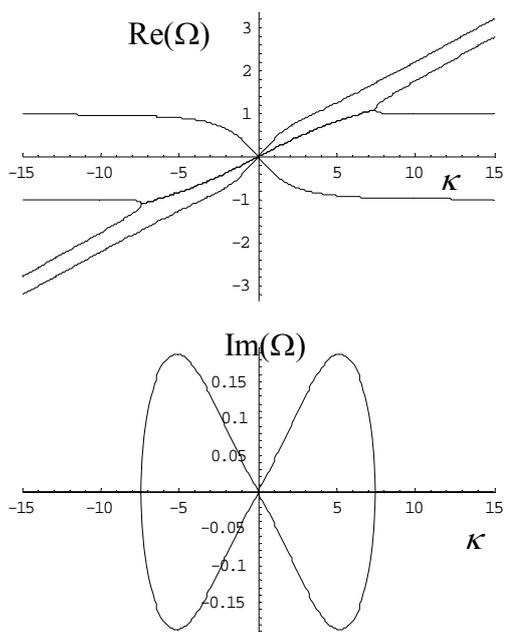


Рис. 4 Дисперсионные ветви холодной системы поток-плазма в трубе при малых скоростях потока ( $v_0 = 0.2$ ,  $\alpha = 0.04$ ). Видно, что имеется пучковая неустойчивость, связанная с наличием пересечения ветви плазменных волн с медленной пучковой волной. В области  $\kappa = ka \geq 3$  дисперсионные кривые переходят в дисперсионные ветви одномерной модели системы пучок-плазма

качестве оценки волнового числа следует взять точку пересечения дисперсионных веток пучковых и плазменных волн  $k = \omega_p / V$ . Тогда получим  $\omega_p a / V > 3$ , или в записи через безразмерные переменные  $v_0 < 1/3$ . Это согласуется с числовыми значениями, для которых построены графики на рис. 3 и 4.

Отметим, что картина дисперсионных ветвей, аналогичная показанной на рис. 3, получается в том случае, когда электронный поток проходит через электродинамическую систему, которая замедляет электромагнитные волны (спираль или гребенка). Такое сходство объясняется тем, что и в этом случае основное действие на заряды оказывает продольная составляющая электрического поля. На этой основе строится волновая теория электронного прибора – лампы бегущей волны (ЛБВ).

Таким образом, в отличие от случая плоских волн построение дисперсионного соотношения для направляемых волн сводится к решению краевой задачи на собственные значения. Направляемые собственные волны имеют поперечную пространственную структуру).

#### Учет теплового разброса скоростей частиц. Квазигидродинамическое описание плазмы.

Используя введенную выше модель холодного газа заряженных частиц, легко перейти к понятию гидродинамического описания колебаний плазмы. Плазма – ионизованный, но в целом нейтральный газ, состоящий из электронов, ионов и нейтралов. Электромагнитные поля не действуют на нейтралы, которые участвуют в движении только через столкновения с заряженными частицами. Часто используется приближение в котором плазма полностью ионизована. Причины ионизации могут быть самые разные (например, сильный разогрев). Учет конечной температуры компонент делается это по аналогии с обычной гидродинамикой. Поскольку компоненты плазмы имеют малую плотность, они почти не препятствуют движению друг друга. Поскольку силы со стороны электромагнитных полей для частиц разного сорта различны, для каждого сорта частиц пишутся отдельные уравнения движения. Конечная температура учитывается путем добавления в правую часть уравнений движения градиента давления. В неоднородной задаче получим уравнение импульсов для компоненты  $\alpha$  в виде

$$\frac{\partial \vec{V}_\alpha}{\partial t} + (\vec{V}_\alpha \cdot \nabla) \vec{V}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \vec{E}' - \frac{1}{m_\alpha n_\alpha} \nabla p_\alpha. \quad (22)$$

Здесь  $\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V} \vec{B}]$  учитывает силу Лоренца. Давление записывается по формуле кинетической теории для разреженного идеального газа

$$p_\alpha = 3\kappa_B T_\alpha n_\alpha, \quad (23)$$

где  $\kappa_B$  – постоянная Больцмана,  $T_\alpha = \text{const}$  – температура компоненты  $\alpha$ . Подчеркнем, что давление (как мера теплового движения) также определяется отдельно для каждой компоненты, что принципиально отличается от обычной гидродинамики. В квазигидродинамической модели столкновения не играют существенной роли и ими в часто вообще можно пренебречь («бесстолкновительная» плазма). В гидродинамике ситуация противоположная – частота столкновений велика. Коэффициент 3 записан из сопоставления результатов расчета дисперсии с более общей кинетической теорией. К правильному результату приводит также уравнение состояния адиабатического газа, в котором коэффициент тоже равен трем. Добавление давления в (22) с точки зрения общей кинетической теории есть способ замыкания уравнений для первого момента скорости. Если в обычной гидродинамике этот способ замыкания обосновывается строго (благодаря «максвеллизации» функции распределения из-за большого числа столкновений), то для разреженной плазмы – это гипотеза, оправданная полученным результатом.

Уравнения (22) следует дополнить уравнением непрерывности для каждой компоненты

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \text{div}(n_\alpha \vec{V}_\alpha) = 0. \quad (24)$$

Компоненты  $\alpha$  типом заряженных частиц (электроны, ионы), а также их средней скоростью  $\vec{V}_\alpha$ . Для вывода дисперсионного уравнения следует записать систему уравнений Максвелла

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \sum_\alpha (e_\alpha n_\alpha \vec{v}_\alpha) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (25)$$

Рассмотрим в качестве примера плоские высокочастотные волны в неподвижной электронной плазме (тяжелые ионы считаются неподвижными). Выберем направление оси  $x$  вдоль волнового вектора. Линеаризуем материальные уравнения (22), (23), (24) и будем искать решение в виде  $\sim \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t)$ . Из второго уравнения Максвелла магнитная

индукция выражается через напряженность электрического поля:  $\hat{B} = (c/\omega)[\vec{k} \times \hat{E}]$ .

Поэтому магнитная индукция исключается из материальных уравнений (куда она входит через силу Лоренца) и для описания отклика плазмы на электромагнитное поле в линейном приближении достаточно диэлектрической проницаемости (магнитная проницаемость равна единице). Разрешая материальные уравнения относительно компонент вектора  $\vec{E}$  и используя определение вектора индукции (25), получим связь индукции с электрическим полем через тензор диэлектрической проницаемости:

$\hat{D}_l = \sum_{p=1}^3 \epsilon_{lp}(\omega, \vec{k}) \hat{E}_p$ . Тогда из уравнений Максвелла, получается однородная система

уравнений для трех компонент вектора электрического поля:

$$\sum_{n=1}^3 \left( \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{mn} + k_m k_n - k^2 \delta_{mn} \right) \hat{E}_n = 0. \quad (26)$$

Равенство нулю определителя этой системы уравнений дает искомое дисперсионное уравнение задачи.

Остановимся подробнее на случае неподвижной (в среднем) электронной плазмы (движением ионов пренебрегаем – высокочастотные волны). Направим ось  $x$  в направлении волнового вектора. Несложные вычисления показывают, что тензор диэлектрической проницаемости неподвижной плазмы диагонален, что является, очевидно, следствием изотропного характера среды. При этом вместо (26) получается три независимых уравнения

$$\left(\omega^2 \varepsilon_{\perp}(\omega) - c^2 k^2\right) E_{y,z} = 0, \quad \varepsilon_{xx}(\omega, k) E_x = 0, \quad (27)$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - (3/2)k^2 V_T^2}, \quad (28)$$

где величины  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  есть диагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы,  $V_T = \sqrt{2\kappa_B T / m}$  – тепловая скорость электронов. Отметим, что поперечные компоненты диэлектрической проницаемости от температуры не зависят. Из условия существования нетривиальных решений (27), получаем дисперсионные соотношения для собственных колебаний плазмы

$$\omega^2 \varepsilon_{\perp}(\omega) = c^2 k^2, \quad \varepsilon_{xx}(\omega, k) = 0. \quad (29)$$

Откуда находятся дисперсионные ветви

$$\omega_{1,2} = \sqrt{k^2 c^2 + \omega_p^2}, \quad \omega_{1,2} = \sqrt{\omega_p^2 + (3/2)k^2 V_T^2} \approx \pm \omega_p \left(1 + \frac{3k^2 V_T^2}{4\omega_p^2}\right). \quad (30)$$

Приближенное выражение в (30) дано для  $k^2 V_T^2 / \omega_p^2 \approx V_T^2 / V_{\phi}^2 \ll 1$ , где  $V_{\phi} = \omega / k$  – фазовая скорость волны. Первая пара ветвей соответствует поперечным электромагнитным волнам. При этом согласно (29) одинаковые дисперсионные ветви имеют волны с ортогональной поляризацией (вырождение по поляризации). Физически это электромагнитные волны вакуума, модифицированные в присутствии заряженных частиц. Заметим, что при  $\omega < \omega_p$  плазма не прозрачна для электромагнитных волн. Вторая пара ветвей ветвь (30) это знакомые нам продольные волны, но уже в электронной системе с конечной температурой (их еще называют плазменными или ленгмюровскими волнами). Дисперсионные ветви электромагнитных и ленгмюровских волн показаны на рис. 5. Внешне они похожи друг на друга, но с одним существенным отличием – наклон асимптот, определяемый тепловой скоростью, существенно меньше, чем в случае электромагнитных волн, предельная скорость которых равна скорости света.

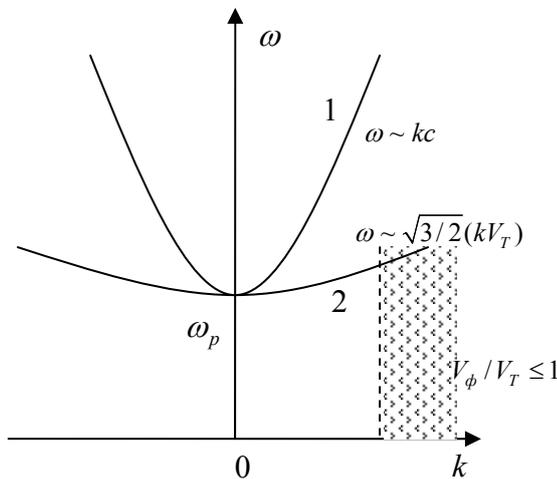


Рис. 5 Дисперсионные ветви высокочастотных волн в горячей плазме: 1 – поперечные электромагнитные волны, 2 – продольные ленгмюровские волны. Заштрихована область малых фазовых скоростей ленгмюровских волн  $V_{\phi} / V_T \equiv \omega / k V_T < 1$ , в которой существенную роль играет затухание Ландау.

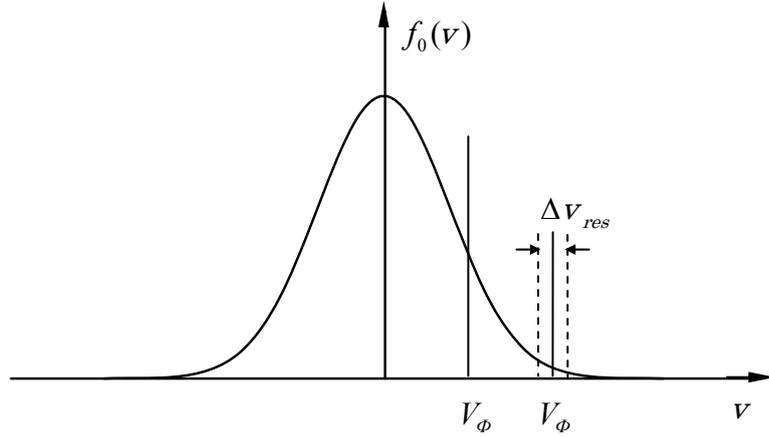


Рис. 6 Функция распределения частиц плазмы по скоростям и положение на ней точки фазовой скорости волны (точки резонанса волна-частица). Пунктиром показана область резонансных частиц, которые определяют малое затухание волны.

Тепловая поправка для продольных волн имеет реальный смысл только в случае достаточно больших фазовых скоростей волн, когда в своей системе отсчета волна действует на частицы плазмы как на единое целое – тепловой разброс скоростей частиц не играет существенной роли. В этом случае фазовая скорость волны отображается точкой на хвосте функции распределения по скоростям  $f_0(v)$  – рис. 6, где оказывается слабым кинетический эффект – затухание Ландау. В этом случае волна взаимодействует, в основном, с частицами плазмы, имеющими скорости, близкие к ее фазовой (поле волны покоится в системе отсчета резонансных частиц и наиболее сильно отклоняет именно эти частицы). Область резонанса на рис. 6 показана пунктирными линиями. Качественное объяснение затухания Ландау сводится к следующему. Резонансные частицы, обгоняющие волну, группируются полем волны так, что в среднем тормозятся им волны и, следовательно, отдают волне свою кинетическую энергию. Напротив, частицы, отстающие от волны, ускоряются и отбирают энергию у волны. Если  $\partial f_0(v)/\partial v < 0$  в окрестности точки  $v = V_\phi$ , обгоняющих волну частиц меньше и волна затухает. Таким образом, затухание Ландау пропорционально (по величине) наклону функции распределения по скоростям  $\partial f_0(v)/\partial v$ , взятому при  $v = V_\phi$ .

Согласно рис. 6, затухание Ландау уменьшается, когда точка резонанса скоростей волны и частиц смещается на «хвост» функции распределения, где ее наклон мал. Это происходит, когда фазовая скорость волны превышает тепловую скорость частиц. С учетом найденной выше дисперсии плазменных волн условие малого затухания имеет вид  $(V_\phi / V_T)^2 \equiv \omega^2 / k^2 V_T^2 > 1$ . Соответственно во второй формуле (28) тепловая поправка в знаменателе в пределах применимости квазигидродинамики должна оставаться малой. Именно для этого случая записано приближенное выражение в (30). На рис. 5 область с большим затуханием Ландау ленгмюровских волн показана штриховкой. Фактически квазигидродинамическое приближение применимо, пока частота ленгмюровских волн не слишком сильно превышает плазменную частоту  $\omega_p$ . Добавим, что движением ионов можно пренебречь для частот  $\omega \gg \omega_{pi}$ , где  $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi e_i^2 n_{0i} / m_i}$  – плазменная частота ионов. Поскольку  $\omega_{pi} \ll \omega_p$ , то указанное условие хорошо выполнено для ленгмюровских и электромагнитных волн, рассмотренных выше.

## 2.4 АБСОЛЮТНАЯ И КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ. УСИЛЕНИЕ И НЕПРОПУСКАНИЕ.

Дисперсионное уравнение описывает распространение монохроматических волн, поле которых  $u \sim \exp(ikx - i\omega t)$  имеет бесконечную протяженность в пространстве и во времени. Однако физический смысл имеют локализованные в пространстве и во времени возмущения – спектральные пакеты монохроматических волн. При наличии неустойчивости монохроматических волн ( $\text{Im } \omega > 0$ ) в безграничной среде возможно два пути развития локализованного возмущения:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x = \text{const}}} |u(x, t)| = 0, \quad \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x = \text{const}}} |u(x, t)| = \infty \quad (1)$$

В первом случае фиксированной точке пространства возмущение с течением времени исчезает, однако энергия поля растет ( $\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, t) dx \rightarrow \infty$ ), т.е. нарастание возмущения сопровождается его переносом в пространстве. Такая неустойчивость называется конвективной. Второе условие (1) соответствует неограниченному росту возмущения в фиксированной точке пространства. Такая неустойчивость называется абсолютной.

Вопрос о разделении абсолютной и конвективной неустойчивости решается наиболее просто, если среда описывается гиперболической системой уравнений. В гиперболической системе порядка  $n$  имеется  $n$  вещественных и отличных от нуля асимптот дисперсионных кривых:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(k)/k = V_j$  ( $V_j = \text{reals}, \neq 0, j = 1 \div n$ ). Требование гиперболичности – весьма жесткое ограничение. Например, если число вещественных характеристик меньше порядка системы  $n$ , то она уже не гиперболическая. Можно математически строго показать, что область распространения возмущений на плоскости  $(x, t)$  в гиперболической системе ограничена характеристиками – прямыми, наклоны которых совпадают с асимптотами дисперсионных кривых. Для гиперболических систем получен критерий, который иногда называют правилом Стэррока: если асимптоты дисперсионных кривых, примыкающих к области неустойчивости, направлены в одну сторону, неустойчивость конвективная, если же

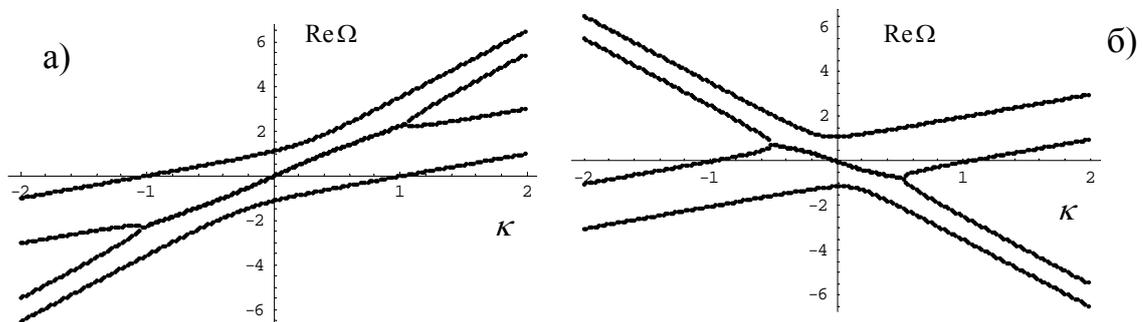


Рис. 1 Дисперсионные кривые для системы двух взаимопроникающих электронных потоков: а)  $v_1 = 1$   $v_2 = 3$ ,  $\Omega_{p1} = 1$ ,  $\Omega_{p2} = \sqrt{0.5}$  (потоки попутные, конвективная неустойчивость), б)  $v_1 = 1$   $v_2 = -3$ ,  $\Omega_{p1} = 1$ ,  $\Omega_{p2} = \sqrt{0.5}$  (потоки встречные, абсолютная неустойчивость). Видны области  $k$  с комплексно сопряженными корнями  $\Omega(k)$ , имеющих одинаковые  $\text{Re } \Omega$  (зависимости  $\text{Im } \Omega(k)$  не показаны)

в разные стороны – абсолютная. На рис. 1 показаны примеры расчета дисперсионных ветвей волн пространственного заряда в системе двух взаимопроникающих электронных потоков (для того, чтобы качественно построить эти ветви, сначала следует нарисовать дисперсионные характеристики двух невзаимодействующих потоков). Для вычислений дисперсионное уравнение приводится к безразмерной форме так же, как это делалось для системы пучок-плазма в п. 2.3:

$$R(\kappa) - \frac{\Omega_{p1}^2}{(\Omega - \kappa v_1)^2} - \frac{\Omega_{p2}^2}{(\Omega - \kappa v_2)^2} = 0. \quad (2)$$

где  $\Omega_{p1,2} = \sqrt{4\pi e^2 n_{01,2}}$ . При этом без ущерба общности (за счет использования при нормировках значений частоты  $\omega_{p1}$  и скорости  $V_1$ ) можно считать  $\Omega_{p1} = 1$  и  $v_1 = 1$ . Видно, что в этой системе существует область неустойчивости монохроматических волн. При одинаковых знаках скоростей потоков ( $V_1 \cdot V_2 > 0$  – спутные потоки) неустойчивость конвективная, а при различных знаках скоростей ( $V_1 \cdot V_2 < 0$  – встречные потоки) – абсолютная. Однако существует множество примеров неравновесных сред, описание которых выходит за рамки гиперболических систем уравнений, для которых правило Стэррока неприменимо.

Неустойчивые среды способны усиливать волны. Пусть ограниченная среда занимает полупространство  $x > 0$  и на границе действует монохроматический источник с частотой  $\omega$ . В такой среде распространяются волны с волновыми числами  $k(\omega) = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$ . Если  $\text{Im} k < 0$ , то поле волны экспоненциально растут в направлении оси  $x$ . Но означает ли это, что в среде происходит усиление волны? Нетрудно понять, что усиление будет лишь в том случае, когда волна распространяется в положительном направлении оси  $x$ , то есть переносит энергию в этом направлении (см. рис. 1 п.2.1). Не всякая волна может быть возбуждена в среде с границы  $x = 0$ . Если  $\text{Im} k < 0$  имеет волна, распространяющаяся навстречу оси  $x$ , то это затухающая волна и усиление отсутствует. Таким образом, условие

$$\text{Im} k(\omega) < 0 \quad (3)$$

означает наличие в среде усиления волны только при распространении этой волны в положительном направлении оси  $x$ . В этом смысле можно говорить о проблеме усиления и непропускания волн. Таким образом, для того, чтобы отличить усиление от непропускания волны, необходимо уметь определять направление распространения этой волны.

Как же определить направление распространения? В консервативной или слабо диссипативной системе может оказаться достаточно найти знак групповой скорости. Другая возможность – использование точных решений. Например, общее решение волнового уравнения есть сумма двух волн, распространяющихся навстречу друг другу и легко отделить волну, бегущую навстречу оси  $x$ . В общем случае неравновесной среды, в которой  $\text{Im} k(\omega)$  не входит с малым параметром, требуется специальный анализ. Решая задачу в классе одной монохроматической волны (дисперсионное уравнение), невозможно ответить на этот вопрос, так как поле этой волны имеет бесконечную протяженность в пространстве и длительность во времени, т.е. в реальной такая волна не существует. Ясно, что необходимо изучить процесс установления монохроматической волны с локализованными начальными условиями либо с учетом момента включения источника, возбуждающего эту волну.

Для большого класса сред ответы на поставленные выше вопросы дают критерии Бриггса. Их вывод основывается на исследовании асимптотических решений двух задач о возбуждении волн внешним источником:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \begin{cases} \delta(x)\delta(t) & \text{(задача о неустойчивости)} \\ \delta(x)\mathcal{G}(t)e^{-i\omega_0 t} & \text{(задача об усилении)} \end{cases} \quad (4)$$

В обоих случаях волна возбуждается локализованным в пространстве источником в виде дельта-функции  $\delta(x)$ , что обеспечивает физическую реализуемость возмущения. Точечный источник фактически определяет функцию Грина задачи. Как известно, через функцию Грина можно записать решение для любого источника  $f(x)$ . В задаче о неустойчивости зависимость от времени  $\delta(t)$  обеспечивает возбуждение широкого спектра возмущений в момент  $t=0$ . В задаче об усилении вводится ступенчатая единичная функция Хевисайда  $\mathcal{G}(t)$ , которая определяет момент включения гармонического источника с частотой  $\omega_0$ . Записывая интеграл Фурье от полученного результата, можно найти реакцию на источник с произвольно зависимостью от времени, имеющий момент включения. Таким образом, постановка задачи (4) фактически относится широкому классу источников возмущений.

Совершим в (4) преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по пространственной переменной. Вместо традиционного параметра  $p$  в преобразовании Лапласа введем комплексный параметр  $\omega$ , полагая  $p = -i\omega$ . Это удобно тем, что при вещественных  $\omega$  преобразование Лапласа превращается в обычное преобразование Фурье, причем в той форме записи, в которой мы его писали ранее. Тогда решение задачи о возбуждении волн дается обратными преобразованиями Фурье-Лапласа

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx-i\omega t} dk d\omega}{D(\omega, k)} & \text{(задача о неустойчивости)} \\ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx-i\omega t} dk d\omega}{i(\omega_0 - \omega)D(\omega, k)} & \text{(задача об усилении)} \end{cases} \quad (5)$$

где  $D(\omega, k) = L(-i\omega, ik)$  – знакомая нам дисперсионная функция задачи. Где должен находиться контур интегрирования в интеграле по частотам? В подынтегральном выражении  $k$  вещественные. Особенности подынтегрального выражения при каждом действительном

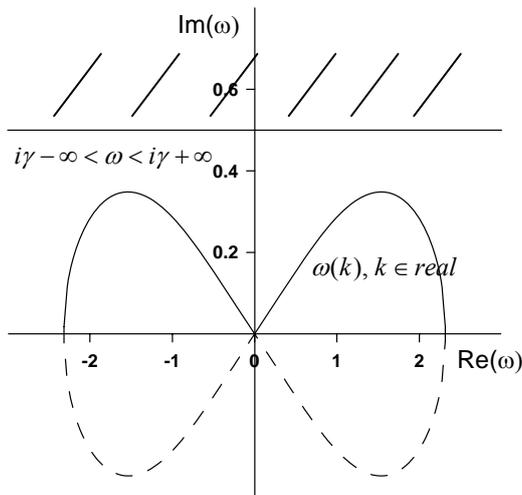


Рис. 2 Контур интегрирования в обратном преобразовании Лапласа и по времени (заштрихована область аналитичности) и отображение дисперсионных ветвей  $\omega(k)$  с вещественными значениями  $k$  на комплексную плоскость  $\omega$ . Численные данные соответствуют двухпоточковой системы с одинаковыми знаками скоростей потоков (рис.1,б). Заметим, что инкремент неустойчивости ограничен:  $\text{Im}\Omega < 0.4$

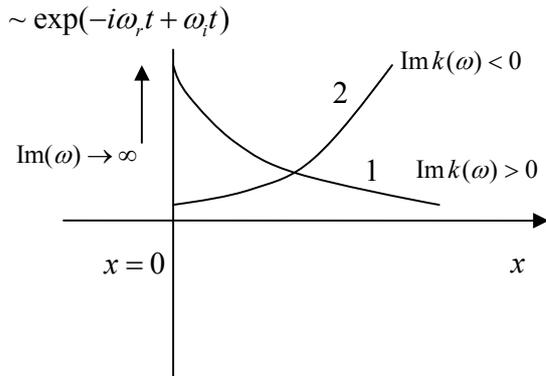


Рис.3 Иллюстрация к определению направления распространения волн. Волна 1, поле которой спадает от растущего источника с  $\text{Im}(\omega) \rightarrow \infty$ , удовлетворяет принципу причинности. Поэтому она распространяется в положительном направлении оси  $x$ . Волна 2, у которой поле растет вглубь среды при  $\text{Im}(\omega) \rightarrow \infty$  не удовлетворяет принципу причинности. Ее можно возбудить только границы среды, расположенной в области  $x > 0$

$k$  являются нули дисперсионной функции, которые лежат на дисперсионных ветвях  $\omega(k)$ . Вещественная ось плоскости  $k$  отображается функцией  $\omega(k)$  на плоскость  $\omega$  в виде кривой (или нескольких кривых), часть которой лежит в области  $\text{Im} \omega > 0$ , если среда неустойчива. Фактически  $\text{Im} \omega(k)$  это инкремент неустойчивости гармонических волн при вещественных  $k$ , о котором говорилось на прошлых лекциях. Пример отображения для двухпоточковой системы со спутными потоками приведен на рис. 2. Таким образом, контур  $\gamma$  должен лежать выше точки максимального инкремента в задаче о неустойчивости гармонических волн:  $\gamma > M = \max(\text{Im} \omega(k))$ ,  $k \in \text{reals}$  (рис. 2). Область аналитичности находится выше контура  $\text{Im} \omega = \gamma$ .

В общем случае проблема сводится к исследованию асимптотического поведения интегралов (5) при  $t \rightarrow \infty$  и решается на основе теории функций комплексного переменного. Мы не будем останавливаться на процедуре решения этих задач и ограничимся формулировкой результатов. С методологической точки зрения предпочтительнее начать с критерия усиления волн. Оказывается, что правильный ответ на вопрос, как определить направление волны, можно получить из простых качественных соображений. Подчеркнем, что речь идет не о доказательстве, а об интерпретации формально полученного результата, поясняющей суть дела.

Пусть в точке  $x = 0$  или на границе среды действует источник с комплексной частотой, причем  $\text{Im} \omega > 0$ , т.е. амплитуда его растет  $\sim \exp(\text{Im} \omega t)$  (рис. 3). Искомое решение будет монохроматической волной с комплексными  $\omega$  и  $k$ , которые связаны дисперсионным уравнением. Давайте зафиксируем вещественную часть  $\text{Re} \omega$  и будем увеличивать мнимую часть частоты источника:  $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$ . Тогда ясно, что в реальной системе поле в области  $x > 0$  должно будет спадать с ростом  $x$ , так как информация о росте поля на границе при удалении вглубь среды должна запаздывать в соответствии с принципом причинности. Стремление  $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$  должно привести к тому, что рост поля за счет источника опередит возможный его рост внутри среды из-за наличия неустойчивости. Таким образом, все ветви решений дисперсионного уравнения, определенные на комплексной плоскости  $\omega$ , можно разделить на два класса. 1)  $\text{Im} k(\omega) > 0$  при  $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$ . В этом случае волна распространяется в положительном направлении оси  $x$ . 2)  $\text{Im} k(\omega) < 0$  при  $\text{Im} \omega \rightarrow +\infty$ . Распространение происходит в отрицательном направлении оси  $x$ . Можно показать, что асимптотическое решение (5) имеет следующий вид

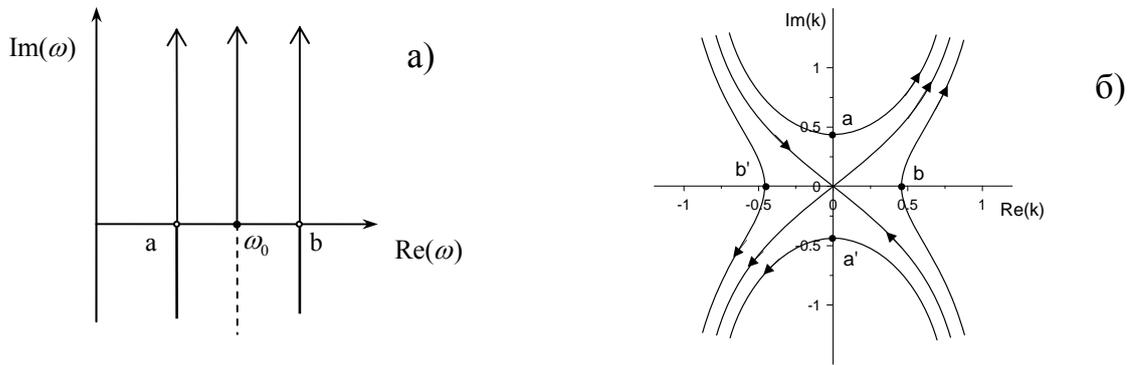


Рис. 4 Отображение прямых  $\text{Re}(\omega) = \text{const}$  на плоскость  $k$  для дисперсионных ветвей (7) (расчет в нормированных переменных при  $V = 1, \omega_0 = 1$ ); на плоскости  $\omega$  взяты прямые  $\text{Re} \omega = \omega_0 = 1, 1 \pm 0.1$ . Кривые в верхней и в нижней полуплоскости на рис 4б соответствуют двум значениям квадратного корня, имеющим противоположные знаки.

$$u(x, t) \sim \begin{cases} \sum_p A_p e^{ik_p(\omega_0)x - i\omega_0 t}, & x > 0 \\ \sum_n A_n e^{ik_n(\omega_0)x - i\omega_0 t}, & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

где  $A_p, A_n$  – постоянные коэффициенты. Волнам, которые распространяются в области  $x > 0$  присвоен индекс  $p$  (от слова positive), а волнам из области  $x < 0$  – индекс  $n$  (negative).

На практике направление распространения волн удобно определять графически. Рассмотрим среду с дисперсионным уравнением  $D(\omega, k) = \omega^2 - k^2 V^2 - \omega_0^2$ , которая при  $\omega < \omega_0$  имеет область непрозрачности (например, электромагнитные волны в плазме, или в LC-линии). В данном случае ветви находятся явно

$$k = \frac{1}{V} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (7)$$

и  $k(\omega)$  – двузначная функция. В выражении (7) проведем нормировки, после которых получим это же выражение с заменой  $V \rightarrow 1$  и  $\omega_0 \rightarrow 1$ . На рис. 4 показаны линии  $\text{Re} \omega = \text{const}$  и их отображение на плоскость  $k$ , определяемое функцией  $k(\omega)$ , которое имеет вид седловой структуры. Сепаратрисы являются отображением прямой  $\omega = \omega_0$ , которая проходит через точку ветвления  $\omega_0 = 1$ . Точки  $a$  и  $b$ , лежащие на действительной оси плоскости  $\omega$ , отображаются на плоскости  $k$  парами точек  $(a, a')$  и  $(b, b')$ , которые соответствуют мнимым и вещественным значениям квадратного корня с различными знаками. Сепаратрисы в первом и третьем квадрантах на плоскости  $k$  отображают линию  $\text{Re}(\omega) = \omega_0$  при перемещении по ней из точки ветвления в полуплоскость  $\text{Im} \omega > 0$ . Две другие сепаратрисы – отображения этой же прямой при перемещении из полуплоскости  $\text{Im} \omega < 0$  к точке ветвления.

Рассмотрим дисперсионную ветвь  $k(\omega)$  при вещественных и комплексных  $\omega$ , которая отображается линиями в третьем квадранте на рис. 4б. На ней находится «подозрительная»

на усиление волна с  $\text{Im } k < 0$  при вещественном  $\omega$  (точка  $a'$ ). Видно, что для этой волны выполнено условие  $\text{Im } k < 0$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$  и, согласно критерию Бриггса, она распространяется навстречу оси. Видно также, что на всех частотах, включая  $\omega < \omega_0$ , волны этой ветви распространяются навстречу оси  $x$ , а значит являются затухающими при  $\text{Im } k < 0$ . Аналогично проводятся рассуждения для волн второй ветви, отображаемых кривыми в первом квадранте на рис. 4б. Таким образом, усиление в данном случае отсутствует (имеет место непропускание). Мы формально доказали то, что изначально было ясно энергетических соображений, так как среда является пассивной.

Перейдем теперь к формулировке критериев абсолютной и конвективной неустойчивости. Согласно критериям Бриггса для определения характера неустойчивости принципиальное значение имеет наличие точек ветвления функции  $k(\omega)$  в верхней полуплоскости комплексной плоскости  $\omega$ . В этих точках «комплексная групповая скорость» равна нулю:  $d\omega/dk = 0$ . Если точки ветвления в верхней полуплоскости отсутствуют, неустойчивость конвективная. Если же они существуют, то неустойчивость конвективная в том случае, когда в них сшиваются две дисперсионные ветви, имеющие одинаковое направление распространения волн, и абсолютная – если сшиваются ветви с различным направлением распространения волн.

Анализировать критерий устойчивости также удобно графически. В окрестности точки ветвления  $k(\omega)$  на плоскости  $\omega$  строим прямые  $\text{Re } \omega = \text{const}$ , одна из которых проходит через точку ветвления  $\omega_0$  (рис. 5а). Эти прямые отображаются на плоскости  $k$  в виде седловой структуры. Когда  $\omega$  находится на действительной оси, имеем пару корней, которым соответствуют концы  $a$  и  $b$  горизонтальной сепаратрисы. Стрелки показывают как перемещаются корни при движении вдоль линии  $\text{Re}(\omega) = \text{const}$  к точке ветвления. После прохождения через точку ветвления (седловую точку) оба корня отображаются сепаратрисами, уходящими вверх. Таким образом, при  $\text{Im}(\omega) \rightarrow \infty$  корни смещаются в область с одинаковым знаком  $\text{Im}(k) > 0$ , т.е. в этой точке ветвления сшиваются две ветви,

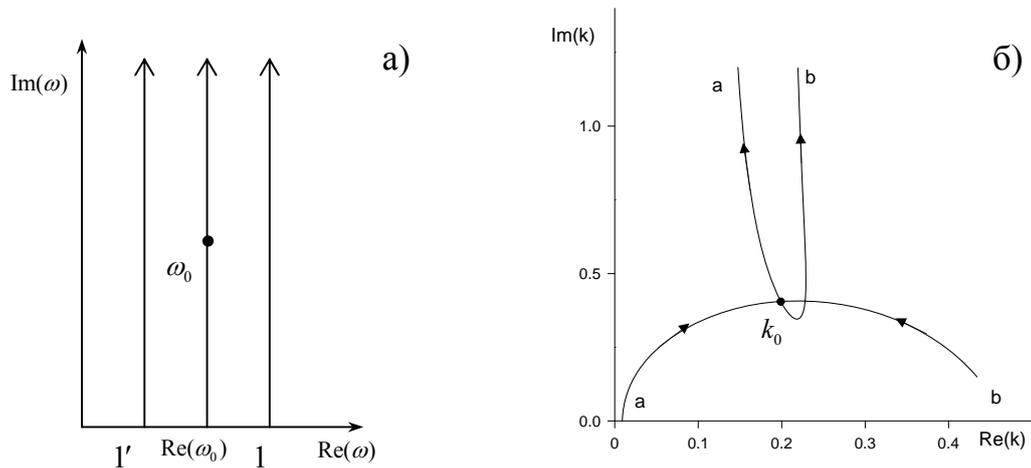


Рис. 5 Отображение прямых  $\text{Re}(\omega) = \text{const}$  на комплексную плоскость  $k$  с помощью функции  $k(\omega)$  ( $\omega_0, k_0$  – точка ветвления). Расчет сделан для двухпоточковой системы со спутными потоками. Параметры те же, что указаны в подписи к рис. 1 для потоков со скоростями одного знака. Для наглядности на рис. 5б показан только сепаратрисный контур, возникающий при отображении прямой  $\text{Re}(\omega) = \text{Re}(\omega_0)$ , проходящей через точку ветвления

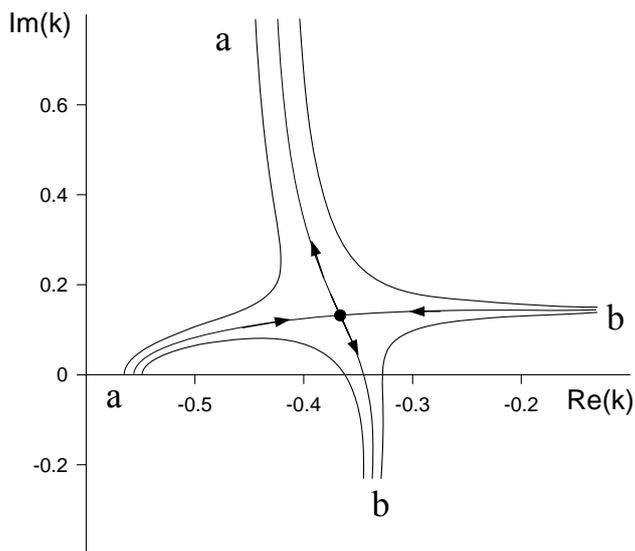


Рис. 6 Отображение прямых  $\text{Re}(\omega) = \text{const}$  на комплексную плоскость  $k$  с помощью функции  $k(\omega)$ . Расчет сделан для случая абсолютной неустойчивости в двухпоточковой системе с встречными потоками. Параметры те же, что указаны в подписи к рис. 1 для потоков со скоростями одного знака.

которые соответствуют волнам, распространяющимся в положительном направлении оси  $x$ . Поэтому в данном случае неустойчивость конвективная.

Аналогичное отображение в случае двухпоточковой системы с абсолютной неустойчивостью показано на рис. 6. Видно, что при увеличении  $\text{Im}(\omega)$  корни дисперсионного уравнения  $a$  и  $b$ , находящиеся сначала на концах горизонтальной сепаратрисы, после прохождения через седловую точку смещаются соответственно в области с  $\text{Im} k < 0$  и  $\text{Im} k > 0$  комплексной плоскости  $k$ , т. е. имеют различные знаки  $\text{Im}(k)$  при  $\text{Im} \omega \rightarrow \infty$ . Поэтому неустойчивость в этом случае абсолютная.

### 3.1 ЭНЕРГИЯ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В СЛАБОДИССИПАТИВНЫХ СРЕДАХ

#### Плотность энергии электромагнитных волн в LC-линии без дисперсии.

LC-линия это наиболее простая модель распределенной системы. Воспользуемся ею, чтобы показать основные идеи вывода выражения для плотности энергии. Энергия волны по определению равна работе, совершаемой внешним источником при возбуждении этой волны. Предположим, что источник действует ограниченное время, возбуждая данную волну. Рассмотрим LC-линию с внешним источником тока, включенным в вертикальное плечо (рис. 4.1). Законы Кирхгофа для распределенной LC-линии с учетом этого принимают вид тока:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} - J_{ext.}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (1)$$

Уравнения (1) легко сводятся к одному

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{C} \frac{\partial}{\partial t} J_{ext.}(x, t) \quad \left( V = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \quad (2)$$

Зададим сначала источник тока в виде бегущей волны с постоянной амплитудой:  $J_{ext.} = J_0 e^{ik_0 x - i\omega_0 t} + \text{к.с.}$  и  $J_0 = \text{const}$ . Нетрудно видеть, что если частота  $\omega_0$  и волновое число  $k_0$  связаны дисперсионным уравнением  $D(\omega_0, k_0) \equiv V^2 k_0^2 - \omega_0^2 = 0$ , возникает резонансное возбуждение волны внешним источником. Действительно, если искать стационарное решение в виде бегущей волны  $u = \hat{u} \exp(ik_0 x - i\omega_0 t) + \text{к.с.}$ , в отсутствие потерь получим амплитуду возбужденной стационарной (установившейся) волны в виде

$$\hat{u} = \frac{i\omega_0 \hat{J}_{ext.}}{C \cdot (V^2 k_0^2 - \omega_0^2)}. \quad (3)$$

В знаменателе (3) стоит дисперсионная функция  $D$ . Поэтому, если  $\omega_0$  и  $k_0$  связаны дисперсионным соотношением, волна имеет бесконечно большую амплитуду ( $\hat{u} = \infty$ ). В общем случае условия резонансного возбуждения собственных волн среды можно записать в виде

$$D(\omega_0, k_0) = 0. \quad (4)$$

Если искать нестационарное решение уравнения (2), нетрудно получить частное решение вида (с нулевыми начальными условиями для самой функции, но не ее производной)

$$u = -\frac{1}{2i\omega_0} t J_0 e^{ik_0 x - i\omega_0 t} + \text{к.с.} \quad (5)$$

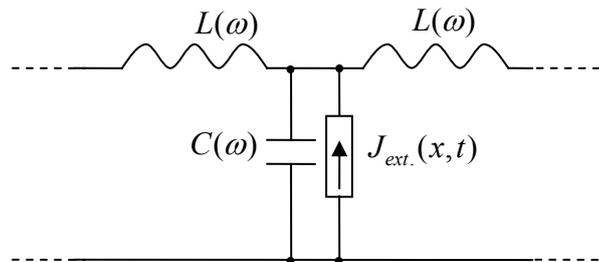


Рис. 1 Схема распределенной LC-линии с внешним источником тока. Для линии без дисперсии  $L(\omega) = \text{const}$  и  $C(\omega) = \text{const}$

Решение (5) показывает, что при резонансе возникает секулярный рост решения во времени, т. е. происходит раскачка собственной волны. В отличие от сосредоточенной системы резонанс имеет пространственно-временной характер в том смысле, что возбуждаемая волна имеет волновое число и частоту внешнего воздействия

$$k = k_0, \quad \omega = \omega_0(k_0). \quad (6)$$

Условия резонанса, записанные в виде (6) часто называют черенковскими. Отметим, что простого совпадения фазовых скоростей возбуждаемой волны и внешнего воздействия не достаточно для черенковского резонанса.

**Вывод уравнения для амплитуды возбуждаемой волны асимптотическим методом.**

Будем считать источник слабым, записывая малый параметр  $\varepsilon$  перед его амплитудой (физически это означает, что сторонний ток мал по сравнению с током через емкость – см. рис. 1). Кроме того, чтобы описать локализацию действия источника во времени, предположим, что амплитуда  $J_0$  – медленно меняющаяся функция координаты и времени:

$$J_{ext} = \varepsilon \hat{J}_0\left(\frac{\varepsilon t}{\tau}, \frac{\varepsilon x}{\chi}\right) e^{ik_0 x - i\omega_0 t} + \text{к.с.} \quad (7)$$

где  $\tau = \varepsilon t$ ,  $\mu = \varepsilon x$  – «медленные» координата и время (название происходит от того, что при изменении  $\tau, \chi$  на единицу, исходные «быстрые» переменные  $x, t$  изменяются на величину  $1/\varepsilon \gg 1$ ). В данном виде задача может быть решена в рамках асимптотического метода, родственного известным методам усреднения.

С этого момента мы начинаем знакомство с асимптотическими методами, используемыми для построения эволюционных уравнений в теории линейных и нелинейных волн. Простота постановки задачи позволяет легко понять основные идеи метода. Решение (2) ищем в виде асимптотического ряда по параметру  $\varepsilon$ :

$$u = a(\tau, \chi) e^{ik_0 x - i\omega_0 t} + \text{к.с.} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots \quad (8)$$

Уравнение для комплексной амплитуды  $a$  строится в виде

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = F^{(1)}(\tau, \chi) + \varepsilon F^{(2)}(\tau, \chi) + \dots \quad (9)$$

где  $F^{(j)}$  – неизвестные функционалы, подлежащие определению. Чем больше функционалов найдено, тем выше точность уравнения (9). Подставим (8), (9) в (2) и приравняем члены при разных степенях  $\varepsilon$  нулю. Производные по времени и координате находятся по формуле дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \chi} \quad (10)$$

Производные  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial x$  в правых частях выражений (10) обозначают дифференцирование только «быстрых» зависимостей от координаты и времени. Правило (10) позволяет разделить порядки величин, возникающих при дифференцировании медленно меняющейся амплитуды и быстро осциллирующих экспонент. Собирая члены при  $\varepsilon^0$ , получим

$$D(\omega_0, k_0) a = 0 \quad (11)$$

Это тождество, поскольку по определению  $\omega_0, k_0$  связаны дисперсионным уравнением. В порядке  $\varepsilon$  получим следующее уравнение для добавки  $u^{(1)}$ :

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = \hat{Q}(\tau, \chi) e^{ik_0 x - i\omega_0 t} + \text{к.с.}, \quad (12)$$

$$\hat{Q} = \left( 2i\omega_0 F^{(1)} + 2ik_0 \frac{\partial a}{\partial \chi} \right) + \frac{i\omega_0}{C} \hat{J}_0(\tau, \chi).$$

В левой части (12) стоят производные по быстрым координате и времени, а амплитудный фактор  $\hat{Q}$  в правой части зависит только от медленных переменных, которые при дифференцировании по быстрым переменным считаются постоянными. Поэтому задача формально не отличается от рассмотренной выше линейной задачи о возбуждении волны источником с постоянной амплитудой (см. (2), (3), (5)). Если искать добавку в виде  $u^{(j)} = \hat{u}^{(j)}(\tau, \chi)e^{ik_0x - i\omega_0t} + k.c.$ , получим для комплексной амплитуды добавки  $\hat{u}^{(j)}$  алгебраическое уравнение

$$D(\omega_0, k_0)\hat{u}^{(1)} = \hat{Q}(\tau, \chi). \quad (13)$$

Далее следует ключевой момент асимптотической процедуры. Если предположить, что первая добавка существует, т.е.  $|\hat{u}^{(1)}| < \infty$ , то левая часть этого равенства обращается в ноль, что дает уравнение вида  $\hat{Q}(\tau, \chi) = 0$ , из которого находится функционал  $F^{(1)}$ . Аналогично из условия существования  $|\hat{u}^{(2)}| < \infty$  получается уравнение для  $F^{(2)}$  и т. д., то есть в рамках данного метода можно последовательно увеличивать точность уравнения для амплитуды (9).

Если искать нестационарное решение уравнения (12), получим секулярно растущее во времени решение, аналогичное (5). Тогда на временах  $t \sim 1/\varepsilon$  добавка становится сравнимой с главной частью решения и разложение (8) теряет силу. При этом секулярный рост второй добавки не устраняется, но он происходит на временах  $t \sim 1/\varepsilon^2$ . Таким образом, полученное после подстановки  $F^{(1)}$  в (9) уравнение первого приближения применимо, вообще говоря, на временах  $t \sim 1/\varepsilon$ . Оба указанных способа определения неизвестных функционалов равнозначны и приводят к одинаковым результатам.

Итак, условие существования разложения (8) в первом порядке точности дает выражение для  $F^{(1)}$ , подставляя которое в (9) получим эволюционное уравнение первого приближения

$$2C \frac{\partial a}{\partial \tau} + \frac{2Ck_0V^2}{\omega_0} \frac{\partial a}{\partial \chi} = -\frac{1}{2C} \hat{J}_0(\tau, \chi). \quad (14)$$

Или после преобразования коэффициентов и возврата к единому времени

$$\frac{\partial a}{\partial t} + V_g \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{\varepsilon}{2C} \hat{J}_0(\varepsilon t, \varepsilon x) \quad (15)$$

где  $V_g = \pm V$  – групповая скорость волны. Это уравнение описывает возбуждение модулированной волны, у которой модуляция распространяется с групповой скоростью (поскольку дисперсия отсутствует, в данном случае групповая скорость равна фазовой). Смысл асимптотической процедуры в том, чтобы исключить рост добавок за счет соответствующего выбора уравнения для произвольного параметра в главной части решения – амплитуды  $a$ .

**Выражение для плотности энергии волны.** Средняя (по периоду) мощность  $P$ , которая передается волне от внешнего источника равна работе в единицу времени, совершаемой электрическим полем по перемещению сторонних зарядов, взятой со знаком минус

$$P = -\overline{J_{\text{ext}} u(x, t)} = -\varepsilon(a^* \hat{J}_0 + a \hat{J}_0^*). \quad (16)$$

(чтобы лучше понять эту формулу, напомним, что ток равен  $enV$ , где  $e$  – заряд одной частицы,  $n$  – плотность частиц,  $V$  – скорость зарядов). Необходимо из (15) получить уравнение, в правой части которого будет стоять (16). Для этого правую и левую части (15) следует умножить на  $a^*$  и сложить полученный результат с комплексно сопряженным. С учетом тождества

$$a^* \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial a^*}{\partial t} = \frac{\partial |a|^2}{\partial t}$$

получим уравнение вида

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = P, \quad \text{где } W = 2C|a|^2, \quad \Pi = 2CV_g|a|^2 = V_g W. \quad (17)$$

В соответствии с данным выше определением  $W$  является плотностью энергии квазимонохроматической волны,  $\Pi$  – плотность потока энергии. Уравнение баланса (17) показывает, что энергия не возникает из ничего и ее изменение в фиксированной точке определяется мощностью, поступающей от внешнего источника, и ее переносом вдоль оси  $x$  с групповой скоростью.

### Волновая энергия в диспергирующей среде.

**Спектрально-операторный формализм.** Попробуем обобщить полученную схему на случай линии с произвольной частотной зависимостью элементов (т.е. для диспергирующей среды). Ясно, что основные идеи остаются прежними. Однако когда импеданс и проводимость собраны из большого набора элементов  $L$  и  $C$ , придется записать много линейных дифференциальных уравнений, описывающих связи токов и напряжений на этих элементах. Нельзя ли сохранить удобные понятия частотно зависимого импеданса и проводимости при определении энергии? Оказывается можно и это достигается с помощью спектрально-операторного формализма.

Чтобы пояснить суть дела, рассмотрим связь двух переменных через дифференциальные операторы (которая возникает, например, между током и напряжением на сложном элементе):

$$L_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = L_2\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)v(x,t) \quad (18)$$

где  $L_j$  – полиномиальные функции своих аргументов. Для линейных преобразований введем операторы, заменяющие производные

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\hat{\omega}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = i\hat{k} \quad (19)$$

Фактически это не более чем новое обозначение производных. Определение операторов (19) построено так, что результат их действия на функцию в виде одной пространственно–временной гармоники получался простым снятием «шапочек» над  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{k}$ :

$$(-i\hat{\omega}, i\hat{k})e^{ikx-i\omega t} = (-i\omega, ik)e^{ikx-i\omega t} \quad (20)$$

Если поле представляется в виде суммы (или интеграла) по гармоникам, получаем правило, согласно которому при линейных преобразованиях с операторами  $\hat{\omega}$  и  $\hat{k}$  можно обращаться как с числами. Следуя этому правилу и разрешая связь (18), получим<sup>1</sup>

$$v(x,t) = \frac{L_1(-i\hat{\omega}, i\hat{k})}{L_2(-i\hat{\omega}, i\hat{k})}u(x,t) \equiv L(\hat{\omega}, \hat{k})u(x,t) \quad (21)$$

Особый интерес в связи с методами усреднения представляет действие введенного оператора на квазимонохроматическое поле. Как будет действовать дифференциальный оператор  $L(\hat{\omega}, \hat{k})$  на монохроматическое поле с медленно меняющейся амплитудой

<sup>1</sup> Общий алгоритм действия  $L(\hat{\omega}, \hat{k})$  можно определить так: в (21) следует сначала совершить прямое преобразование Фурье, которое сведется к снятию шапочек над  $\hat{\omega}$  и  $\hat{k}$  и замене  $u(x,t)$  и  $v(x,t)$  их фурье-образами, а затем сделать обратное преобразование Фурье по обычным правилам для «произведения изображений», чтобы вернуться к пространственно-временному представлению.

$$L(\hat{\omega}, \hat{k}) \left[ a(\underbrace{\mu t}_{\tau}, \underbrace{\mu x}_{\chi}) e^{ik_0 x - i\omega_0 t} \right] = ? \quad (22)$$

где  $\mu$  – малый параметр. Здесь снова понадобилось введение медленных координаты  $\chi$  и времени  $\tau$ , чтобы показать, что амплитуда гармоники – медленно меняющаяся функции. На спектральном языке это узкие пакеты гармоник.

Рассмотрим формальное разложение в ряд Тейлора для оператора  $L$  в окрестности точки  $\omega_0, k_0$ :

$$\begin{aligned} & L(\omega_0 + \underbrace{\hat{\omega} - \omega_0}, k_0 + \underbrace{\hat{k} - k_0}) = \\ & = L(\omega_0, k_0) + \frac{\partial L}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} (\hat{\omega} - \omega_0) + \frac{\partial L}{\partial k} \Big|_{k_0} (\hat{k} - k_0) + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Нетрудно понять, как действуют отдельные слагаемые ряда при подстановке (23) в (22). Прямое вычисление с использованием определения (19) дает

$$(\hat{\omega} - \omega_0)(a e^{i\mathcal{G}}) = \left( i\mu \frac{\partial}{\partial \tau} a \right) e^{i\mathcal{G}}, \quad (24)$$

где для краткости введено обозначение  $\mathcal{G} = k_0 x - \omega_0 t$ . Видно, что однократное действие разности  $(\hat{\omega} - \omega_0)$  сводится к умножению на  $i$  и дифференцированию комплексной амплитуды  $a$ , стоящей при осциллирующей экспоненте, и никак не влияет на эту быстро осциллирующую экспоненту. Тогда после  $n$ -кратного применения данной операции получим

$$(\hat{\omega} - \omega_0)^n (a e^{i\mathcal{G}}) = \left[ \left( i\mu \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^n a \right] e^{i\mathcal{G}} \quad (25)$$

Совершенно аналогично можно поступить с оператором  $(\hat{k} - k_0)$ . Это позволяет свернуть в обратном направлении ряд Тейлора, который возникает после подстановки (23) в (22). Результат такого сворачивания можно представить в виде

$$L(\hat{\omega}, \hat{k}) \left[ a(\tau, \chi) e^{ik_0 x - i\omega_0 t} \right] = \left[ L \left( \omega_0 + i\mu \frac{\partial}{\partial \tau}, k_0 - i\mu \frac{\partial}{\partial \chi} \right) a(\tau, \chi) \right] e^{ik_0 x - i\omega_0 t}, \quad (26)$$

где запись правой части подразумевает формальное разложение в ряд Тейлора по величинам, входящим с малым параметром. В силу линейности задачи формула (26) обобщается для поля в виде суперпозиции экспонент с медленно меняющимися амплитудами

$$L(\hat{\omega}, \hat{k}) \left[ \sum_n a_n(\tau, \chi) e^{ik_n x - i\omega_n t} \right] = \sum_n \left[ L \left( \omega_n + i\mu \frac{\partial}{\partial \tau}, k_n - i\mu \frac{\partial}{\partial \chi} \right) a_n(\tau, \chi) \right] e^{ik_n x - i\omega_n t} \quad (27)$$

### Замечания.

1. В чем физический смысл проведенных преобразований? Известно, что спектр осциллирующего поля с медленно меняющейся амплитудой локализован в узкой области вблизи несущей частоты и волнового числа. В частности, при пространственной модуляции для характерной ширины спектра получим

$$|k - k_0|_{\text{хар.}} \sim \left| a^{-1} \partial a / \partial x \right| \sim \mu k_0$$

(эту оценку легко получить с помощью преобразования Фурье, например, для  $a(\tau, \chi)$  в виде гауссовского импульса). Таким образом, в (23) фактически производится разложение по малой ширине узкого спектрального пакета. Формулы можно вывести, используя преобразование Фурье. Однако в данном виде доказательство является более общим, так как в него не входит явно само

преобразование Фурье и поэтому не требуется налагать условие абсолютной интегрируемости.

2. Не следует преувеличивать значимость формул (26), (27). В принципе можно было бы обойтись и без них, преобразуя исходные уравнения в частных производных. Полезность этих формул в том, что они для целого класса нелинейных уравнений, которые характеризуются сложной структурой линейной части, открывают путь для быстрого построения укороченных уравнений и приведения их к компактному и физически наглядному виду.

**Плотность энергии электромагнитных волн в LC-линии с дисперсией.** Покажем теперь как можно использовать введенный формализм для описания возбуждения волн в распределенной диспергирующей LC-линии. Дисперсию будем характеризовать частотно зависимыми емкостью и индуктивностью (рис. 1). Используя операторный формализм, легко перейти от уравнений LC-линии, которые мы записывались ранее в спектральном представлении, к уравнениям в частных производных. Для этого над  $\omega$  следует поставить шапочку и перейти от производной по  $x$  к оператору  $\hat{k}$ . Получим вместо системы (1) уравнения вида

$$\begin{aligned} i\hat{k}I(x,t) &= i\hat{\omega}C(\hat{\omega})u(x,t) - J_{ext}(x,t), \\ i\hat{k}u(x,t) &= i\hat{\omega}L(\hat{\omega})I(x,t). \end{aligned} \quad (28)$$

Система (28) фактически эквивалентна исходной системы уравнений в частных производных. Вместо того, чтобы описывать линейные элементы дифференциальными уравнениями, мы воспользовались их спектральным представлением. Обращаясь с операторами как с числами, получим из (28) одно уравнение

$$i\hat{\omega}D(\hat{\omega}, \hat{k})u = J_{ext}(x,t), \quad (29)$$

где  $D(\hat{\omega}, \hat{k}) = \left( \frac{\hat{\omega}^2 L(\hat{\omega}) C(\hat{\omega}) - \hat{k}^2}{\hat{\omega}^2 L(\hat{\omega})} \right)$ . Почему именно с такой функцией  $D$  удобно записать

(29) будет ясно из дальнейшего. Одно преимущество видно сразу: оператор в левой части не содержит в явном виде элементов LC-линии.

Сторонний ток снова будем считать слабым и снова представим в виде волны с медленно меняющейся амплитудой (7). Процедура вывода полностью повторяет последовательность действий для LC-линии без дисперсии. Отличие состоит в том, что при дифференцировании по времени мы должны применить формулу (26) (с разложением правой части по степеням малого параметра). В первом порядке по  $\varepsilon$  получим

$$i\omega D(\omega_0, k_0) \hat{u}^{(1)} = \left( \omega \frac{\partial D}{\partial \omega} \Big|_0 F^{(1)} - \omega \frac{\partial D}{\partial k} \Big|_0 \frac{\partial a}{\partial \chi} \right) + \hat{J}_0(\tau, \chi) \quad (30)$$

Подставляя найденный функционал  $F^{(1)}$  в (9), получим уравнение первого приближения для комплексной амплитуды огибающей возбужденной волны

$$(\omega D'_\omega)_0 \left( \frac{\partial a}{\partial t} + V_g \frac{\partial a}{\partial x} \right) = -\varepsilon \hat{J}_0(\tau, \chi) \quad (31)$$

где  $V_g = -(D'_k / D'_\omega)_0$  – групповая скорость (см. первую лекцию). Это обобщение уравнения (14) на случай диспергирующей среды. Производя с (31) те же преобразования, которые делались ранее для LC-линии с постоянными параметрами, получим обобщение энергетического баланса (17) для среды с дисперсией

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = P, \quad \text{где } W = (\omega D'_\omega)_0 |a|^2, \quad \Pi = V_g W, \quad (32)$$

Производя вычисления, для линии передачи с частотно зависимыми элементами, получим

$$W = \left( \frac{\partial \omega C}{\partial \omega} + \frac{C}{L} \frac{\partial \omega L}{\partial \omega} \right)_0 |a|^2, \quad \Pi = \pm \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} |a|^2 \quad (33)$$

Здесь мы использовали явное выражение для ветвей  $k = k(\omega)$ , которое следует из дисперсионного уравнения, полученного в предыдущих лекциях. Воспользуемся для определения связи между амплитудами тока и напряжения в главном порядке разложения второй формулой (28). Это дает

$$\hat{I} = \frac{\omega C}{k} \hat{u} \rightarrow \pm \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \hat{u} = \pm \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} a \quad (34)$$

где знаки  $\pm$  соответствуют волнам, распространяющимся (в смысле фазовой скорости) вдоль и против оси  $x$ . Обратим внимание на то, что во встречной волне ток и напряжение в противофазе. Это позволяет переписать (33) в виде

$$W = \frac{1}{2} \frac{d\omega C}{d\omega} \overline{u_-^2} + \frac{1}{2} \frac{d\omega L}{d\omega} \overline{I_-^2}, \quad \Pi = \overline{I_- u_-}. \quad (35)$$

где  $u_-$ ,  $I_-$  – полные осциллирующие напряжение и ток, определенные главными частями разложений (8) для напряжения и аналогичного разложения для тока, черта сверху означает усреднение по пространственной координате. Запись (35) удобна тем, что не зависит от того амплитуда какой переменной стоит в искомом решении (т.е. от принятых нормировок для амплитуды).

В предыдущей лекции говорилось о полной аналогии волн в линии и плоских электромагнитных волн в изотропной среде с временной дисперсией. Эта аналогия проявляется и в сходстве выражений для энергии. Изложенный метод очевидным образом можно перенести на плоские электромагнитные волны в средах с временной дисперсией. Это приводит к такому же выражению для энергии электромагнитных волн, которое получено в курсе теоретической физики Ландау и Лифшица:

$$W = \frac{1}{8\pi} \frac{d\omega \varepsilon}{d\omega} \overline{E_-^2} + \frac{1}{8\pi} \frac{d\omega \mu}{d\omega} \overline{H_-^2}. \quad (36)$$

Различие числовых коэффициентов в формулах (35), (36) связано с выбором системы единиц.

Приведем без вывода выражение для плотности энергии продольных волн (волн пространственного заряда) в многокомпонентной плазме. Процедура получения полностью аналогична приведенной выше для линии передачи. Более того, оказывается, что, несмотря на зависимость продольной диэлектрической проницаемости от волнового числа, выражение для энергии продольных волн следует из выражения (36) для поперечных волн, в котором следует положить магнитное поле равным нулю:

$$W = \frac{1}{8\pi} \omega \frac{\partial \varepsilon_{||}(\omega, k)}{\partial \omega} \overline{E_-^2} = \frac{1}{4\pi} \omega \frac{\partial \varepsilon_{||}(\omega, k)}{\partial \omega} |a|^2 \quad (37)$$

где  $a$  – комплексная амплитуда электрического поля.

**Об универсальном характере формулы для волновой энергии.** Выражение (32) для плотности энергии  $W$  может рассматриваться как универсальное при условии «подходящего» определения функции  $D(\omega, k)$ . В частности, для линии передачи эта функция была определена в виде

$$D = \frac{\omega^2 LC - k^2}{L\omega^2} \quad (38)$$

Здесь индекс «0» означает, что выражение берется для волны на дисперсионной кривой, т.е. при  $k = k_0$ ,  $\omega_0 = \omega(k_0)$ . Формула для  $W$  верна только для указанного  $D$ . Допустим, что мы изначально определили дисперсионную функцию  $D$  иначе, «не зная» о формуле (32) для  $W$  (например, в (29) вместо (38) записано  $\bar{D}(\omega, k) = \omega^2 LC - k^2$ , т.е.  $D = \bar{D}/(L\omega^2)$ ).

В общем случае допустим, что введена дисперсионная функция  $\bar{D}(\omega, k)$ , которая отличается от «подходящей»  $D$  коэффициентом  $f$ :  $D = f(\omega, k)\bar{D}(\omega, k)$ . Тогда изменится и выражение для энергии (32) – с учетом того, что по-прежнему  $\bar{D}(\omega_0, k_0) = 0$  в нем появится дополнительный множитель:  $W = (\omega f \bar{D}'_\omega)_0$ . Однако, что после замены  $\bar{D} = D(\omega, k) / f(\omega, k)$ , этот множитель исчезает и мы приходим к представлению (32). Таким образом, запись энергии в форме (32) всегда возможна.

Отметим, что в «подходящее» определение дисперсионной функции обычно можно вложить физический смысл. Согласно (29), имеем для гармонических полей  $i\omega D = \hat{J}_{ext} / \hat{u}$ . Поскольку ток  $\hat{J}_{ext}$ , взятый со знаком минус, можно рассматривать как выходной ток нагрузки LC-линии, то величина в левой части этого равенства может рассматриваться как выходная проводимость LC-линии для данной нагрузки. Тогда  $D(\omega, k)$  совпадает с эффективной (частотно-зависимой) «выходной емкостью» LC-линии.

### Влияние малой диссипации.

До сих пор мы полностью пренебрегали потерями, считая среду консервативной. Однако реальные среды всегда диссипативны, та как в соответствии с вторым началом термодинамики они стремятся к состоянию термодинамического равновесия, сводя на нет всякое отклонения от него, к которым относится и волновое возмущение. В случае гармонических полей потери описываются комплексными параметрами. Например, в LC – линии это мнимые части частотно зависимой емкости и индуктивности. Для плоских электромагнитных волн это мнимые части диэлектрической и магнитной проницаемостей. LC – линии полагаем  $L = L_r + i\varepsilon L_i$ ,  $C = C_r + i\varepsilon C_i$ . Если подставить эти выражения в уравнения (28), получим уравнения с дополнительными малыми членами. Соответственно дисперсионное уравнение становится комплексным  $D = D_r + i\varepsilon D_i$ . Применение асимптотического метода в этом случае показывает, что частота и волновое число должны быть связаны через дисперсионное уравнение  $D_r(\omega, k) = 0$ . Применение асимптотического метода приводит вместо (31) к следующему уравнению для огибающей

$$(\omega D'_{r\omega})_0 \left( \frac{\partial a}{\partial t} + V_g \frac{\partial a}{\partial x} + \gamma a \right) = -\varepsilon \hat{J}_0(\tau, \chi) \quad (39)$$

где  $\gamma = -\text{Im } \omega(k) > 0$  – декремент линейного затухания, связанного с потерями (очевидно, что  $\gamma = O(\varepsilon)$ ). Нетрудно показать, что в результате применения описанной выше процедуры в уравнении энергетического баланса (32) появятся новые члены диссипации энергии, т.е. следует заменить

$$P \rightarrow P_{нов.} = -\gamma (\omega D'_{r\omega})_0 |a|^2 + P = -(K_1 \cdot C_i + K_2 \cdot L_i) |a|^2 + P, \quad (40)$$

где  $K_{1,2}$  – коэффициенты, являющиеся комбинациями параметров задачи (при  $W > 0$  они положительны:  $K_{1,2} > 0$ ). Соответственно, при  $L_i, C_i > 0$  (или  $\varepsilon_i, \mu_i > 0$  в случае плоских электромагнитных волн) получим поглощение энергии (диссипацию). Согласно этой процедуре, в выражении для энергии (33) следует заменить также L и C их вещественными частями. В случае плоских электромагнитных волн делается замена:  $\varepsilon \rightarrow \text{Re } \varepsilon(\omega)$ ,  $\mu \rightarrow \text{Re } \mu(\omega)$ .

### Лагранжев формализм как адекватное описание волн в консервативных средах

Для того, чтобы доказать какие-либо общие свойства волн в консервативных средах, надо иметь общее описание консервативной среды, которое учитывало бы основные ее свойства – наличие законов сохранения энергии и импульса. Как и в классической

механике таковыми являются Лагранжев и Гамильтонов формализмы, точнее их обобщение на случай непрерывных сред.

Ограничимся одним из простых вариантов Лагранжева формализма. Введем функцию Лагранжа  $L(u_t, u_x, u)$ , которая является обобщением функции Лагранжа в классической механике на распределенную систему, где  $u(x, t)$ -вектор обобщенных координат в функциональном пространстве, который, вообще говоря, может не совпадать с физическими переменными (физическими полями). Допустим, что уравнения движения среды получаются из принципа наименьшего действия Гамильтона:

$$\delta I = \delta \left( \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} L dx dt \right) = 0. \quad (41)$$

где символом  $\delta$  обозначена вариация функции или выражения. Вычислим эту вариацию и преобразуем члены с производными  $u_t$  и  $u_x$  с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} \delta L(u_t, u_x, u) dx dt = \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u_t + \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial L}{\partial u} \delta u \right) dx dt = \\ &= \int_{t_0}^t \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial L}{\partial u} \right]}_{\delta L / \delta u} \delta u dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial L}{\partial u_t} \delta u \right) \Big|_{t=t_0}^t dx + \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} dt = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Отметим на будущее, что коэффициент при  $\delta u$  под интегралом называется вариационной производной и обозначается как  $\delta L / \delta u$  (это не определение, а способ вычисления вариационной производной). При вариации с закрепленными значениями  $u(x, t)$  на границах области интегрирования два последних члена обращаются в ноль. Поскольку сама вариация  $\delta u$  произвольна, из (41) следует уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial u_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad (43)$$

Возможность запись уравнений среды в форме (43) эквивалентна вариационному принципу. Можно показать (см. книгу У. Лича в списке литературы), что уравнения среды, записанные в виде (43), имеют законы сохранения, которые можно интерпретировать как законы сохранения энергии и импульса. В частности, закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad W = u_t \frac{\partial L}{\partial u_t} - L, \quad \Pi = u_t \frac{\partial L}{\partial u_x} \quad (44)$$

Благодаря этому свойству лагранжева формулировка уравнений среды отражает специфику широкого класса консервативных сред<sup>2</sup>. Подчеркнем, что лагранжевы переменные не всегда совпадают с физическими переменными, и найти связь между ними зачастую не просто. Но это отдельная проблема. Более важно то, что лагранжева запись уравнений (43) (даже без отношения к конкретной среде), позволяет выводить общие закономерности как для линейных, так и для нелинейных волн в консервативных средах.

В качестве примера приведем функцию Лагранжа для LC-линии с нелинейной емкостью (к определению нелинейной емкости мы еще вернемся, сейчас обратим внимание только на формальную сторону вопроса) и запишем уравнение, которое она порождает

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} v_t^2 - \frac{1}{2} c_0^2 v_x^2}_{L_0} + \frac{1}{3} \beta v_t^3, \quad v_{tt} - c_0^2 v_{xx} + \beta (v_t^2)_t = 0 \quad (45)$$

<sup>2</sup> Данная формулировка может быть обобщена на случай, когда функция Лагранжа есть функционал поля, а также для случая направляемых (имеющих поперечную структуру) волн

Через  $L_0$  обозначен лагранжиан линейной задачи. Обобщенная координата Лагранжа  $v$  не совпадает с напряжением на емкости  $u$  и связана с ним формулой  $v = \int u dt$ .

Фундаментальное значение имеет усредненный (по пространственно-временным осцилляциям) лагранжиан. Для квазимонохроматических волн  $v = a \exp(ikx - i\omega t) + k.c.$  на указанном примере нетрудно убедиться, что обращение в ноль усредненного лагранжиана линейной задачи дает дисперсионное уравнение:

$$\bar{L}_0(\omega, k, a) = (k^2 V^2 - \omega^2) |a|^2 \equiv D(\omega, k) |a|^2 = 0 \quad (46)$$

Средняя энергия выражается через этот усредненный лагранжиан формулой

$$W = \omega \frac{\partial \bar{L}_0}{\partial \omega} = \omega D'_\omega |a|^2 \quad (47)$$

Выражение (47) можно вывести в общем виде. Оно говорит о том, что формулу для энергии (32) действительно можно считать универсальной для консервативных сред и это заложено в самой природе консервативных сред, для которых существуют законы сохранения.

Вывод законов сохранения для энергии и импульса далеко не единственное достоинство лагранжева подхода. Существует так называемый усредненный вариационный принцип Дж. Уизема (Withem), согласно которому укороченные уравнения тоже можно записать через усредненный лагранжиан, используя вариационный принцип для усредненного действия. Важно, что это относится как к линейным, так и к нелинейным средам. Данный метод обобщается для волн существенно несинусоидальной формы, например, для солитонов. Отметим, что для непрерывных сред существует также гамильтоновский формализм.

### О границах применимости понятия волновой энергии.

1) Понятие энергии волны можно ввести только для слабодиссипативной среды, в которой эффекты диссипации могут быть учтены как малое возмущение. Масштаб частоты, по отношению к которому затухание должно быть мало, в общем случае есть масштаб дисперсии, а не несущая частота волны (несущая частота может нулевой, например, как в случае для медленных волн электронного пучка). Масштабом дисперсии может служить величина  $\Delta\omega = D'_\omega / D''_{\omega\omega}$ , имеющая размерность частоты. Она возникает естественным образом при разложении  $D(\omega, k)$  в ряд Тейлора. В случае слабодиссипативной среды

$$\Delta\omega = (D'_\omega / D''_{\omega\omega})_{\text{хар.зн.}} \ll \text{Im } \omega(k),$$

где  $\text{Im } \omega(k)$  – мнимая часть частоты, обусловленная потерями. Это условие может совпадать с традиционным  $\text{Im } \omega \ll \text{Re } \omega$ , а может оказаться значительно сильнее или слабее (при  $\text{Re } \omega \approx 0$ ) последнего. Консервативная среда, в которой энергия сохраняется, является идеализацией слабодиссипативной среды.

2) Обратим внимание на то, что волновая энергия получена нами фактически на основе решения линейной задачи о возбуждении волн. Поэтому ее часто называют «квазиэнергией», чтобы тем самым отличить от энергии, определяемой в рамках нелинейных уравнений. Следует различать волновую энергию и полную энергию, которая включает кинетическую, внутреннюю и др. виды энергии и определена при любой диссипации. Можно показать, что волновой энергии соответствует «отдельный» закон сохранения, вытекающий из линеаризованных уравнений задачи.

3) Почему для волн часто используют понятие «квазиэнергии»? Причина в том, что именно этой энергией волна обменивается с внешними источниками при ее возбуждении, а также передает другим волнам в процессе линейного и нелинейного взаимодействия с ними.

### 3.2 ВОЛНЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим плоские продольные волны в электронном потоке и вычислим плотность их энергии. Используя формулу, полученную в предыдущих лекциях, имеем

$$W = \frac{1}{8\pi} \omega \frac{\partial \varepsilon_{xx}(\omega, k)}{\partial \omega} \overline{E^2} = \frac{1}{4\pi} \omega \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \omega} |a|^2, \quad \varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0. \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{xx}$  – продольная диэлектрическая проницаемость пучка. Вычисления для двух дисперсионных ветвей дают

$$\omega_{1,2} = kV_0 \pm \omega_b, \quad \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \omega} = \frac{2\omega_b^2}{(\omega - kV_0)^3} = \pm \frac{2}{\omega_b}, \quad W_{1,2} = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{\omega_b} |a|^2. \quad (2)$$

На рис. 1 показаны дисперсионные ветви электронного потока и знак волновой энергии на каждой них. Отрицательную энергию имеют медленные волны пространственного заряда, положительную – быстрые. На этом же рисунке показаны дисперсионные ветви и знаки энергии волн в системе пучок-плазма. Видно, что смена знака энергии происходит в точках перехода частоты через ноль либо при смене знака производной  $\partial \varepsilon_{xx} / \partial \omega$ .

Если среда равновесна (в термодинамическом смысле), то энергия волн может быть только положительной. Это следует из термодинамических принципов. Возбужденная в среде волна в равновесной среде является единственной причиной отклонения от состояния термодинамического равновесия, а в соответствии с фундаментальным законом возрастания энтропии система всегда стремится перейти к состоянию термодинамического равновесия. Следовательно, волновое поле должно затухнуть (диссипация энергии волны). Энергия волнового возмущения переходит в тепло – энергию хаотического движения атомов и молекул, которая возрастает при затухании волны. Отсюда следует, что энергия начального волнового возмущения положительна.

Ситуация радикально изменяется для изначально неравновесной среды, для которой волна не является единственной причиной отклонения от термодинамического равновесия (например при наличии потоков есть еще кинетическая энергия потоков). В этой ситуации положительной должна быть общая энергия отклонения от равновесного состояния (энергия потока с волной), что не противоречит существованию волн с отрицательной

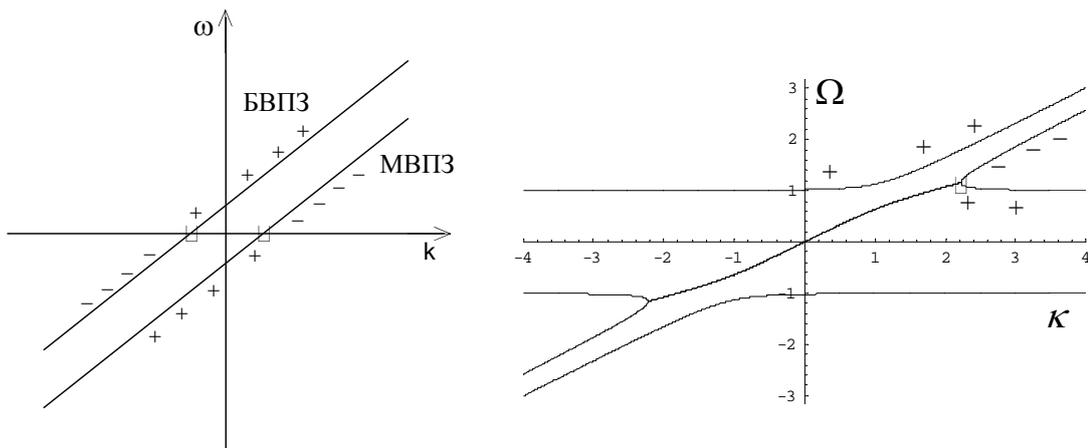


Рис. 1 Дисперсионные ветви моноскоростного электронного пучка и системы пучок-плазма ( $\alpha = 0.04$ ). Символами + и – показаны знаки энергии волн, а символом  $\square$  – точки смены знака энергии

энергией (ВОЭ).

В чем физический смысл ВОЭ? Например, для продольных волн в электронном потоке усредненная энергия  $W = W_0 + W_{волны}$ , где  $W_0$  – кинетическая энергия пучка,  $W_{волны} \sim |a|^2$  – добавка, связанная с волной.<sup>1</sup> Поэтому можно сказать, ВОЭ это такие волны, при возбуждении которых энергия системы уменьшается. В случае ВОЭ источник совершает отрицательную работу, или, другими словами, энергия передается из среды к источнику. Эти особенности и определяют свойства ВОЭ, которые иногда называют формализмом ВОЭ:

- 1) Понятие ВОЭ применимо для консервативных и слабо диссипативных сред.
- 2) При ВОЭ возбуждении внешним источником энергия передается из среды к источнику.
- 3) В средах с потерями ВОЭ нарастают (неустойчивость ВОЭ в среде с диссипацией). Это хорошо видно из формул для волн для линии с потерями ( $L_i, C_i > 0$ ). Если рассуждать «на пальцах», то наличие потерь должно приводить к уменьшению энергии волны. Поскольку энергия волны отрицательна, при ее уменьшении амплитуда может только расти, а это и есть неустойчивость. Однако бывают разные потери: нормальные (положительные) и аномальные (отрицательные). Единственный строгий способ определить какие потери в среде – положительные или отрицательные – это написать соотношения баланса. Не всегда наличие потерь в среде ведет к поглощению энергии волн (например, если формально ввести столкновения в пучке, диссипация ВОЭ останется положительной, так как факт неустойчивости не зависит от выбора системы отсчета, а пучок с потерями в сопровождающей системе отсчета становится равновесной плазмой с потерями).
- 4) Линейная связь ВОЭ и ВПЭ приводит к неустойчивости. Причина та же: отдавая энергию ВОЭ растет по амплитуде. Поэтому в данном случае ВПЭ и ВОЭ будут нарастать по амплитуде одновременно. Пучковую неустойчивость можно интерпретировать как неустойчивость, возникающую при линейной связи ВОЭ пучка с ВПЭ плазмы. Отсюда сразу следует, что эта неустойчивость имеет резонансный характер, поскольку именно в точках пересечения дисперсионных ветвей выполнены условия резонанса для линейно связанных волн.

**Точки изменения знака энергии.** Полученное ранее универсальное представление для плотности энергии  $W = (\omega D'_\omega)_0 |a|^2$  позволяет утверждать, что знак энергии меняется в точках  $\omega = 0$  (переход частоты через ноль) или при  $D'_\omega = 0$  – в точках ветвления функции  $\omega(k)$  (где групповая скорость формально равна бесконечности). Однако следует сделать оговорку – исключаются точки, в которых эти величины меняют знак одновременно. На простом примере можно убедиться, что такое возможно. Действительно, если взять LC-линию с постоянными параметрами  $L, C = const$ , получим  $D'_\omega = 2k^2 / (L\omega^3)$  и  $W \sim 2k^2 / (L\omega^2) > 0$ . Таким образом, частота и  $\tilde{D}'_\omega$  меняют знак одновременно, а знак энергии остается всегда положительным. Знак энергии меняется при переходе частоты через ноль только тогда, если этот переход происходит при  $k \neq 0$ . Отсутствие смены знака энергии в начале координат не является случайным. Действительно, как отмечалось ранее, дисперсионные ветви обладают свойствами центральной симметрии. При этом симметрично расположенные волны на плоскости  $(\omega, k)$  физически идентичны (соответствуют одной и той же реальной волне). Ясно, что одной и той же волне невозможно приписать разные знаки энергии. Поэтому начало координат не может быть точкой смены знака энергии.

---

<sup>1</sup> Подчеркнем, не вдаваясь в подробности, что такое разделение возможно для полной волновой энергии волнового цуга (пакета)  $W_{полн} = \int_{-\infty}^{\infty} W dx$  или для плотности энергии в пространственно-однородном поле, когда  $a = a(t)$ . Дело в том, что в случае волнового цуга возможны локальные изменения полной плотности энергии, связанные с динамикой (переносом) средних полей второго порядка (пропорциональных  $|a|^2$ ), однако и в присутствии средних полей изменение энергии волнового цуга совпадает с работой, совершенной внешним источником, который возбуждает волну.

## 4.2 РЕЗОНАНСНОЕ ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАМОДЕЙСТВИЕ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СРЕДАХ

**Простейшая модель консервативной среды. Вывод укороченных уравнений.** В качестве примера консервативной среды рассмотрим распределенную LC-линию, в которой нелинейными элементами являются емкость и индуктивность (рис. 1,а). Телеграфные уравнения для такой линии записываются в виде

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{du} \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{d\phi}{dI} \frac{\partial I}{\partial t}.$$
(1)

где  $Q$  – заряд на емкости,  $\phi$  – магнитный поток через катушку индуктивности. По определению величины  $C(U) = dQ/dU$  и  $L(I) = d\phi/dI$  есть емкость и индуктивность, которые зависят от напряжения и тока соответственно. Не останавливаясь пока на технической реализации нелинейной емкости и индуктивности, предположим, что их можно аппроксимировать линейной зависимостью от напряжения и тока.

$$C(U) = C_0 + \alpha u, \quad L(I) = L_0 - \beta I, \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – положительные постоянные. Из уравнений (1) видно, что подстановка

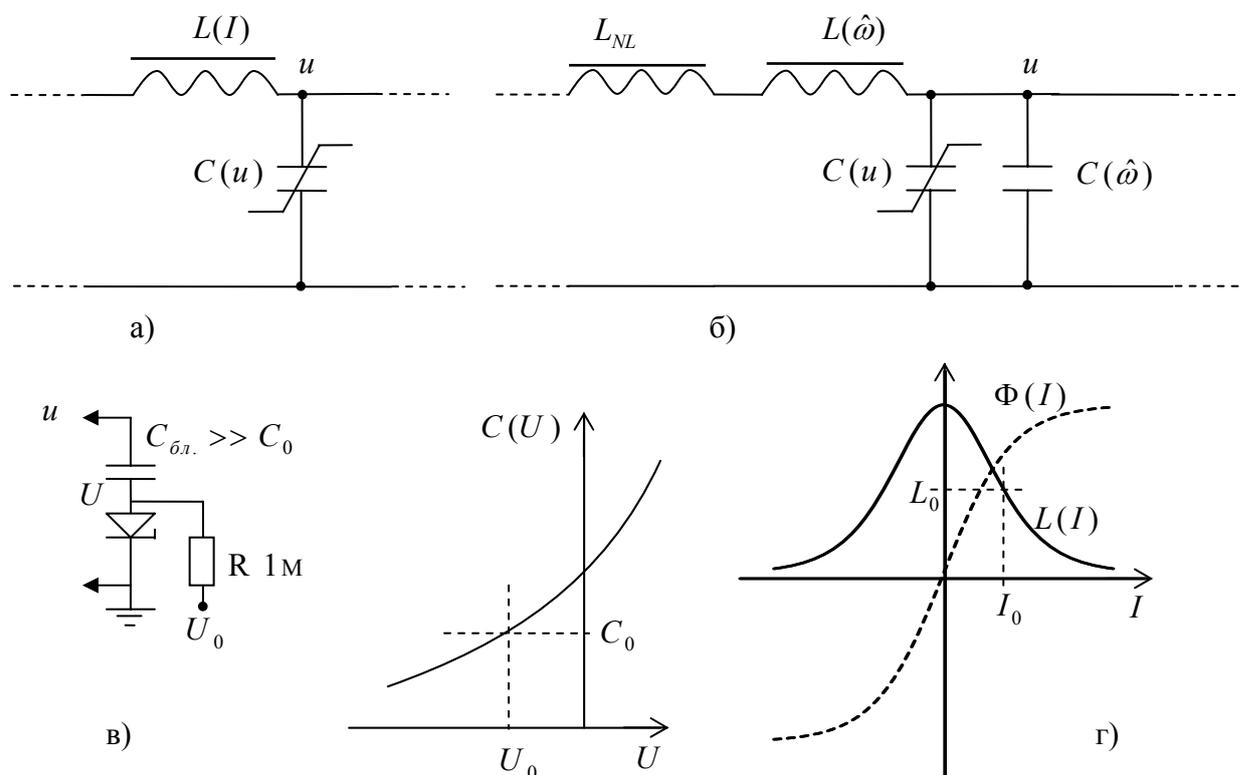


Рис.1 Звено простейшей LC – линии с нелинейной емкостью (а) и ее обобщение для моделирования консервативной нелинейной среды с дисперсией (б). Реализация нелинейной емкости с помощью радиоэлектронных элементов и зависимость емкости от напряжения на обратном смещенном р-п-переходе стабилитрона (в). Зависимость магнитного потока через катушку индуктивности с идеальным ферромагнитным сердечником (г).

аппроксимации (2) приводит к появлению в них квадратичной нелинейности. Простейшую  $LC$ -линию с нелинейной емкостью и индуктивностью можно модифицировать для моделирования консервативной нелинейной среды с дисперсией, если включить последовательно с нелинейной индуктивностью частотно-зависимую индуктивность, а параллельно с нелинейной емкостью – частотно-зависимую емкость (рис. 1,б). Удобно объединить постоянные  $C_0$  и  $L_0$  с частотно-зависимыми емкостью  $C(\omega)$  и индуктивностью  $L(\omega)$ . Тогда для описания диспергирующей линии, показанной на рис. 1,б, в (1) следует сделать замену

$$C(U) \Rightarrow C(\hat{\omega}) + \alpha u, \quad L(I) \Rightarrow L(\hat{\omega}) - \beta I. \quad (3)$$

Для того, чтобы получить уравнения с малой нелинейностью, предположим, что зависящие от напряжения и тока добавки в (3) малы (в действительности именно малость возмущений токов и напряжений позволяет использовать линейные аппроксимации (2)). Выделим малые нелинейности в явном виде, полагая

$$u = \varepsilon u_{нов.}, \quad I = \varepsilon I_{нов.} \quad (4)$$

где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр, а  $u_{нов.}, I_{нов.} = O(1)$ .

Как следует понимать замену (4)? мало. Строго говоря, выделение в уравнениях малого параметра связано с переходом к безразмерным переменным при подходящем выборе нормировок. Формальное введение  $\varepsilon$  с помощью (4) подразумевает, что эта процедура обезразмеривания в принципе осуществима, но не проделана явно. Другая интерпретация состоит в том, что переменные остаются размерностными, а малый параметр определяет относительную величину членов уравнений с одинаковой размерностью (например, в (4)  $u / u_{нов.} = O(\varepsilon)$ )

После подстановки (3), (4) в (1) и введения оператора  $\hat{k} = -i\partial / \partial x$  и отбрасывания индекса «нов.» получим телеграфные уравнения принимают вид

$$i\hat{k}I - i\hat{\omega}C(\hat{\omega})u = -\varepsilon \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad i\hat{k}u - i\hat{\omega}L(\hat{\omega})I = \varepsilon \frac{\partial f_2}{\partial t}, \quad (5)$$

$$f_1 = \frac{1}{2}\alpha u^2, \quad f_2 = \frac{1}{2}\beta I^2.$$

Уравнения (5) можно рассматривать как простую математическую модель слабонелинейной консервативной среды с дисперсией. Следует иметь в виду, что система (5) полностью равнозначна исходным уравнениям в частных производных только для осциллирующих составляющих переменных  $u$  и  $I$ . При появлении средних полей, пропорциональных  $|a|^2$  следует вносить коррективы (об этом будет сказано на следующих лекциях). В задаче о взаимодействии волн, когда она решается в рамках уравнений первого приближения, средние поля не существенны.

Остановимся кратко на возможной реализации нелинейной емкости и индуктивности с помощью радиоэлектронных элементов. Нелинейная емкость может быть получена путем подачи запирающего смещения на р-п переход. Например, на электронный стабилитрон, включенный в «прямом» направлении, через большое сопротивление  $R$  подано запирающее смещение  $U_0 < 0$  (рис. 1,в). Эмпирическая зависимость емкости от напряжения на стабилитроне показана на рис. 1,в. Запишем уравнения для полной схемы и предположим, что переменные (динамические) составляющие напряжения на стабилитроне  $U$  и тока через индуктивность  $I$  представляются в виде набора гармоник с различными частотами. Записывая уравнение Кирхгофа для узла, соединяющего  $C_{бл.}$  и стабилитрон, и поставив в него осциллирующие (гармонические) составляющие напряжений  $U$  и  $U_1$ , можно видеть, что они мало различаются при  $C_0 / C_{бл.} \ll 1$  и  $\omega RC_{бл.} \gg 1$  ( $\omega$  – характерная частота гармоник). Только на очень низких частотах возможны заметные отклонения. Другими словами, для динамического процесса можно

принять приближенно  $u = U - U_0$ . Ясно также, что представление (3) применимо в том случае, когда отклонение напряжения от постоянной составляющей достаточно мало и находится в пределах линейного участка зависимости емкости от напряжения. Отметим, что при записи первого уравнения (1) для полной схемы в нем удобнее использовать заряд на стабилитроне (а не на  $C_{\text{вн.}}$ ), вычитая одновременно в правой части ток через резистор  $(U - U_0)/R$ . При этом во втором уравнении будет стоять напряжение в присутствии блокировочной емкости, осциллирующая часть которого мало отличается от осциллирующей части  $U$ .

Нелинейную индуктивность можно получить, используя ферромагнитный сердечник. Зависимость магнитного потока через такой сердечник и его индуктивности от тока показана на рис. 1,г. Следует отметить, что нелинейная индуктивность фактически непригодна для моделирования консервативных сред, поскольку ферромагнетики имеют широкую петлю гистерезиса и соответственно большие потери. Нелинейная индуктивность введена в уравнения в учебных целях для иллюстрации общности подхода, поскольку в этом случае нелинейными являются оба уравнения (1). В то же время нелинейная емкость запертого р-п-перехода хорошо моделирует консервативную нелинейность, поскольку имеет малый ток утечки.

Преобразуем систему уравнений (5), исключая ток из первого уравнения, и рассматривая  $f_{1,2}$  как заданные функции (напомним, что при линейных преобразованиях с операторами  $\hat{\omega}, \hat{k}$  можно обращаться как с числами). После несложных преобразований получим уравнение, линейная часть которого зависит только от напряжения

$$i \underbrace{\left( \frac{\hat{\omega}^2 L(\hat{\omega}) C(\hat{\omega}) - \hat{k}^2}{\hat{\omega} L(\hat{\omega})} \right)}_{D(\hat{\omega}, \hat{k})} u = \varepsilon \left( \frac{i \hat{k}}{L(\hat{\omega})} f_2 - i \hat{\omega} f_1 \right), \quad (6)$$

и нелинейную связь тока с напряжением

$$I = \frac{\hat{k}}{L(\hat{\omega})} u + \varepsilon \frac{1}{L(\hat{\omega})} f_2 \quad (7)$$

Для поиска решений (6), (7) воспользуемся асимптотическим методом типа Боголюбова-Митропольского, который применялся ранее нами для описания возбуждения линии передачи сторонним током. Решение (6), (7) строим в виде асимптотического ряда, главная часть которого включает три собственные волны с медленно меняющимися амплитудами

$$\begin{pmatrix} u \\ I \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 a_j \begin{pmatrix} 1 \\ \psi_2(k_j) \end{pmatrix} e^{ik_j x - i\omega_j t} + k.c. + \varepsilon \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ I^{(1)} \end{pmatrix} + \dots \quad (\tau = \varepsilon t, \chi = \varepsilon x), \quad (8)$$

где  $\psi_2(k_j) = k_j / (\omega_j L_j) = \pm \sqrt{C_j / L_j}$ . Входящие главную часть (8) три волны являются собственными, т. е.  $D(\omega_j, k_j) = 0$  или, что то же самое,  $\omega_j = \omega(k_j)$ . Кроме того, предположим, что волновые числа и частоты связаны условиями трехволнового резонанса

$$k_1 + k_2 = k_3, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3. \quad (9)$$

Физическое содержание этих условий будет понятно из дальнейшего. Уравнения для медленно меняющихся амплитуд строим в виде

$$\frac{\partial a_j}{\partial \tau} = F_j^{(1)} + \varepsilon F_j^{(2)} + \dots \quad (10)$$

где  $F_j^{(1)}, \dots$  – неизвестные функционалы, подлежащие определению. Подставляем разложение (8) в (6) и приравниваем члены при различных степенях  $\varepsilon$ . В главном порядке (приравнивание нулю членов при  $\varepsilon^0 = 1$ ) получаем тождества, поскольку  $D(\omega_j, k_j) = 0$ .

При подстановке (8) в правые части (6) каждая нелинейная функция принимает вид разложения по  $\varepsilon$ :

$$f_{1,2} = f_{1,2}^{(0)} + \varepsilon f_{1,2}^{(1)} + \dots \quad (11)$$

Рассмотрим, для примера, подробнее  $f_1 \sim u^2$ . При подстановке главной части разложения (8) получим

$$\begin{aligned} f_1^{(0)} \sim (u^{(0)})^2 = & \left( 2a_1 a_2 e^{i(k_1+k_2)x-i(\omega_1+\omega_2)t} + k.c. + \dots \right) + \\ & + \left( 2a_3 a_1^* e^{i(k_3-k_1)x-i(\omega_3-\omega_1)t} + 2a_3 a_2^* e^{i(k_3-k_2)x-i(\omega_3-\omega_2)t} + 2a_2 a_1^* e^{i(k_2-k_1)x-i(\omega_2-\omega_1)t} + k.c. \dots \right) + \\ & + \sum_{j=1}^3 a_j^2 e^{2ik_j x - 2i\omega_j t} + k.c. + 2 \sum_{j=1}^3 |a_j|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Первый вывод, который можно сделать из рассмотрения (12), сводится к тому что нелинейность приводит к появлению в правой части уравнений гармоник с комбинационными (суммарными и разностными) волновыми числами и частотам. Нелинейность «комбинирует» (складывает и вычитает) показатели экспонент. Первые два слагаемых в круглых скобках содержат результат «сложения» гармоник с различными частотами и волновыми числами, третье и четвертое – с одинаковыми. Члены  $\sim |a_j|^2$  ответственны за появление средних полей (аналог известного в радиотехнике эффекта детектирования). Второй вывод состоит в том, что при выполнении условий резонанса (9) в сумме (12) имеются слагаемые, показатели экспонент которых полностью совпадают показателями экспонент собственных волн  $(k_j, \omega_j)$  в главной части решения (8):  $\exp[i(k_1+k_2)x-i(\omega_1+\omega_2)t] = \exp(ik_3x-i\omega_3t)$  и т.д. Таким образом, нелинейность создает в правой части уравнения (6) резонансные сторонние (по отношению к линейной левой части) источники. Поэтому условия резонанса (9) обеспечивают возможность накапливающихся изменений амплитуды каждой гармоники, которая в них присутствует. Кроме того, в отличие от рассмотренной нами ранее линейной задачи о возбуждении волн внешним источником, нелинейность дает также «несобственные гармоники», частоты и волновые числа которых не связаны дисперсионным уравнением. Таким образом, нелинейные члены в главном порядке по  $\varepsilon$  можно представить в виде суммы гармоник двух типов:

$$f^{(0)} = \underbrace{\sum_j \hat{f}_j^{(0)}(\tau, \chi) e^{ik_j x - i\omega_j t}}_{D(\omega_j, k_j)=0} + \underbrace{\sum_m \hat{f}_m^{(0)}(\tau, \chi) e^{ik_m x - i\omega_m t}}_{D(\omega_m, k_m) \neq 0} + k.c. \quad (13)$$

где  $f^{(0)} = f_1^{(0)}$  или  $f_2^{(0)}$ , символом  $\hat{\phantom{f}}$  обозначены комплексные амплитуды гармоник. В первой сумме объединены слагаемые, волновые числа и частоты которых связаны дисперсионным соотношением, во второй – которые не связаны.

В порядке  $\varepsilon$  для первой добавки  $u^{(1)}$  получаем линейное уравнение с разложением (13) в правой части. Поэтому  $u^{(1)}$  также можно представить в виде суммы гармоник двух указанных выше типов:

$$u^{(1)} = \underbrace{\sum_j \hat{u}_j^{(1)}(\tau, \chi) e^{ik_j x - i\omega_j t}}_{D(\omega_j, k_j)=0} + \underbrace{\sum_m \hat{u}_m^{(1)}(\tau, \chi) e^{ik_m x - i\omega_m t}}_{D(\omega_m, k_m) \neq 0} + k.c. \quad (14)$$

Аналогично записывается выражение для добавки  $I^{(1)}$ .

Подставим (13), (14) в (6) и воспользуемся для определения действия спектральных операторов разложением по  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial x$ , полученным на предыдущих лекциях. Это приводит к следующим уравнениям для амплитуд гармоник добавки  $u^{(1)}$ :

$$iD(\omega_j, k_j) \hat{u}_j^{(1)} = \hat{Q}_j, \quad \text{где} \quad (15)$$

$$\hat{Q}_j = \begin{cases} \frac{ik_j}{L(\omega_j)} (\hat{f}_2^{(0)})_j - i\omega_j (\hat{f}_1^{(0)})_j + \left( \frac{\partial D}{\partial \omega} \Big|_j F_j^{(1)} - \frac{\partial D}{\partial k} \Big|_j \frac{\partial a_j}{\partial \chi} \right), & \text{если } D(\omega_j, k_j) = 0 \\ \frac{ik_j}{L(\omega_j)} (\hat{f}_2^{(0)})_j - i\omega_j (\hat{f}_1^{(0)})_j, & \text{если } D(\omega_j, k_j) \neq 0 \end{cases}$$

Амплитуды добавок, волновые числа и частоты которых не связаны дисперсионным соотношением, ограничены и находятся явно

$$\hat{u}_m^{(1)} = -i\hat{Q}_m / D(\omega_m, k_m), \text{ если } D(\omega_m, k_m) \neq 0. \quad (16)$$

Условие существования (ограниченности) добавок с собственными частотами и волновыми числами ( $|\hat{u}_m^{(1)}| < \infty$ ) имеет вид  $\hat{Q}_j = 0$ . Отсюда однозначно находится неизвестный функционал  $F_j^{(1)}$  в разложении (10). Подставляя этот функционал в (10), получаем при  $j = 1, 2, 3$  уравнения первого приближения для комплексных амплитуд волн, входящих в главную часть разложения (8). Запишем их, возвращаясь к единому времени и координате:

$$\begin{aligned} (D'_\omega)_1 (\dot{a}_1 + v_{1,2} a'_{1,2}) &= \sigma a_2^* a_3, \\ (D'_\omega)_2 (\dot{a}_2 + v_2 a'_2) &= \sigma a_1^* a_3 \quad \sigma = \varepsilon \left( \alpha - \beta \frac{k_1 k_2 k_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 L_1 L_2 L_3} \right), \\ (D'_\omega)_3 (\dot{a}_3 + v_3 a'_3) &= -\sigma a_1 a_2, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $v_j = (-D'_k / D'_\omega)_j$  – групповые скорости волн,  $L_j = L(\omega_j)$ . Здесь и далее приняты обозначения  $\dot{a} = \partial a / \partial t$  и  $a' = \partial a / \partial x$ . Это и есть классические уравнения резонансного взаимодействия спектрально узких волновых пакетов или модулированных волн в консервативных средах. Левые части (17) описывают групповое распространение огибающей. Если бы нелинейность отсутствовала  $\varepsilon = 0$ , огибающая каждой волны переносилась бы независимо со своей групповой скоростью. Правые части определяют связь волн через нелинейность.

Остановимся еще раз на том, как определить структуру правых частей уравнений (17), не повторяя полностью их вывод. Восстановим в правой и левой части осциллирующие экспоненты, исчезнувшие при усреднении (вернемся к полным полям). В частности, для этого в правой части третьего уравнения следует сделать замену

$$a_1 a_2 \Rightarrow a_1 a_2 \exp \left[ i \underbrace{(k_1 + k_2)}_{k_3} x - i \underbrace{(\omega_1 + \omega_2)}_{\omega_3} t \right] \quad (18)$$

Таким образом, нелинейный член  $\sim a_1 a_2$  обязан своему происхождению комбинационному источнику, который возникает при сложении волновых чисел и частот волн с номерами 1 и 2. Именно он приводит к резонансной раскочке амплитуды волны 3, которая входит в левую часть уравнения. Аналогично можно прогнозировать вид правых частей двух других уравнений (17). Теперь ясно, что выписывать все гармоники нелинейности (12) совсем не обязательно. Достаточно выбрать те, которые находятся в резонансе с возбуждаемой волной.

Поскольку среда консервативна, полезно перейти к записи уравнений (17) через энергетические характеристики. Введем понятие числа квазичастиц в волне по аналогии с формулой квантовой механики для энергии осциллятора. В квантовой механике энергия квантуется, т.е. принимает дискретные значения:  $W = \hbar \omega N$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $N$  – число заполнения энергетического уровня или число квазичастиц (формула дана в случае больших чисел заполнения –  $N \gg 1$ ). Введем (чисто формально) аналог числа квазичастиц в волне:

$$N = \left| \frac{W}{\omega} \right| \equiv q |a|^2 > 0. \quad (19)$$

где  $q$  – положительный коэффициент пропорциональности. Тогда уравнения (17) переписутся в виде

$$\begin{aligned} s_{1,2} q_{1,2} (\dot{a}_{1,2} + v_{1,2} a'_{1,2}) &= \sigma a_{2,1}^* a_3, \\ s_3 q_3 (\dot{a}_3 + v_3 a'_3) &= -\sigma^* a_1 a_2. \end{aligned} \quad (20)$$

где  $s_j = \text{sign} \left( \frac{W}{\omega} \right)_j$ . Далее без ущерба общности будем считать  $\omega_j$  положительными.<sup>1</sup> При

положительных частотах ( $\omega_j > 0$ ) получим  $s_j = \text{sign}(W_j)$  и  $W_j = s_j \omega_j N_j$ , т.е.  $s_j$  совпадает со знаком энергии  $j$ -ой волны. Задание положительных частот устанавливает их иерархию их значений в (9):  $\omega_3 > \omega_{1,2}$ . Поэтому волну  $(\omega_3, k_3)$ , которая имеет наибольшую частоту, далее будем условно называть высокочастотной, а две другие – низкочастотными.

**Замечание.** Возможен и другой подход, когда знак энергии отождествляется со знаком частоты и на этой основе вводится понятие квантов с отрицательной энергией (в силу свойств симметрии решений дисперсионного уравнения без ущерба общности всегда можно выбрать знаки частот в главной части решения совпадающими со знаками энергии волн). Положительный момент такого подхода состоит в том, законы сохранения будут выполняться в элементарных актах распада – слияния квантов (см. далее).

Можно показать, что уравнения (20) являются общей записью уравнений взаимодействия трех волн с положительными частотами в консервативных средах с учетом знаков энергии волн. Обоснование данной записи для широкого класса консервативных сред можно дать в рамках лагранжева формализма. В последнем уравнении (20) комплексно сопряженное  $\sigma$  не получается из приведенного выше вывода для LC-линии (т.к. эти коэффициенты оказались вещественными, то  $\sigma^* = \sigma$ ). Однако необходимость данного обобщения вполне очевидна. Действительно, если в уравнениях (20) с вещественным  $\sigma$  сделать преобразование амплитуд, полагая  $a_{нов.} = ia$ , для  $a_{нов.}$  получим те же уравнения, но с новым комплексным коэффициентом  $\sigma_{нов.} = i\sigma$ , причем в третьем уравнении будет стоять  $\sigma_{нов.}^*$ . Ясно также, что такое преобразование амплитуд могло бы появиться и «естественным» путем, например, вследствие выбора другой нормировки собственных векторов в (8).

### Резонансное взаимодействие трех пространственно-однородных волн во времени. Соотношения Мэнли-Роу.

Запись уравнений в виде (20) удобна тем, что позволяет выделить законы сохранения в явном виде. Рассмотрим взаимодействие во времени пространственно однородных волн ( $\partial a / \partial x = 0$ ). В этом случае получим уравнения в обыкновенных производных по времени:

$$s_{1,2} q_{1,2} \dot{a}_{1,2} = \sigma a_{2,1}^* a_3, \quad s_3 q_3 \dot{a}_3 = -\sigma^* a_1 a_2. \quad (21)$$

Какие процессы реально описывает данная модель?

1. Это элементарный процесс резонансного взаимодействия трех мод свободного пространства. Модами свободного пространства обычно называют гармоники  $\exp(ikx)$ , всякое возмущение можно разложить по модам, используя преобразование Фурье. Свойства элементарного процесса желательно знать, чтобы прогнозировать более сложные взаимодействия.

<sup>1</sup> Частоты волн в главной части решения всегда можно выбрать положительными в силу свойств симметрии решений дисперсионного уравнения, отмеченных на первой лекции.

2. Случай неоднородных волн, когда производной по координате в (20) можно пренебречь. Если ввести характерный масштаб огибающей  $l$ , то, например, из последнего уравнения (20) следует оценка

$$\left| v_g \frac{a_3}{l} \right| \ll \left| \frac{\partial a_3}{\partial t} \right| \sim |\sigma_3 a_1 a_2|, \quad \text{откуда} \quad \gamma_{\text{нел.}} = \left| \frac{1}{a_3} \frac{\partial a_3}{\partial t} \right| \sim \left| \frac{\sigma_3 a_1 a_2}{a_3} \right| \gg \frac{v_g}{l},$$

где  $\gamma_{\text{нел.}}$  – характерный инкремент (декремент) нелинейного взаимодействия. Данное условие означает, что скорость роста или затухания из-за нелинейного взаимодействия должна превосходить скорость изменения  $a$  в данной точке пространства из-за группового распространения огибающей. Если амплитуды имеют один порядок величины, то  $\gamma_{\text{нел.}} \sim |\sigma_3 a|$ . Теперь видно, что указанное условие сводится к ограничению на интенсивность волн и характерный масштаб огибающей.

3. Взаимодействие мод в кольцевом резонаторе. Уравнения принимают вид (20), если спектр волновых чисел достаточно разрежен. Количественно это сводится к условию  $v_g \Delta k_M \gg \gamma_{\text{нел.}}$ , где  $\Delta k_M$  – расстояние между модами резонатора по волновому числу. В этом случае взаимодействуют отдельные моды, поля которых однородны по  $x$ . Аналогичные «временные» уравнения можно получить для обычного резонатора с отражением от стенок. Однако в этом случае необходимо учесть влияние отраженных волн.
4. Наконец, ясно то стационарная задача ( $\partial a / \partial t = 0$ ) математически полностью идентична «временной» (21) при одинаковых знаках групповых скоростей  $v_j$ .

Умножим каждое из уравнений (21) на  $a_j^*$  и сложим результат с комплексно сопряженным выражением. В результате получим

$$s_{1,2} q_{1,2} \frac{\partial |a_{1,2}|^2}{\partial t} = \sigma a_2^* a_1^* a_3 + k.c., \quad s_3 q_3 \frac{\partial |a_3|^2}{\partial t} = -(\sigma a_2^* a_1^* a_3 + k.c.).$$

Из этих уравнений следуют интегралы движения, называемые соотношениями Мэнли-Роу

$$s_1 N_1 + s_3 N_3 = \text{Const}_1, \quad s_2 N_2 + s_3 N_3 = \text{Const}_2, \quad s_1 N_1 - s_2 N_2 = \text{Const}_3. \quad (22)$$

При этом независимы только два из приведенных интегралов. Кроме того, с учетом условий резонанса (9) из (22) получаются законы сохранения полной энергии и импульса для резонансного взаимодействия трех волн во времени:

$$\begin{aligned} s_1 \omega_1 N_1 + s_2 \omega_2 N_2 + s_3 \omega_3 N_3 &= \text{Const}_4 \\ s_1 k_1 N_1 + s_2 k_2 N_2 + s_3 k_3 N_3 &= \text{Const}_5 \end{aligned} \quad (23)$$

Отметим, что соотношения Мэнли-Роу можно записать и для волновых пакетов, если считать поля локализованными и проинтегрировать уравнения (20) по  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Это приводит к соотношениям Мэнли-Роу (22) для полных чисел квантов в волновых пакетах  $N_j = \int q_j |a|^2 dx$ .

### 4.3 РЕЗОНАНСНОЕ ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В РАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ

Волны с отрицательной энергией встречаются не столь часто, и являются в значительной степени «экзотикой». Основополагающее значение имеет анализ взаимодействия волн положительной энергии. Напомним, что мы условились считать частоты волн положительными и в соответствии с условием резонанса частот  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$  называть волны  $\omega_{1,2}$  низкочастотными, а волну  $\omega_3$  – высокочастотной. С учетом того, что в равновесной среде энергия волн положительна ( $s_j = +1 > 0$ ), полученные ранее общие соотношения Мэнли-Роу принимают следующий вид

$$N_1 + N_3 = Const_1, \quad N_2 + N_3 = Const_2, \quad N_1 - N_2 = Const_3. \quad (1)$$

Допустим, что в процессе взаимодействия число квантов одной из НЧ-волн, например,  $a_1$  увеличилось на  $\Delta N$ . Тогда из (1) следует, что число квантов другой НЧ-волны  $a_2$  тоже увеличилось на  $\Delta N$ , а число квантов высокочастотной волны уменьшилось на  $\Delta N$ . Другими словами, процесс протекает так, как будто произошло  $\Delta N$  элементарных актов рождения пары квазичастиц, в каждом из которых выполнен закон сохранения энергии и импульса, роль которых выполняют условия резонанса для частот и волновых чисел. Возможен и другой сценарий – слияние квазичастиц  $\omega_{1,2}$  с рождением  $\omega_3$ . Оба процесса иллюстрируются диаграммами на рис. 1. Любые другие преобразования волн запрещены законами сохранения.

#### ***Распадная неустойчивость высокочастотной волны***

Интегралы определяют только направление изменения амплитуд. Чтобы найти зависимость амплитуд от времени, следует решить уравнения. Начнем с самых простых решений, которые находятся в приближении заданного поля одной из волн. Запишем систему уравнений резонансного взаимодействия трех волн во времени в виде

$$\dot{a}_3 = \sigma_3 a_1 a_2, \quad \dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad \dot{a}_1 = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad (2)$$

где  $\sigma_{1,2} = \sigma / q_{1,2}$ ,  $\sigma_3 = -\sigma^* / q_3$ . На практике обычно выводят именно систему уравнений вида (2), вычисляя «коэффициенты взаимодействия»  $\sigma_j$ . Выражения для энергии и «числа квазичастиц», как правило, не используются явно, так как они не нужны непосредственно для решения уравнений. Эти понятия полезны, в основном, для того, чтобы установить общие свойства трехволновых взаимодействий. В то же время запись

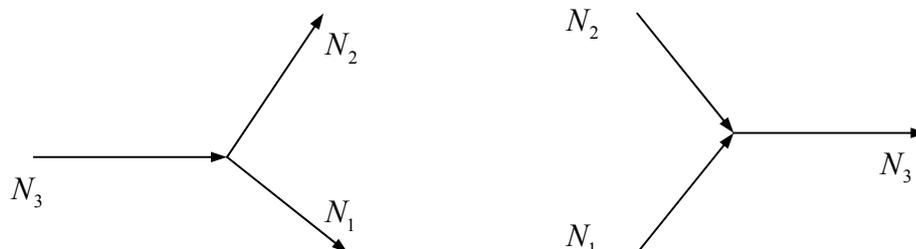


Рис. 2 Диаграммы трехволнового взаимодействия в равновесных средах

$\sigma_j$  через  $\sigma, q_j$ , ограничивает степень произвола для  $\sigma_j$ . Эти ограничения на  $\sigma_j$  следует иметь в виду, поскольку в конечном счете они определяют свойства самих резонансных взаимодействий в равновесных средах.

Допустим, что  $N_3(0) \gg N_{1,2}(0)$ , то есть в начальный момент имеется интенсивная ВЧ-волна. В этом случае можно использовать метод возмущений, считая в первом приближении амплитуду сильной волны постоянной (иногда это называют «приближением заданного поля»):

$$\dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^* a_{30}, \quad \dot{a}_1 = \sigma_1 a_2^* a_{30}, \quad a_3 = a_{30} = const \quad (3)$$

Эта система уравнений легко сводится к одному уравнению второго порядка

$$a_2 = \frac{\dot{a}_1^*}{\sigma_1 a_{30}}, \quad \ddot{a}_1 - \Gamma_0^2 a_1 = 0, \quad \Gamma_0 = \sigma_1 \sigma_2^* > 0 \quad (4)$$

Инкремент  $\Gamma_0 > 0$  благодаря тому, то существует представление коэффициентов  $\sigma_j$  через  $\sigma, q_j$ . Решение (4) с начальными условиями  $a_1(0) \neq 0, a_2(0) = 0$  имеет вид

$$a_1 = a_1(0) \operatorname{ch}(\Gamma_0 t) \rightarrow \frac{1}{2} a_1(0) \exp(\Gamma_0 t),$$

$$a_2^* = \frac{\Gamma_0 a_1(0)}{\sigma_1 a_{30}} \operatorname{sh}(\Gamma_0 t), \quad (5)$$

Слабые волны экспоненциально нарастают, из-за чего процесс был назван распадной неустойчивостью. Поскольку присутствие в среде заданной сильной волны можно рассматривать изменения параметров среды, эта неустойчивость иногда называется параметрической (заметим, что понятие параметрической неустойчивости имеет более широкий смысл, например, изменение параметров среды может быть связано с наложением внешних полей, которые не являются собственными волнами).

**«Нераспадность» низкочастотных волн.** Пусть теперь в начальный момент имеется интенсивная НЧ-волна, например  $a_2$ . При  $N_2(0) \gg N_{1,3}(0)$  в приближении ее заданного поля  $a_2 = a_{20} = const$  получим

$$\dot{a}_1 = \sigma_1 a_{20}^* a_3, \quad \dot{a}_3 = \sigma_3 a_1 a_{20} \quad (6)$$

Решение (6) с начальными условиями  $a_1(0) \neq 0, a_3(0) = 0$  принимает вид

$$a_1 = a_1(0) \cos(\Omega_0 t), \quad a_3 = -\frac{\Omega_0 a_1(0)}{\sigma_1 a_{20}^*} \sin(\Omega_0 t), \quad (7)$$

где  $\Omega_0 = -\sigma_1 \sigma_3 > 0$  в соответствии с ограничениями на коэффициенты в консервативной среде. Таким образом, в консервативной равновесной среде волны  $a_{1,3}$  остаются слабыми и осциллируют во времени. Действуя последовательно в духе метода возмущений можно найти поправку к амплитуде волны  $a_2$ :

$$a_2 = a_{20} + \int_0^t \sigma_2 a_1^* a_3 dt = a_{20} \left[ 1 - \frac{\sigma_2 |a_1(0)|^2}{2\sigma_1 |a_{20}|^2} \sin^2(\Omega_0 t) \right]. \quad (8)$$

Заметим, что в силу свойств коэффициентов взаимодействия в консервативной равновесной среде  $\sigma_2/\sigma_1 > 0$ , т.е. коэффициент при  $\sin^2(\Omega_0 t)$  вещественный и положительный. Поведение амплитуд всех волн показано на рис. 2. Полученный результат легко понять на «квантовом языке». Сначала идет рождение квантов ВЧ-волны за счет квантов НЧ-волн  $a_{1,2}$ . Но поскольку квантов НЧ-волны  $a_1$  мало, этот процесс быстро прекращается и начинается обратный процесс распада высокочастотной волны, который тоже быстро заканчивается в силу малости запасов квантов волны  $a_3$ . В

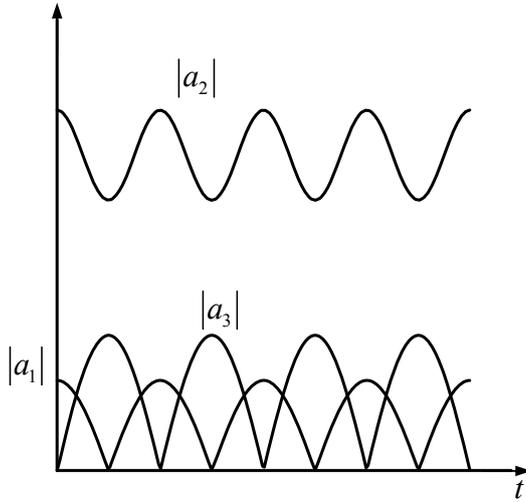


Рис. 2 «Нераспадность» низкочастотной волны в равновесной среде без потерь. Направление изменения амплитуд волн соответствует диаграммам на рис. 1. Поэтому уменьшение амплитуды  $|a_2|$  прекращается после обращения в ноль  $|a_1|$

результате амплитуды всех волн  $a_{1,3}$  слабо осциллируют, т.е. не происходит их существенных изменений. Таким образом, распад НЧ-волн в равновесной среде невозможен.

#### **Исследование уравнений трехволнового взаимодействия в фазовом пространстве**

Отнормируем сначала коэффициенты взаимодействия в (2) путем масштабного преобразования амплитуд. Положим в (2)  $a_j = \alpha_j b_j$  и выберем коэффициенты  $\alpha_j$  так, чтобы все коэффициенты взаимодействия стали равны единице. Оказывается, что для равновесной среды это всегда можно сделать. Для этого необходимо учесть свойства коэффициентов, следующие из общей записи уравнений для консервативной среды. В соответствии с выражениями для  $\sigma_j$  через  $\sigma, q_j$ , получим

$$\arg(\sigma_1) = \arg(\sigma_2) = -\arg(\sigma_3) + \pi \equiv \psi \quad (9)$$

Здесь введена величина  $\psi$  как фаза первых двух коэффициентов. Тогда нетрудно проверить, что преобразование

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_2 \sigma_3|}}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_1 \sigma_3|}}, \quad \alpha_3 = \frac{e^{-i\psi}}{\sqrt{|\sigma_1 \sigma_2|}} \quad (10)$$

приводит уравнения (2) к виду

$$\dot{b}_3 = -b_1 b_2, \quad \dot{b}_2 = b_1^* b_3, \quad \dot{b}_1 = b_2^* b_3. \quad (11)$$

В системе (11) все коэффициенты вещественны и по модулю равны единице. Ясно, что вид нормированных уравнений определен неоднозначно. Для чтения литературы полезно иметь в виду другой вариант замены, который приводит коэффициенты к мнимой единице. По сути это ничего не меняет, но довольно часто коэффициенты получаются чисто мнимыми сами по себе (в силу выбора нормировок). не определен неоднозначно. Если ввести в (11)  $b_3 = i b_3^{нов.}$ , получим уравнения с чисто мнимыми коэффициентами (индекс «нов.» отбрасываем):

$$\dot{b}_3 = i b_1 b_2, \quad \dot{b}_2 = i b_1^* b_3, \quad \dot{b}_1 = i b_2^* b_3. \quad (12)$$

Обратим внимание на то, что в отличие от (11) знаки всех правых частей в системе (12) одинаковы. В практических задачах в силу естественных нормировок обычно получается система типа (11) с вещественными коэффициентами, либо (12) – с мнимыми. И в том и в

другом случае коэффициенты удовлетворяют указанным выше условиям для консервативной равновесной среды.

Для перехода к вещественной форме уравнений (12) введем амплитуды и фазы волн, полагая  $b_j = B_j \exp(i\varphi_j)$ . Тогда, например, первое уравнение принимает вид

$$\dot{B}_{1,2} + iB_{1,2}\dot{\varphi}_{1,2} = iB_{2,1}B_3 e^{i(\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2)} \quad (13)$$

Приравнявая нулю вещественные и мнимые части в (13), получим

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= -B_2B_3 \sin \phi, & \dot{B}_2 &= -B_1B_3 \sin \phi, & \dot{B}_3 &= B_1B_2 \sin \phi, \\ \dot{\phi} &= \left( \frac{B_1B_2}{B_3} - \frac{B_1B_3}{B_2} - \frac{B_2B_3}{B_1} \right) \cos \phi \quad (\phi = \varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Это классическая форма уравнений трехволнового взаимодействия во времени. Отметим, что в уравнения вошла только разность фаз волн  $\phi$ . Это связано с отсутствием зависимости решений от выбора начала отсчета времени (трансляционная симметрия исходных уравнений по  $t$ ). Система (14) имеет интегралы движения

$$B_1^2 + B_3^2 = C_1, \quad B_2^2 + B_3^2 = C_2, \quad B_2^2 - B_1^2 = C_3, \quad (15)$$

которые есть ни что иное как другая форма записи соотношений Мэнли-Роу. С учетом интегралов (15) общее решение (14) записывается через специальные функции. Этот вопрос подробно изложен в литературе.

Мы ограничимся качественным исследованием частного класса решений (14), для которых  $\phi = const = \pi/2$ . Очевидно, что такой класс решений существует. При этом амплитуды остаются вещественными и уравнения (14) принимают вид:

$$\dot{B}_{1,2} = -B_{2,1}B_3, \quad \dot{B}_3 = B_1B_2, \quad (16)$$

Анализ фазовых траекторий в пространстве  $(B_1, B_2, B_3)$  удобно провести на основе двух интегралов системы (16) вида

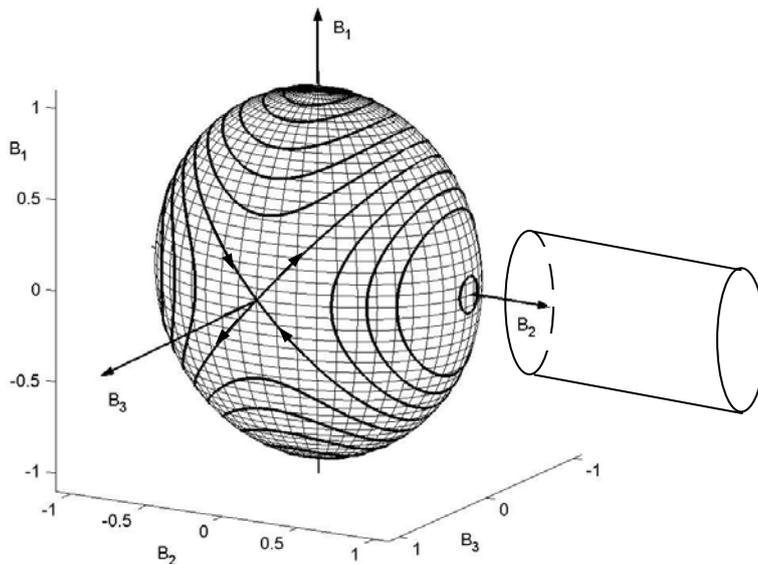


Рис. 3 К построению фазовых траекторий системы (16) на эллипсоиде

$$B_1^2 + B_2^2 + 2B_3^2 = C_0, \quad B_1^2 + B_3^2 = C_1 \quad (17)$$

(их легко получить из (15)). Первый интеграл есть поверхность эллипсоида с полуосями  $(1, 1, 1/\sqrt{2})$ . Интегральные (фазовые) кривые получаются при сечении этого эллипсоида цилиндрической поверхностью, которую определяет второй интеграл (17). Эта поверхность схематически показана на рис. 3 справа от эллипсоида. Поскольку всегда можно избавиться от  $C_0$  с помощью нормировки всех амплитуд на  $\sqrt{C_0}$ , без ущерба общности можно положить в (17)  $C_0=1$ . Варьируя постоянную  $C_1$  (квадрат радиуса цилиндрической поверхности), можно построить все множество интегральных кривых на поверхности эллипсоида – рис. 3. Поскольку размер полуоси эллипсоида вдоль

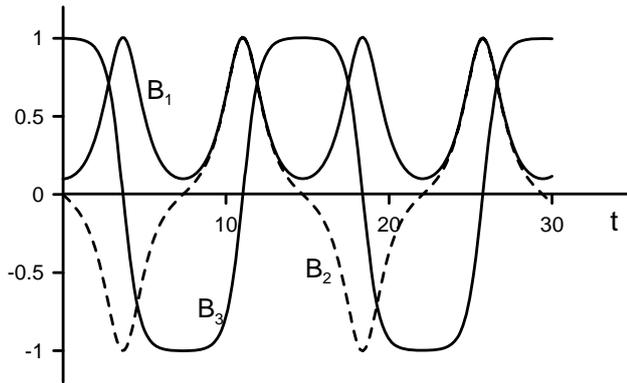


Рис. 4 Зависимость амплитуд волн от времени при распадной неустойчивости интенсивной высокочастотной волны:  $B_1(0) = 0.1$ ,  $B_2(0) = 0$ ,  $B_3(0) = 1$

координатной оси  $B_3$  меньше единицы, на поверхности появляются седловые точки, которые возникают при касании цилиндрической поверхности краев эллипсоида, расположенных на оси  $B_3$ . Состояния равновесия типа центр получаются при касании цилиндрической поверхности с «макушкой» эллипсоида и при  $C_1 = 0$ . Направление движения по фазовым траекториям находится с учетом (16).

Используя рис. 3, нетрудно сделать качественное построение зависимости амплитуд волн от времени. 1) Если фазовая траектория начинается в окрестности крайних точек эллипсоида по осям  $B_1$  или  $B_2$  ( $|B_2(0)| \gg |B_{1,3}(0)|$ ), она остается вблизи состояния равновесия типа центр. В этом случае имеем малые осцилляции  $B_{1,2,3}$ , рассмотренные ранее в приближении заданного поля (см. рис. 2). Это соответствует режиму нераспадения НЧ-волн. 2) Если траектория начинается в окрестности крайних точек эллипсоида по оси  $B_3$  ( $|B_3(0)| \gg |B_{1,2}(0)|$ ), она попадает в окрестность седла и начинает медленно смещаться вдоль сепаратрисы. В этом случае происходит полный (с переходом через ноль) распад  $B_3$  и возникают протяженные пологие участки зависимости  $B_3(t)$ , связанные с прохождением траектории возле седловой точки. Такое поведение фазовой траектории соответствует режиму распада ВЧ-волны. Пример зависимости амплитуд волн от времени при распадной неустойчивости показан на рис. 4. Видно, что энергообмен между волнами имеет обратимый характер (биения во времени). Сепаратрисе соответствует решение с одиночным перепадом  $B_3$  и «пичками»  $B_{1,2}$ . Отметим, что обменный характер взаимодействия волн подразумевает наличие динамики их фаз, так как смена знака  $B_j$  равнозначна скачку фазы на  $\pi$  при определенно положительном  $B_j$ .

### **Вырожденное трехволновое взаимодействие (генерация второй гармоники)**

Трехволновое взаимодействие возможно в системе из двух волн, кванты одной из которых сливаются друг с другом. Условия резонанса в данном случае принимают вид

$$2k_1 = k_2, \quad 2\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega \quad (18)$$

где  $\omega_1 = \omega(k_1)$ ,  $\omega_2 = \omega(k_2)$ ,  $\Delta\omega$  – расстройка частот волн от резонанса, которая предполагается малой. Этот процесс лишь формально называется трехволновым, так как фактически в нем участвуют две волны, частоты и волновые числа которых различаются в два раза. Уравнения для развития комплексных амплитуд во времени записываются в виде

$$\dot{a}_1 = \sigma_1 a_1^* a_2 e^{i\Delta\omega t}, \quad \dot{a}_2 = \sigma_2 a_1^2 e^{-i\Delta\omega t} \quad (19)$$

Используя свойства коэффициентов взаимодействия в консервативной среде, после введения нормировок уравнения (19) можно преобразовать к виду

$$\dot{b}_1 = ib_1^* b_2 e^{i\Delta\omega t}, \quad \dot{b}_2 = ib_1^2 e^{-i\Delta\omega t} \quad (20)$$

После перехода к вещественной форме записи вместо (20) получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{B}_1 &= -B_1 B_2 \sin \phi, \quad \dot{B}_2 = B_1^2 \sin \phi \quad (\phi = \varphi_2 - 2\varphi_1 + \Delta\omega t) \\ \dot{\phi} &= \left( \frac{B_1^2}{B_2} - 2B_2 \right) \cos \phi + \Delta\omega \end{aligned} \quad (21)$$

Система (20) имеет интеграл (соотношение Мэнли–Роу)

$$B_1^2 + B_2^2 = C^2 \quad (22)$$

Из (22) следует, что амплитуды волн всегда изменяются в противоположных направлениях: если  $B_1$  растет, то  $B_2$  убывает, либо наоборот. На квантовом языке два кванта волны  $B_1$  сливаясь дают квант второй гармоники  $B_2$ . Либо квант  $B_2$  распадается на два кванта волны  $B_1$ . Таким образом, возможна распадная неустойчивость высокочастотной волны удвоенной частоты или, что то же самое, параметрическая неустойчивость волны половинной частоты. Система (21) допускает исследование на фазовой плоскости при произвольной разности фаз  $\phi = 2\omega_1 - \omega_2 + \Delta\omega$  и произвольной расстройке от резонанса  $\Delta\omega$ .

#### 4.4 СТАЦИОНАРНОЕ ТРЕХВОЛНОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если ставится граничная задача и рассматривается установившийся во времени процесс ( $\partial/\partial t \rightarrow 0$ ), уравнения трехволнового взаимодействия примут вид

$$v_{1,2}a'_{1,2} = \sigma_{1,2}a_{2,1}^*a_3, \quad v_3a'_3 = \sigma_3a_1a_2 \quad (1)$$

(штрихи означают производные по  $x$ ). При одинаковых знаках групповых скоростей, когда волны вводятся в среду с одной и той же границы, задача об изменении амплитуд волн в пространстве формально полностью совпадает с рассмотренной ранее задачей об эволюции во времени (задачей Коши). В этом можно убедиться с помощью замены  $\bar{\sigma}_j = \sigma_j/v_j$ ,  $x \rightarrow t$ . Отсюда следует, что с ростом  $x$  либо амплитуды волн  $a_{1,2}$  одновременно нарастают при уменьшении  $a_3$ , либо наоборот. Инкремент параметрической неустойчивости в заданном поле высокочастотной волны равен  $\Gamma_0 = \sqrt{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2}$ . Такая взаимозаменяемость пространственной и временной задач называется пространственно–временной аналогией.

В общем случае произвольных знаков групповых скоростей имеем соотношения Мэнли–Роу для величин, которые можно интерпретировать как потоки квазичастиц:

$$v_1N_1 + v_3N_3 = C_1, \quad v_2N_2 + v_3N_3 = C_2, \quad v_1N_2 - v_2N_2 = C_3. \quad (2)$$

Сравнение (2) с соотношениями Мэнли-Роу для временной задачи приводит к выводу, что знаки групповых скоростей могут играть при определении поведения амплитуд как функций  $x$  ту же роль, что знаки энергии волн. Однако это утверждение нуждается в разъяснении.

Рассмотрим конкретную реализацию трехволнового процесса с разными знаками групповых скоростей волн – вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна (ВРМБ) света на звуке в газе. Условия резонанса для данного трехволнового взаимодействия,

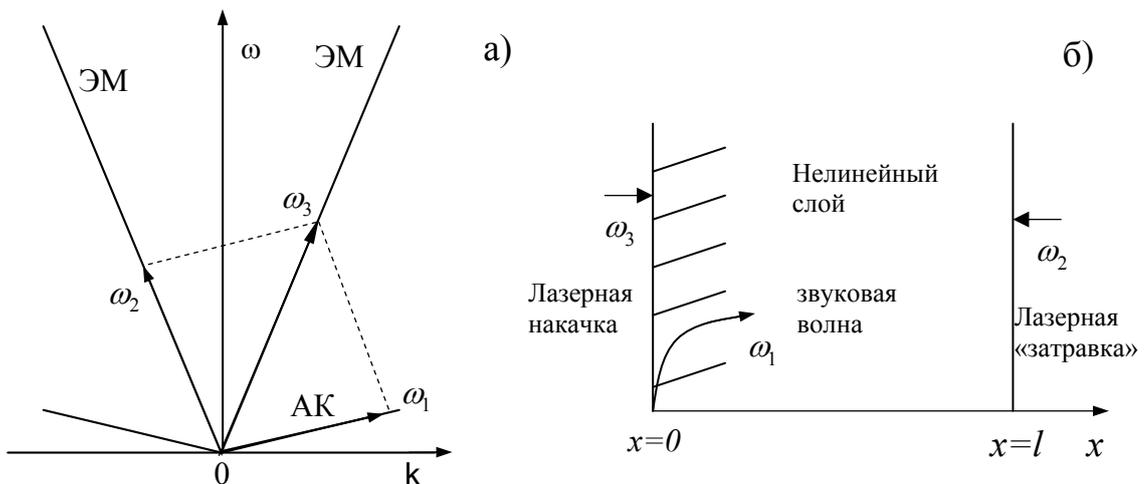


Рис. 1 Графическое изображение условий резонанса (а) и постановки граничных условий (б) для вынужденного рассеяния Мандельштама-Бриллюэна.

показаны на рис. 1а, а постановка граничных условий иллюстрируется на рис. 1б (наклоны дисперсионных ветвей нарисованы без соблюдения масштаба). В среде имеется два типа волн – электромагнитные и акустические. На границу  $x=0$  подается интенсивная электромагнитная волна на частоте  $\omega_3$ , а на границу  $x=l$  – слабая (сигнальная) электромагнитная волна  $\omega_2$ . В силу условий резонанса эти волны рожают акустическую волну  $\omega_1$ , которая рождается «из нуля» от границы  $x=0$ . В данном случае групповые скорости волн имеют различные знаки:  $v_{1,3} > 0$  и  $v_2 < 0$ .

Нелинейное взаимодействие между акустической и электромагнитными волнами возникает благодаря электрострикционному эффекту. Диэлектрическая проницаемость среды зависит от энтропии и плотности вещества. При малых возмущениях плотности и адиабатических процессах можно ограничиться главным членом разложения этой зависимости в ряд Тейлора:

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho_0) + \underbrace{\left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_S}_{\gamma_0} \tilde{\rho} + \dots \quad (3)$$

где  $\tilde{\rho} = (\rho - \rho_0)$  – возмущения плотности; производная по  $\rho$  берется в точке  $\rho_0$  при постоянной энтропии (индекс «S»). С другой стороны, термодинамическое уравнение состояния среды сводится к зависимости давления  $p$  от плотности, энтропии и интенсивности электромагнитного поля. При малых возмущениях:

$$p \approx p_0 + \underbrace{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S}_{c_s^2} (\rho - \rho_0) - \frac{1}{8\pi} \gamma_0 |\vec{E}|^2. \quad (4)$$

где  $c_s$  – адиабатическая скорость звука (см. далее). Феноменологические зависимости (3), (4) приводят к уравнениям движения с квадратичной нелинейностью

$$\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\varepsilon_0}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\gamma_0}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\rho} E) \equiv f_1 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\rho} u) \equiv f_2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} = \underbrace{-u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c_s^2}{\rho_0} \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \frac{\gamma_0}{8\pi} \frac{\partial E^2}{\partial x}}_{f_3} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $E = E_y$ ,  $H = H_z$ ,  $u = (\vec{v})_x$  – возмущения продольной скорости в газе,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости. При выводе уравнения (7) с учетом малости возмущений плотности ( $\tilde{\rho} \ll \rho_0$ ) сделана замена  $1/(\rho_0 + \tilde{\rho}) \approx (1/\rho_0)(1 - \tilde{\rho}/\rho_0)$ . Потери для акустических волн в газе в дальнейшем учитывать не будем ( $\nu \rightarrow 0$ ), сосредоточив все внимание на нелинейных эффектах.

Введем формально малый параметр  $\mu$ , чтобы показать в явном виде малую величину колебаний всех величин:  $E = \mu E_{нов.}$ ,  $H = \mu H_{нов.}$ ,  $u = \mu u_{нов.}$ ,  $\tilde{\rho} = \mu \tilde{\rho}_{нов.}$ . Опуская индекс «нов.» и производя очевидные преобразования уравнений (5)–(7), получим

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\mu \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \left( \frac{\partial f_3}{\partial t} - \frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial f_2}{\partial x} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \mu f_2, \quad (10)$$

Система (8), (9) имеет независимые линейные части, соответствующие электромагнитным и акустическим волнам. Отыскивая решение линеаризованных ( $\mu = 0$ ) уравнений (8)–(10) в виде  $\sim \exp(ikx - i\omega t)$ , получим хорошо известные дисперсионные уравнения электромагнитных и акустических волн:

$$\omega^2 - k^2 v_0^2 = 0, \quad \omega^2 - k^2 c_s^2 = 0 \quad (v_0 = c / \sqrt{\varepsilon_0}). \quad (11)$$

Соответственно, решение (8)–(10) ищется в виде

$$\begin{aligned} u &= a_1 e^{i\vartheta_1} + k.c. + \mu u^{(1)} + \dots, \\ \tilde{\rho} &= a_1 \frac{\rho_0}{c_s} e^{i\vartheta_1} + k.c. + \mu \tilde{\rho}^{(1)} + \dots, \\ E &= a_2 e^{i\vartheta_2} + a_3 e^{i\vartheta_3} + k.c. + \mu E^{(1)} + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $a_j = a_j(\tau, \chi)$  – медленно меняющиеся амплитуды волн,  $\vartheta_j = k_j x - \omega_j t$ ,  $k_j = k(\omega_j)$ . Подставляем (12) в (8)–(10) и применяем асимптотический метод, изложенный на предыдущих лекциях (в данном случае уравнения настолько просты, что нет необходимости вводить операторы взамен производных по  $x$  и  $t$ ). Это приводит к следующим уравнениям для амплитуд волн:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 + c_s a'_{1,2} &= i \tilde{\sigma}_1 a_2^* a_3, \\ \dot{a}_2 - v_0 a'_2 &= i \tilde{\sigma}_2 a_1^* a_3, \\ \dot{a}_3 + v_0 a'_3 &= i \tilde{\sigma}_3 a_1 a_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\tilde{\sigma}_1 = \frac{\gamma_0 \omega_1}{8\pi c_s}$ ,  $\tilde{\sigma}_2 = \frac{\gamma_0 \rho_0 \omega_2}{2\varepsilon_0 c_s}$ ,  $\tilde{\sigma}_3 = \frac{\gamma_0 \rho_0 \omega_3}{2\varepsilon_0 c_s}$ . При записи системы (13) мы положили  $\mu = 1$ ,

что равносильно возвращению к исходным («старым») переменным – см. переход от (5)–(7) к (8)–(10). В этом случае малость возмущений определяется непосредственно самими значениями амплитуд  $|a_j|$ , а не малым параметром. Можно показать, что связь плотности энергии с амплитудой для электромагнитных и акустической волн в данном случае имеет вид

$$W_{ЭМ} = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} |a_{2,3}|^2, \quad W_{АК} = 2\rho_0 |a_1|^2. \quad (14)$$

Если теперь с помощью (14) ввести число квантов в волнах и определить коэффициенты  $q_j$ , можно убедиться, что система (13) сводится к общему для консервативных сред виду, рассмотренному на предыдущих лекциях.

### **Приближение заданного поля интенсивной световой волны.**

Сохраним общую запись уравнений (1), задавая знаки групповых скоростей волн такими, как в системе (13). Фиксируя поле сильной волны ( $a_3 = \text{const} = a_{30}$ ), получим из (1) уравнения

$$v_1 a'_1 = \sigma_1 a_2^* a_{30}, \quad -|v_2| a'_2 = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (15)$$

которые приводятся к одному линейному уравнению

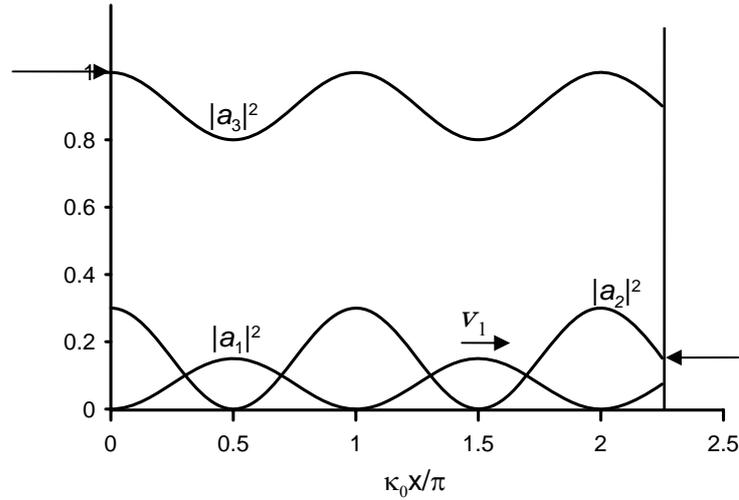


Рис. 2 Поведение интенсивностей волн в пространстве при вынужденном рассеянии Мандельштамма-Бриллюэна (длина нелинейной среды  $l = (9\pi/4)/\kappa_0$ )

$$a_1'' + \kappa_0^2 a_1 = 0 \quad \left( \kappa_0^2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2^*}{v_1 |v_2|} |a_{30}|^2 > 0 \right). \quad (16)$$

Решение для сигнальной электромагнитной волны при задании граничного условия  $a_1(0) = 0$  принимает вид

$$a_2 = a_2(l) \frac{\cos(\kappa_0 x)}{\cos(\kappa_0 l)}. \quad (17)$$

На рис. 2 показано поведение интенсивностей всех волн (в качестве примера длина нелинейного слоя взята такой, что  $\kappa_0 l = 9\pi/4$ ). Видно, что зависимость интенсивностей волн  $|a_j|^2$  от  $x$  имеет «нераспадный» характер – волны 1 и 2 осциллируют в поле сильной волны 3. Это находится в полном соответствии с интегралами (2), поскольку в данном случае  $v_{1,3} > 0$ ,  $v_2 < 0$ . Но означает ли это изменение направления преобразования энергии волн?

Интегралы (2) показывают, что в стационарной задаче интегралы записываются не для чисел квантов, а потоков квантов. В стационарной задаче сохраняется не энергия, а ее поток (сохранение потоков – общая закономерность для стационарных задач). Если ввести потоки энергии волн  $\Pi_j = v_j \omega_j N_j$  (напомним, что  $\omega_j > 0$ ), соотношения Мэнли-Роу (2) примут вид

$$\frac{\Pi_1}{\omega_1} + \frac{\Pi_3}{\omega_3} = C_1, \quad \frac{\Pi_2}{\omega_2} + \frac{\Pi_3}{\omega_3} = C_2. \quad (18)$$

Если нарисовать диаграммы взаимодействия не для числа квантов, а для потоков, то в соответствии с (18) распадной волной будет высокочастотная волна  $\omega_3$  (рис. 3). Таким образом, преобразование энергии волн не изменяет своей направленности. Как это согласовать с поведением интенсивностей волн  $|a_j|^2$  на рис. 2? Для этого следует учесть, что приращение потоков энергии (или потоков квантов) пропорциональны приращениям  $|a_j|^2$ , взятым в направлении групповых скоростей волн. Действительно,

$$\begin{aligned}
\Pi_j(x_2) - \Pi_j(x_1) &= v_j \omega_j (N_j(x_2) - N_j(x_1)) = \text{sign}(v_j) |v_j| q_j \left( |a_j(x_2)|^2 - |a_j(x_1)|^2 \right) = \\
&= \begin{cases} |v_j| q_j \left( |a_j(x_2)|^2 - |a_j(x_1)|^2 \right), & v_j > 0 \\ |v_j| q_j \left( |a_j(x_1)|^2 - |a_j(x_2)|^2 \right), & v_j < 0 \end{cases} \quad (19)
\end{aligned}$$

где  $q_j > 0$ . С учетом этого обстоятельства из рис. 2 видно, что изменение интенсивностей волн происходит в полном соответствии с (18) и диаграммами на рис. 3.

Напомним, что при распадном характере взаимодействия волн во времени была возможна полная перекачка энергии высокочастотной волны в низкочастотные. Такая перекачка не запрещена и в случае пространственного взаимодействия волн с разными знаками групповых скоростей. Вычислим коэффициент усиления сигнальной волны «на проход» через среду:

$$K_A = \frac{|a_2(0)|}{|a_2(l)|} = \frac{1}{|\cos(\kappa_0 l)|}. \quad (20)$$

Видно, что  $K_A$  обращается в бесконечность при  $\kappa_0 l = n\pi + (\pi/2)$ , где  $n = 1, 2, \dots$  – целое. При больших  $K_A$  приближение заданного поля нарушается, т.е. возможна существенная перекачка энергии высокочастотной волны в низкочастотные. Для описания этого процесса приближение заданного поля неприменимо и следует решать полную систему уравнений (1). Можно сказать, что нелинейная система «находит» способ реализовать распадный характер взаимодействия в полной мере, хотя и не при любых значениях параметров.

Таким образом, существенное преобразование энергии высокочастотной волны в низкочастотные при ВРМБ возможно, однако оно происходит при наличии определенном соотношении между интенсивностью волны накачки и длиной области взаимодействия. Если это соотношение нарушается, «распадный» тип преобразования потоков мощности реализуется при малых биениях их интенсивностей.

## 4.5 ОСОБЕННОСТИ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ ЭНЕРГИИ

Как уже отмечалось, в средах, далеких от состояния термодинамического равновесия (неравновесных средах) волны могут иметь отрицательную энергию. Соотношения Мэнли-Роу для взаимодействия трех пространственно-однородных волн с учетом знаков их энергии были получены на предыдущих лекциях:

$$s_1 N_1 + s_3 N_3 = C_1, \quad s_2 N_2 + s_3 N_3 = C_2, \quad s_1 N_1 - s_2 N_2 = C_3 \quad (1)$$

где  $s_j$  – знак энергии  $j$ -ой волны,  $N_j$  – число квазичастиц в  $j$ -ой волне. Ранее были изучены взаимодействия в равновесных средах, когда все волны имеют положительную энергию. Теперь зададимся вопросом, какие качественные особенности появляются при наличии волн с отрицательной энергией (ВОЭ).

**Распадность НЧ волн или «преобразование частоты» вверх.** Пусть при трехволновом взаимодействии отрицательную энергию имеет одна из НЧ-волн:  $s_1 = -1 < 0$ ,  $s_{2,3} = +1 > 0$ .

Тогда соотношения Мэнли-Роу примут вид

$$N_3 - N_1 = C_1, \quad N_2 + N_3 = C_2, \quad N_1 + N_2 = C_3 \quad (2)$$

Рассуждая так же, как при рассмотрении трехволновых процессов в равновесной среде, нетрудно видеть, что распадаться будет НЧ волна с частотой  $\omega_2$ . Это иллюстрируют диаграммы изменения числа квазичастиц, показанные на рис. 1. В данном случае возможны параметрическое усиление и параметрическая генерация волн при низкочастотной накачке. Наибольший выигрыш можно получить, когда частота сигнальной волны мала по сравнению с частотой накачки:  $\omega_2 \gg \omega_1$ , так как это позволяет продвинуться при усилении или генерации вверх по диапазону. Такая возможность существует, например, в релятивистском электронном пучке, скорость которого близка к скорости света. На рис. 2 показаны условия резонанса для взаимодействия двух электромагнитных волн и волны пространственного заряда в таком пучке (для простоты показана только ветка медленной волны пучка, имеющей отрицательную энергию). Дополнительная энергия для размножения энергичных (высокочастотных) квантов при этом черпается из пучка, в котором возбуждается волна отрицательной энергии.

Заметим, что в данном случае не следует заново решать уравнения для амплитуд волн. Формально решение данной задачи сводится к решению задачи о распаде волны в равно-

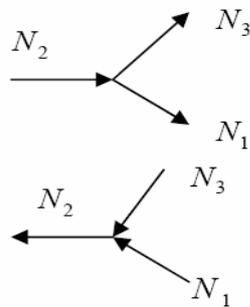


Рис. 1 Диаграммы изменения числа квазичастиц при  $s_1 s_{2,3} < 0$ . Верхняя диаграмма соответствует распаду НЧ-волны  $\omega_2$

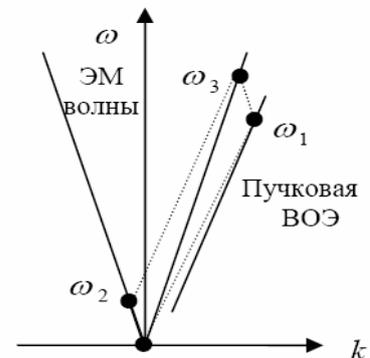


Рис. 2. Параметрическое усиление высокочастотной ЭМ волны  $\omega_3$  при низкочастотной накачке  $\omega_2 \ll \omega_3$  в релятивистском электронном потоке

весной среде с помощью простой замены переменных (фактически, – к изменению нумерации волн).

**Взрывная неустойчивость волн.** Наиболее нетривиальная ситуация возникает, когда высокочастотная волна имеет знак энергии, противоположный знакам энергии низкочастотных волн, например,  $s_3 = -1 < 0$ ,  $s_{1,2} = +1 > 0$ . В этом случае соотношения Мэнли-Роу принимают вид

$$N_3 - N_1 = C_1, \quad N_2 - N_3 = C_2, \quad N_1 - N_2 = C_3 \quad (3)$$

Диаграммы изменения числа квазичастиц показаны на рис. 3. Все волны одновременно растут, либо одновременно исчезают. На квантовом языке это процесс рождения трех квантов из ничего. Однако полная энергия волнового поля при этом сохраняется так как кванты  $\omega_3$  имеют отрицательную энергию.

Используя нормировки коэффициентов взаимодействия на единицу, получим уравнения для комплексных амплитуд вида

$$\frac{db_1}{dt} = b_2^* b_3, \quad \frac{db_2}{dt} = b_1^* b_3, \quad \frac{db_3}{dt} = b_2 b_1, \quad (4)$$

Ограничимся частным решением, когда все амплитуды действительны (фазы равны нулю) и одинаковы  $B_1(t) = B_2(t) = B_3(t) \equiv B(t)$ . Такое решение существует, поскольку в этом случае все три уравнения принимают один и тот же вид

$$\frac{dB}{dt} = B^2, \quad (5)$$

Решение уравнения первого порядка (5) легко находится и имеет вид

$$B = \frac{B(0)}{1 - \frac{t}{t_\infty}}, \quad t_\infty = \frac{1}{B(0)} \quad (6)$$

Амплитуды всех волн обращаются в бесконечность за конечное время (рис. 3). Поэтому  $t_\infty$  называется «временем взрыва», а сам процесс – взрывной неустойчивостью.

В чем механизм взрывного роста волн? Запишем выражения для относительной скорости роста при обычной экспоненциальной неустойчивости и при взрывной неустойчивости:

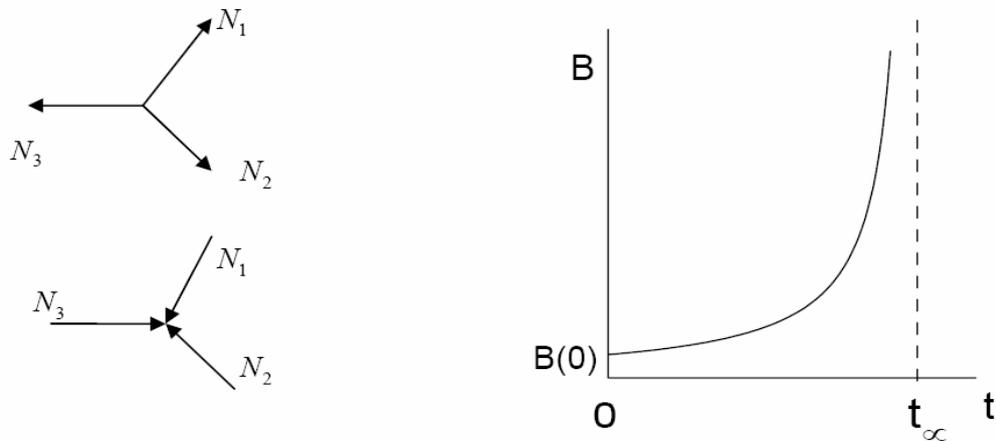


Рис. 3. Диаграммы изменения числа квазичастиц (а) и взрывной рост амплитуд волн во времени при  $s_3 \cdot s_{1,2} < 0$  (б).

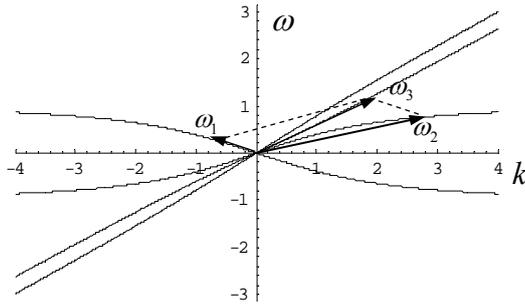


Рис. 4. Взрывная неустойчивость в плазменно–пучковой системе с редукцией пространственного заряда. Плазменные волны положительной энергии  $\omega_{1,2}$  резонансно связаны с медленной волной электронного пучка  $\omega_3$ , имеющей отрицательную энергию. Благодаря большой скорости пучка исключен линейный резонанс плазменной и пучковых волн

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = \gamma, \quad \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} = B, \quad (7)$$

В первом случае относительная скорости роста постоянна, тогда как во втором – она растет по мере увеличения амплитуды. Именно это ускорение скорости роста и дает взрыв. В связи с этим понятно, что взрывная неустойчивость по сути является нелинейной неустойчивостью.

В качестве примера трехволнового взаимодействия, приводящего к взрывной неустойчивости, на рис. 4 показано взаимодействие двух плазменных волн с волной отрицательной энергии в электронном потоке. Наиболее интересен случай, когда в ограниченном по сечению пучке скорость потока достаточно велика, поскольку при этом отсутствует линейная резонансная неустойчивость. Однако система остается неравновесной и нет ничего удивительного в том, что возникает новый тип неустойчивости – взрывная. Таким образом, взрывная неустойчивость как бы принимает эстафету от линейной резонансной неустойчивости при увеличении скорости потока. Именно через нее теперь реализуется способность неравновесной среды стремиться к равновесному состоянию через нарастание возмущений и последующей их диссипацией в тепло.

*Замечания.*

- 1) С точки зрения теории колебаний взрывная неустойчивость есть неустойчивость по нелинейному приближению, так как линеаризованное уравнение (5) имеет вид  $dB/dt = 0$ , откуда  $B(t) = const$ , т.е. решение нейтрально устойчиво. Из курса теории колебаний известно, что при наличии в линейном приближении нейтральной устойчивости следует переходить к исследованию неустойчивости в нелинейном приближении.
- 2) В действительности, конечно, амплитуды волн не могут вырасти до бесконечности. В лучшем случае закон взрывного роста может проявиться на определенном интервале времени, пока не нарушаются приближения, при которых получены амплитудные уравнения. Это может произойти при выходе за пределы приближения малой нелинейности или ограничение может наступить при учете каких-либо факторов уже в рамках приближения малой нелинейности. Именно механизм ограничения определяет максимальную скорость роста (нелинейный инкремент). При наличии в среде «конкурирующей» линейной неустойчивости взрывная неустойчивость может так и не достичь скорости роста этой неустойчивости (если раньше «сработают» механизмы ее ограничения). Поэтому всегда следует изучать вопрос о конкурентоспособности взрывной неустойчивости по сравнению и имеющимися в среде линейными неустойчивостями.

## 4.6 ЧЕТЫРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СРЕДАХ С КУБИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Для пояснения существа вопроса, рассмотрим модель консервативной нелинейной среды в виде  $LC$  – линии с нелинейной емкостью, которая пропорциональна квадрату напряжения. Для этого в телеграфных уравнениях (1) из п.4.2 положим  $C_{NL} = C_0 + \alpha u^2$ . Тогда уравнение (4) из п.4.2 принимает вид

$$D(\hat{\omega}, \hat{k})u = -\varepsilon i \hat{\omega} f_1 \quad \left( f_1 = \frac{1}{3} \alpha u^3 \right) \quad (1)$$

Ясно, что в данном случае в главную часть решения можно включить четыре волны, поскольку суммы показателей экспонент будут содержать три частоты и три волновых числа:

$$f_1 \sim u^3 = 6a_1 a_2 a_3 e^{i(k_1+k_2+k_3)x-i(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t} + 6a_1 a_2^* a_3 e^{i(k_1+k_2-k_3)x-i(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t} + \\ + 3a_1 a_1^* a_1 e^{i(k_1-k_1+k_1)x-i(\omega_1-\omega_1+\omega_1)t} + 6a_1 a_2^* a_2 e^{i(k_1+k_2-k_2)x-i(\omega_1+\omega_2-\omega_2)t} + \dots \quad (2)$$

где  $\omega_j = \omega(k_j)$  – частоты собственных волн среды. Как и раньше, считаем частоты волн, входящих в главную часть решения, положительными (напомним, что этому условию всегда можно удовлетворить). Анализируя показатели экспонент в правой части (2), можно выделить два типа четырехволновых резонансов

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = k_4 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} k_1 + k_2 = k_3 + k_4 \\ \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \end{cases}, \quad (3)$$

При положительных частотах они не сводятся один к другому с помощью простой замены обозначений (перенумерации волн). Соответствующие диаграммы распадов–слияний квазичастиц показаны на рис. 1. Для каждой из них нетрудно написать амплитудные уравнения и соотношения Мэнли–Роу. В отличие от трехволновых взаимодействий, когда в одномерной задаче для одной выбранной волны можно подобрать одну (или несколько) пар резонансных волн, в случае четырехволновых взаимодействий уже в одномерном случае для заданной волны можно найти континуум волн, удовлетворяющих условиям четырехволнового резонанса. В этом нетрудно убедиться с помощью векторных диаграмм, отображающих условия резонанса (см. п.4.1). Бывают ситуации, когда даже в двумерной задаче трехволновые резонансы отсутствуют (например, для гравитационных волн на воде). В этом случае говорят, что среда имеет нераспадные спектры волн. Тогда основными становятся четырехволновые резонансные взаимодействия.

Как видно из разложения (2), кубичная нелинейность создает комбинационные «нелинейные источники» с показателями экспонент, совпадающими с показателем одной из волн тождественно. Видно, в частности, что вторая и третья экспоненты переходят соот-

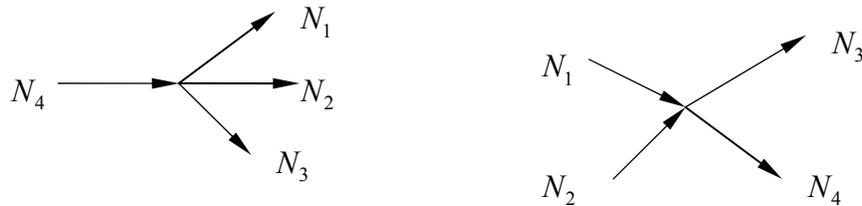


Рис. 1 Диаграммы четырехволновых взаимодействий в среде с кубичной нелинейностью

ветственно в  $\exp(ik_1x - i\omega_1t)$ , т.е. дают нелинейный источник, резонансный с первой волной. Условия резонанса в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} k_1 + k_1 - k_1 = k_1 & \left\{ k_1 + k_2 - k_2 = k_1 \right. \\ \omega_1 + \omega_1 - \omega_1 = \omega_1 & \left. \omega_1 + \omega_2 - \omega_2 = \omega_1 \right. \end{cases} \quad (4)$$

и выполнены тождественно (при любых  $\omega_{1,2}, k_{1,2}$ ). Такие взаимодействия волн называются нерезонансными или «несинхронными». На «квантовом» языке первому из условий (4) соответствует процесс слияния двух квантов волны  $(\omega_1, k_1)$  с рождением двух новых квантов этой же волны (см. вторую диаграмму на рис. 1), а второе условие (4) можно интерпретировать как слияние квантов волн  $(\omega_1, k_1)$  и  $(\omega_2, k_2)$  с рождением двух квантов этих же волн.

Очевидно, что процесс, определяемый первым условием (4), может протекать при наличии в среде всего одной волны. При этом для комплексной амплитуды этой волны получим уравнение вида

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = -iT|a_1|^2 a_1 \quad (5)$$

В данном случае говорят о *самовоздействии* волны  $a_1$ . Коэффициент  $T$  в общем случае комплексный. Однако в консервативной среде он должен быть вещественным в силу закона сохранения энергии. Действительно, умножая обе части (5) на  $a_1^*$  и складывая с комплексно сопряженным, получим

$$\frac{\partial |a_1|^2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial |a_1|^2}{\partial x} = 2(\text{Im} T)|a_1|^4 \quad (6)$$

Поскольку энергия пропорциональна  $|a_1|^2$ , закон сохранения энергии выполняется только при  $\text{Im} T = 0$ .

При вещественном  $T$  правая часть в (5) определяет нелинейную поправку к частоте волны. Чтобы понять это, выясним физический смысл величины

$$\Gamma = a_1^{-1} \partial a_1 / \partial t.$$

Комплексное поле в виде монохроматической волны с переменной амплитудой можно записать следующем виде

$$\begin{aligned} u &= a(x, t) \exp(ikx - i\omega t) = \exp(ikx - i\omega t + \ln a) = \\ &= \exp \left[ ikx - \int_0^t \left( i\omega - \frac{\partial \ln a}{\partial t} \right) dt + \ln(a_{10}) \right] = a_{10} \exp \left[ ikx - i \int_0^t \left[ \underbrace{\omega - \text{Im} \Gamma}_{\delta\omega_r} + i \underbrace{\text{Re} \Gamma}_{\delta\omega_i} \right] dt \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Величина  $\ln(a_{10})$ , где  $a_{10}(x) = a(0, x)$ , добавлена в экспоненту из условия, чтобы при  $t = 0$  первая формула во второй строке (7) давала то же самое, что исходное выражение для  $u$  в верхней строке. Теперь видно, что величины  $-\text{Im} \Gamma$  и величина  $\text{Re} \Gamma$  определяют локальные значения поправок к вещественной и мнимой части частоты волны (т.е. к частоте и инкременту волны соответственно). Например, для функции в виде экспоненты с постоянными показателями  $a = \exp(\gamma_1 t - i\gamma_2 t)$  получим очевидный результат:  $\text{Re} \Gamma = \gamma_1$  и  $-\text{Im} \Gamma = \gamma_2$ . При вещественном  $T$  из (5) имеем мгновенную добавку к частоте волны  $\delta\omega_{NL} = T|a_1|^2$ , которая зависит от времени и координаты пропорциональна квадрату модуля амплитуды. Этот частотный сдвиг иногда называют нелинейной дисперсией.

Будем искать решение (5) с начальными условиями  $a_1(0, x) = a_{10}(x)$ . Оно уравнение легко решается с помощью перехода к новым переменным  $x' = x - v_1 t$ ,  $t' = t$ , что соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью волны. Преобразование производных имеет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t'} \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{=1} + \frac{\partial a}{\partial x'} \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{v_1}, \quad \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial t'} \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial a}{\partial x'} \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{=1} \quad (8)$$

В результате (5) сводится к уравнению в обыкновенных производных

$$\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial t'} = -iT |\tilde{a}_1|^2 \tilde{a}_1, \quad (9)$$

Во избежании путаницы в (9) для  $a$  как функции  $t', x'$  введено новое обозначение  $\tilde{a}$ , то есть полагается  $\tilde{a}_1(t', x') = a_1(t, x) \equiv a_1(t', x' + v_1 t')$  (в литературе в подобных случаях новое обозначение для функции обычно не вводится, однако подразумевается, что с формальной точки зрения  $a_1(t, x)$  и  $a_1(t', x')$  – разные функции своих аргументов). Поскольку в (9) отсутствует дифференцирование по  $x'$ , уравнение (9) является обыкновенным дифференциальным уравнением, в котором неизвестная зависит от  $x'$ , как от параметра. При вещественном  $T$  для из (9) следует, что  $|\tilde{a}_1(t', x')|^2$  не зависит от  $t'$  (см. аналогично (6)). Тогда (9) сводится к линейному уравнению с постоянным коэффициентом  $-iT |\tilde{a}_1|^2 = const$ , решение которого можно записать в виде<sup>1</sup>

$$a_1 = \tilde{a}_1(0, x') \exp\left(-iT |\tilde{a}_1(0, x')|^2 t'\right) = a_{10}(x - v_1 t) \exp\left(-iT |a_{10}(x - v_1 t)|^2 t\right) \quad (10)$$

Согласно (10) точки начального профиля волны  $a_{10}(x)$  переносятся с групповой скоростью, однако для каждой из них имеется своя нелинейная добавка к частоте к частоте.

## ЧЕТЫРЕХВОЛНОВЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И САМОВОЗДЕЙСТВИЕ ВОЛН В КВАДРАТИЧНОЙ СРЕДЕ

В данном разделе мы не будем проводить детального рассмотрения и ограничимся пояснением существа вопроса. Допустим, что в квадратичной среде возбуждена одна волна. При использовании асимптотического метода для простейшей квадратичной нелинейности имеем уравнение для первой добавки

$$Lu^{(1)} \sim u^{(0)} u^{(0)} = a_1^2 e^{i(2k_1)x - i(2\omega_1)t} + k.c. + \dots \quad (11)$$

Оно содержит в правой части нелинейный источник в виде второй гармоники исходной волны. Допустим, что эта вторая гармоника не является собственной волной среды, т.е. условия вырожденного трехволнового резонанса не выполняются. Если ввести обозначения  $k' = 2k_1$ ,  $\omega' = 2\omega_1$ , отсутствие резонанса выражается условием  $\omega' \neq \omega(k')$  или, что то же самое,  $D(\omega', k') \neq 0$  (отличие от нуля велико по сравнению с  $\varepsilon$ ). В этом случае первая добавка на второй гармонике остается малой и находится явно. Для построения укороченных уравнений необходимо рассматривать члены порядка  $\varepsilon^2$ . Уравнение для второй добавки содержит в правой части член порядка  $\varepsilon^2$  разложения нелинейности:

$$Lu^{(2)} \sim 2u^{(1)}u^{(0)} = 2|a_1|^2 a_1 e^{ik_1 x - i\omega_1 t} + k.c. \quad (12)$$

Видно, что нелинейный источник оказывается резонансным с исходной волной, т.е. приводит к накапливающимся изменениям ее амплитуды. Это приводит к появлению следующего слагаемого в выражении для производной по времени

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} \sim \varepsilon^2 |a_1|^2 a_1 \quad (13)$$

На квантовом языке сказанное можно интерпретировать последовательность двух процессов, протекающих одновременно. 1) Слияние одинаковых квантов волны  $k_1, \omega_1$  с рождени-

<sup>1</sup> При выполнении преобразований следует учесть, что  $t', x'$  – пара независимых переменных. Поэтому задание  $t' = 0$  не может налагать каких либо условий на другую независимую переменную  $x'$ .

ем «виртуальной» второй гармоники ( $\omega_2 = 2\omega_1, k_2 = 2k_1$ ), которая не является собственной и поэтому остается на слабом уровне (отсюда название – виртуальная). 2) Индуцированный (присутствием основной волны) распад второй гармоники на два кванта основной волны, для которого условия трехволнового резонанса выполнены тождественно:  $k_2 - k_1 = k_1, \omega_2 - \omega_1 = \omega_1$ . Эта последовательность равнозначна вырожденному четырехволновому взаимодействию вида  $k_1 + k_1 - k_1 = k_1, \omega_1 + \omega_1 - \omega_1 = \omega_1$  или, что то же самое, – са-



Рис. 1 Диаграммы четырехквантовых процессов с рождением виртуальных комбинационных гармоник, протекающих в квадратичной среде: (а) – самовоздействие волны через виртуальную вторую гармонику, (б) – невырожденное четырехволновое взаимодействие

мовоздействию волны  $k_1, \omega_1$  в кубичной среде (см. рис. 1, а).

Для простоты мы рассмотрели случай одной волны. Очевидно, что если теперь взять набор волн, удовлетворяющих условиям четырехволнового резонанса, то в среде с квадратичной нелинейностью во втором приближении метода возмущений появятся такие же комбинационные гармоники, которые дает кубичная нелинейность. Этот процесс можно интерпретировать как два одновременно протекающих трехволновых процесса типа распада-слияния с рождением виртуальной комбинационной гармоники. В качестве примера на рис. 1, б показан четырехквантовый процесс с условиями резонанса  $k_1 - k_2 = k_4 - k_3, \omega_1 - \omega_2 = \omega_4 - \omega_3$ )

Таким образом, в квадратичной среде во втором приближении возможно четырехволновое взаимодействие и самовоздействие волн. Может оказаться, что трехволновые резонансы в квадратичной среде вообще отсутствуют (реализуется «нераспадный» спектр волн). Тогда во втором приближении возможны четырехволновые взаимодействия, которые полностью аналогичны таковым в среде с кубичной нелинейностью. Мы приходим к важному выводу, что в квадратичной среде возникают эффекты кубичной нелинейности, которые проявляются во втором порядке по малому параметру нелинейности.

В квадратичной среде возможен еще один новый эффект – рождение средних полей второго порядка по амплитуде, который может рассматриваться как аналог известного в радиотехнике эффекта детектирования, известного в радиотехнике. Он также приводит к самовоздействию волн, которое можно интерпретировать как два одновременно протекающих трехволновых процесса с рождением виртуальной нулевой гармоники. Об этом мы поговорим на следующих лекциях.

## 4.7 ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В СРЕДАХ С ДИССИПАТИВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В слабо диссипативной среде потери энергии волн и связанное с ними затухание малы. До сих пор мы рассматривали только «линейные» потери энергии волн, которые проявляются в наличии  $\text{Im } \omega \neq 0$ . Однако возможен специфический вид потерь, при которых параметры потерь зависят от полей. Простейший пример в электродинамике – зависимость проводимости от электрического поля. Практический интерес представляет ситуация, когда нелинейные потери могут компенсироваться усилением (активная среда).

Рассмотрим в качестве примера активной среды с диссипативной нелинейностью распределенную  $LC$  – линию, нагруженную туннельными диодами (ТД), на которые подано постоянное напряжение смещения  $U_0$ . На рис. 1 показана электрическая схема звена такой линии с постоянными емкостью и индуктивностью и вольт–амперная характеристика (ВАХ) ТД  $J_d(U)$ . Уравнения Кирхгофа запишем для отклонений тока и напряжения от значений в рабочей точке

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \tilde{J}_d(u), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (1)$$

Исключая из (1) ток  $I$ , получим одно уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\varepsilon}{C} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{J}_d(u) \quad \left( V_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \quad (2)$$

где  $u = U - U_0$  – отклонение напряжения от значения в рабочей точке,  $\tilde{J}_d(u) = J_d(U_0 + u) - J_d(U_0) = gu - bu^2 + \beta u^3$  – отклонение тока от значения в рабочей точке

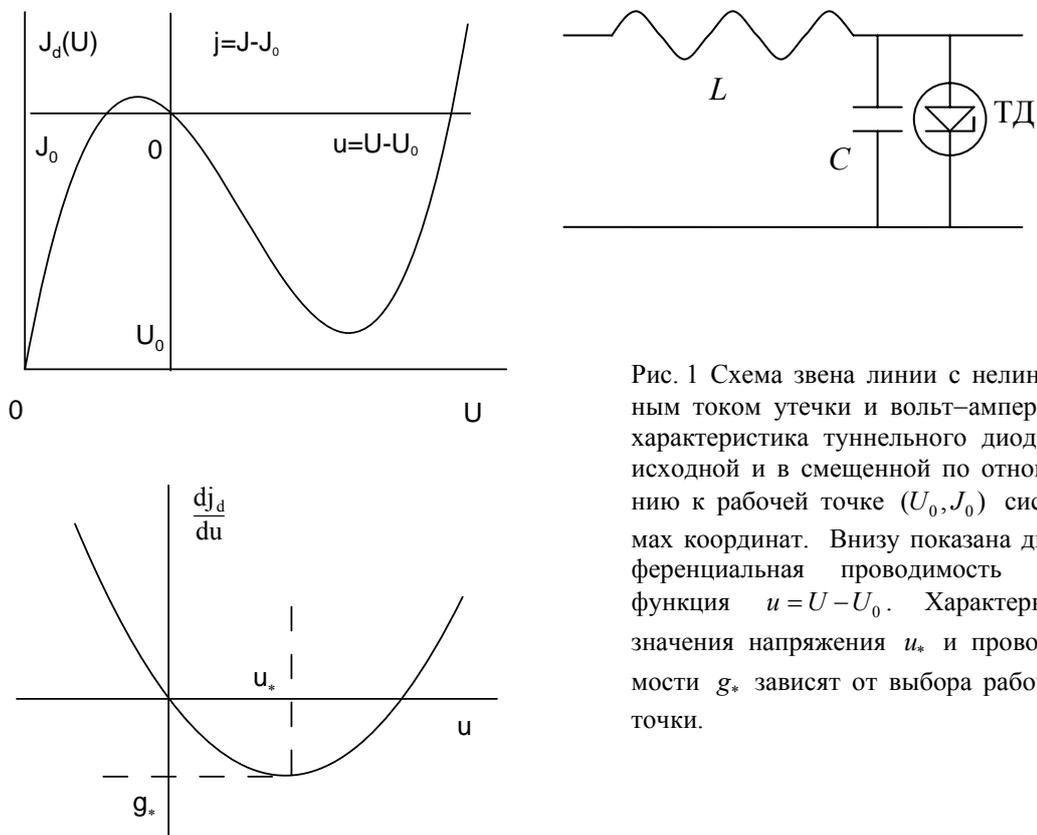


Рис. 1 Схема звена линии с нелинейным током утечки и вольт–амперная характеристика туннельного диода в исходной и в смещенной по отношению к рабочей точке  $(U_0, J_0)$  системах координат. Внизу показана дифференциальная проводимость как функция  $u = U - U_0$ . Характерные значения напряжения  $u_*$  и проводимости  $g_*$  зависят от выбора рабочей точки.

ке. Постоянное напряжение смещения  $U_0$  определяет положение рабочей точки на ВАХ. При качественном исследовании обычно ограничиваются аппроксимацией ВАХ ТД полиномом третьей степени, которая приведена выше ( $b, \beta > 0$ ). При  $g > 0$  и  $g < 0$  рабочая точка находится соответственно в области положительной и отрицательной дифференциальной проводимости (на рис. 1 показан случай отрицательной дифференциальной проводимости). На этом же рисунке приведена также зависимость дифференциальной проводимости от напряжения, построенная при  $g = 0$  (рабочая точка на вершине ВАХ). На ней отмечены «характерные» значения напряжения  $u_* = b/(3\beta)$  и проводимости  $g_* = -b^2/(3\beta)$ . В каком смысле эти значения можно считать характерными? Ответ в том, что интересующий нас диапазон изменения  $u$  – величина порядка  $u_*$  и соответственно проводимость сравнима с  $g_*$ .

Когда влияние нелинейной проводимости на распространение волн в линии становится малым, т.е. среда является слабо диссипативной? Ясно, что ток утечки в туннельный диод должен быть мал по сравнению с реактивной составляющей тока, ответвляющейся в реактивную проводимость  $|Y| = \omega C(\omega)$ . Это условие принимает вид  $g_*/\omega C \sim \varepsilon \ll 1$ . Фактически это малый параметр задачи, который можно выделить в уравнениях явно путем перехода к нормированным переменным. Мы не будем выделять этот параметр явно и ограничиваемся вводом символического (фиктивного) малого параметра  $\varepsilon$ , который стоит в уравнениях (1), (2) при токе утечки. Подчеркнем, что в данном случае параметр не связан непосредственно с малостью возмущений (как это было до сих пор), т.е. нелинейная проводимость может включать в себя сравнимые по порядку величин квадратичную и кубическую нелинейные составляющие.

**Свойства трехволновых резонансных взаимодействий в средах с квадратичной диссипативной нелинейностью.** Для упрощения анализа рассмотрим вырожденное трехволновое взаимодействие – резонансное взаимодействие волны со второй гармоникой:

$$2k_1 = k_2, \quad 2\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega \quad (3)$$

где  $\omega_j = \omega(k_j)$  – частоты собственных волн. Взаимодействие волн (3) можно реализовать в линии с высокочастотной дисперсией, которая может определяться дискретностью элементов линии или включением емкости параллельно индуктивности в рамках распределенной модели. Условия резонанса показаны на рис. 2. Малой расстройкой от резонанса

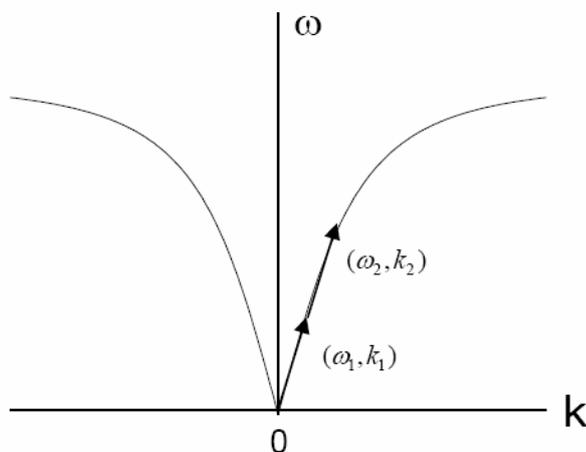


Рис. 2 Условия резонанса между волной  $(\omega_1, k_1)$  и ее второй гармоникой в LC-линии с дисперсией в области высоких частот

$\Delta\omega = 2\omega_1 - \omega_2 > 0$ , которая неизбежно появляется в данном случае, будем пренебрегать. В то же время нарастание третьей гармоники  $(3k_1, 3\omega_1)$  отсутствует, так как при достаточно больших  $\omega_1$  ее частота сильно отличается от частоты собственной волны. Иначе говоря, условия резонанса для ее возбуждения не выполнены, т.е.  $\omega_1 + \omega_2 \neq \omega(k_3)$  при  $k_3 = k_1 + k_2$ . Фактически в интервале от нуля до  $2k_1$  можно полностью пренебречь дисперсией, т.е. положить в уравнениях диспергирующей линии  $L(\omega) = L = const$ ,  $C(\omega) = C = const$ . Это позволяет применять асимптотический метод непосредственно к уравнению (2). Кроме того, в укороченных уравнениях сделаем нормировки через характерные значения, указанные выше

$$a_{jнов.} = \frac{a_j}{u_*} = \frac{3\beta}{b} a_j, \quad \tau = \frac{b^2 t}{6C\beta}. \quad (4)$$

Отметим, что с помощью аналогичных нормировок в исходных уравнениях можно выделить в них малый параметр в явном виде. Опуская индекс «нов.», получим укороченные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= 2a_1^* a_2 - (|a_1|^2 + 2|a_2|^2)a_1 + \nu a_1, \\ \frac{da_2}{dt} &= a_1^2 - (|a_2|^2 + 2|a_1|^2)a_2 + \nu a_2, \end{aligned} \quad \left( \nu = -\frac{3\beta g}{b^2} \right) \quad (5)$$

Кроме членов резонансной связи гармоник в эти уравнения вошли члены нерезонансного взаимодействия и самовоздействия волн (см. п.4.6).

Если  $\nu = 0$  и амплитуды малы, то кубичными членами можно пренебречь. В этом случае из (5) получаем уравнения взрывного взаимодействия, рассмотренные в п.4.5. Таким образом, при нелинейной утечке, квадратичной по полю, *возникает взрывная неустойчивость волн положительной энергии*. Причина состоит в том, что квадратичный участок ВАХ (см. рис. 1) всегда имеет область с отрицательной дифференциальной проводимостью, в которой поле волн черпает энергию из источника, выводящего ВАХ туннельного диода на квадратичный участок.

Чтобы учесть линейное затухание и кубичные потери. Ограничимся частным классом решений, когда все амплитуды вещественны (фазы волн тождественно равны нулю). Тогда уравнения (5) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= 2A_1 A_2 - (A_1^2 + 2A_2^2)A_1 + \nu A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} &= A_1^2 - (A_2^2 + 2A_1^2)A_2 + \nu A_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Эту систему второго порядка можно исследовать на фазовой плоскости. Наглядный вид имеет зависимость стационарной амплитуды от инкремента линейной неустойчивости  $\nu$  (рис. 3,а). В области  $\nu < 0$  (когда волны затухают – рабочая точка левее максимума на ВАХ диода) имеем два состояния равновесия. Меньшее значение равновесной амплитуды соответствует порогу возбуждения, большее – устойчивому состоянию равновесия. При больших по величине отрицательных  $\nu$  состояния равновесия отсутствуют, т.е. неустойчивость в системе подавлена полностью. Фазовая плоскость для области жесткого возбуждения  $-0.232 < \nu < 0$  показана на рис. 3,б. На этой плоскости «вертикальная» сепаратриса седла отделяет область затухания возмущений от области их нарастания из-за взрывной неустойчивости. Взрывная неустойчивость ограничивается кубичной нелинейностью, которая дает состояние равновесия типа устойчивый узел. Фазовая плоскость в области линейной неустойчивости ( $\nu > 0$ ) отличается от приведенной на рис. 3б тем, что на ней седло находится в начале координат (поглощает устойчивый узел). При этом в системе скачкообразно возникает генерация волн с конечной амплитудой.

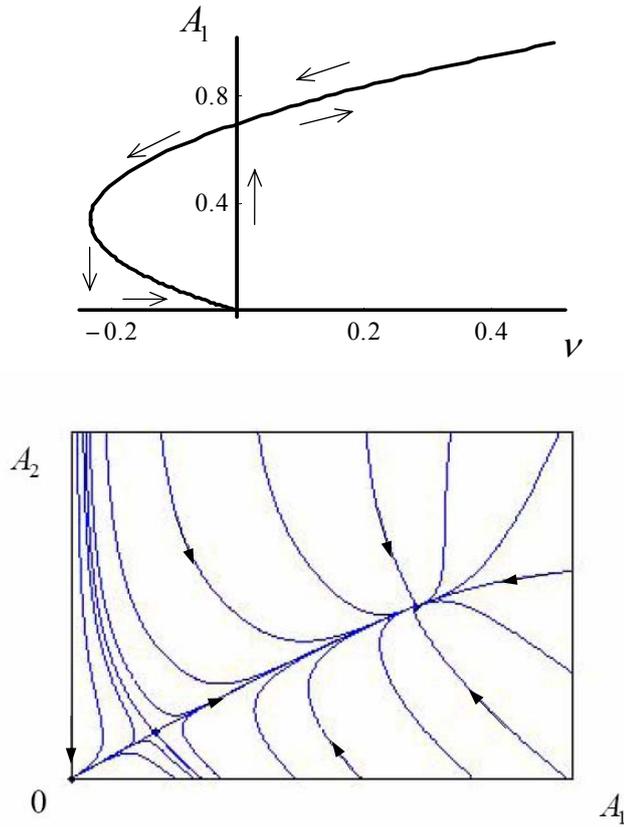


Рис. 3. (а) – Диаграмма стационарных значений амплитуды  $A_1$  при взрывной неустойчивости волн положительной энергии в  $LC$ –линии с нелинейной утечкой (вырожденное трехволновое взаимодействие). Стрелками показано направление изменения стационарной амплитуды при увеличении и последующем уменьшении параметра  $\nu$  (петля гистерезиса); (б) – Фазовая плоскость в случае жесткого (докритического) возбуждения волн ( $\nu < 0$ )

Таким образом, *взрывная неустойчивость* при резонансном взаимодействии волн *может приводить к их жесткому возбуждению*. Если искать аналоги в теории колебаний сосредоточенных систем, можно привести пример генератора с жестким возбуждением, который описывается уравнением вида

$$\frac{dA}{dt} = \alpha_1 A + \alpha_3 A^3 - \alpha_5 A^5 \quad (7)$$

Жесткое возбуждение возникает при  $\alpha_{3,5} > 0$ ,  $\alpha_1 < 0$  и достаточно малом  $|\alpha_1|/\alpha_3$ . Если амплитуды малы ( $A^2 \ll \alpha_3/\alpha_5$ ), последним членом можно пренебречь и при  $\alpha_1 = 0$  для  $I = A^2$  получим знакомое уравнение взрывной неустойчивости. Член  $\sim A^5$  в данном случае определяет ограничение «взрыва» и установление стационарной амплитуды. Диаграмма стационарных состояний качественно имеет такой же вид как рассмотренный выше (рис. 3а). Порог возбуждения по амплитуде определяется неустойчивым состоянием равновесия. Таким образом, при квадратичной диссипативной нелинейности качественно картина такая же как для модели генератора с жестким возбуждением колебаний. Отличие лишь в механизме подкачки энергии. В рассмотренной выше волновой задаче энергия подводится к волнам благодаря их резонансной связи через квадратичную нелинейность диссипативного типа. Подчеркнем, что ограничение взрывной неустойчивости в данном случае происходит в пределах применимости метода малого параметра, то есть при медленно меняющихся амплитудах волн.

Приведенный пример – простейший случай диссипативной нелинейности. В более сложных системах не просто определить характер нелинейности. Фактически это позволяет сделать расчет коэффициентов взаимодействия волн. Важный пример взрывной неустойчивости, возникающей при трехволновом взаимодействии, – вихревые волны Толмина–Шлихтига, которые наблюдаются при переходе от ламинарного течения к турбулентному в течениях типа пограничного слоя.

## 4.8 КОНКУРЕНЦИЯ ВОЛН В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

**Конкуренция однородных волн во времени или попутных волн в пространстве.** Рассмотрим нерезонансное (энергетическое) взаимодействие двух волн. Как отмечалось ранее, результат взаимодействия в этом случае не зависит от фаз волн. В среде с диссипативной нелинейностью волны управляют усилением или затуханием друг друга и своим собственным через зависимость скорости роста от квадратов модулей комплексных амплитуд (интенсивностей). Будем считать, что обе волны находятся в области линейной неустойчивости среды ( $\text{Im } \omega_{1,2} > 0$ ). Тогда после соответствующего нормирования амплитуд уравнения для интенсивностей  $m_{1,2} \sim |a_{1,2}|^2$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} &= h_1 [1 - (m_1 + \rho_1 m_2)] m_1, \\ \frac{\partial m_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial m_2}{\partial x} &= h_2 [1 - (m_2 + \rho_2 m_1)] m_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V_{1,2}$  – групповые скорости волн,  $\rho_1, \rho_2 > 0$  – коэффициенты связи,  $h_{1,2} > 0$  – инкременты линейной неустойчивости. Ранее такие уравнения были выведены для волн в линии с туннельными диодами (если вывести рабочую точку на середину падающего участка ВАХ, остается только кубичная нелинейность, либо резонансное взаимодействие исключено законом дисперсии). Подобные уравнения описывают взаимодействие волн в лазерах, в электронных приборах, использующих принцип бегущей волны, динамику популяций и даже реагентов в химических реакциях.

При одинаковых знаках групповых скоростей волн (попутные волны) эволюция  $m_{1,2}$  во времени или их развитие в пространстве в направлении от источника протекают одинаково (стационарная задача сводится к временной, если разделить обе части уравнений на групповые скорости и сделать замену  $x \leftrightarrow t$ ).

Рассмотрим для определенности эволюцию пространственно однородных волн во времени (конкуренцию двух достаточно разнесенных по волновому числу мод в резонаторе), полагая в (1)  $\partial/\partial x \rightarrow 0$ . Для решения задачи воспользуемся методом фазовой плоскости. Данная система уравнений имеет следующие состояния равновесия:

$$1) \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} m_1 = (1 - \rho_1)(1 - \rho_1 \rho_2)^{-1} \\ m_2 = (1 - \rho_2)(1 - \rho_1 \rho_2)^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

Четвертое состояние равновесия существует только в областях *I* и *IV* на рис. 1, поскольку только в этих областях оба значения  $m_{1,2} \geq 0$  (в областях *II* и *III*  $m_{1,2}$  имеют разные знаки независимо от того, по какую сторону расположена точка относительно кривой  $\rho_2 = 1/\rho_1$ ).

Фазовые портреты системы (1) показаны на рис. 2. В случае слабой связи ( $\rho_{1,2} < 1$ ) в зависимости от начальных условий реализуется режим генерации одной волны – см. рис. 2-*I*. Результат отбора волн определяется соотношением их начальных амплитуд. Когда связь сильная ( $\rho_{1,2} > 1$ ), устойчивым оказывается режим с возбуждением обеих волн одновременно (рис. 2-*IV*). Таким образом, сильное взаимодействие как бы привязывает волны друг к другу и препятствует исчезновению одной из них. В случае асимметричной связи (рис. 2-*II, III*) независимо от начальных амплитуд устанавливается одноволновый режим, так как одна из волн всегда получает преимущество за счет более благоприятных

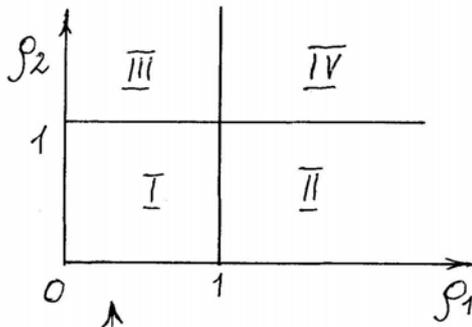


Рис. 1 Разбиение плоскости параметров системы (1) на области с качественно различным поведением фазовых траекторий

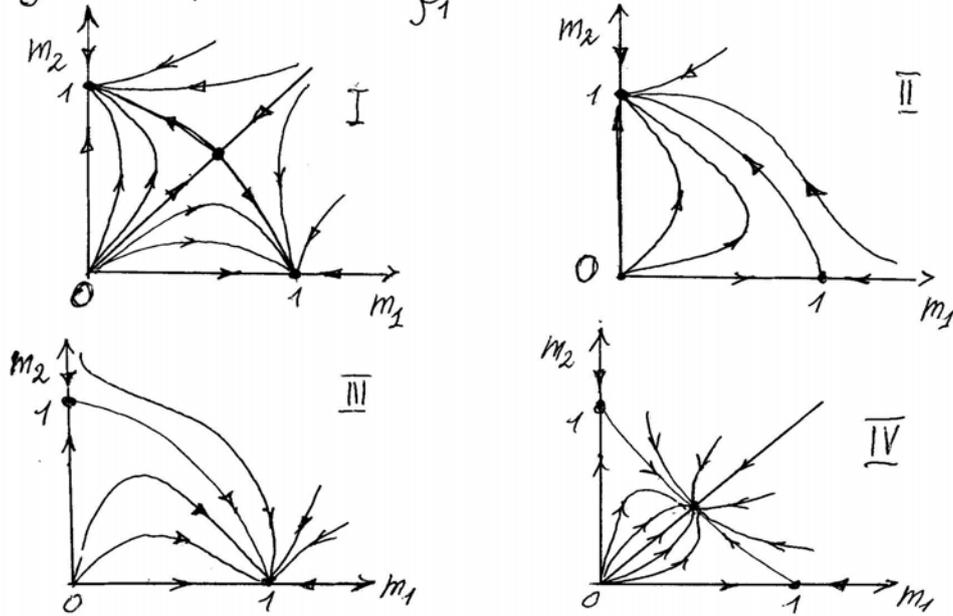


Рис. 2 Фазовые портреты системы (1) для различных областей параметров, показанных на рис. 1

условий для нарастания. Процесс взаимодействия волн, который приводит к их отбору (селекции) называется конкуренцией волн. При этом динамическая система уравнений для интенсивностей волн характеризуется множественностью стационарных режимов генерации (свойство мультистабильности).

### Конкуренция встречных волн в резонаторе.

Конкуренции встречных волн соответствуют разные знаки групповых скоростей в (1). Пусть для определенности  $V_1 > 0, V_2 < 0$  и ограничимся случаем взаимной связи:

$$\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho, \quad V_1 > 0, \quad V_2 = -|V_2| < 0 \quad (3)$$

(например, в длинной линии с нелинейной утечкой  $\rho = 2$ ). Тогда в четвертом состоянии равновесия (2) получим  $m_{1,2} = 1/(1 + \rho)$ . Фазовые портреты системы (1) при  $\partial/\partial t \rightarrow 0$  представлены на рис. 3. Отметим, что в переходном вырожденном случае ( $\rho \rightarrow 1 - 0$ ) происходит слияние сепаратрис, показанных на рис. 3,б.

Как использовать полученные фазовые портреты для определения поля в резонаторе? Для этого необходимо найти решения, которые удовлетворяют граничным условиям. До-

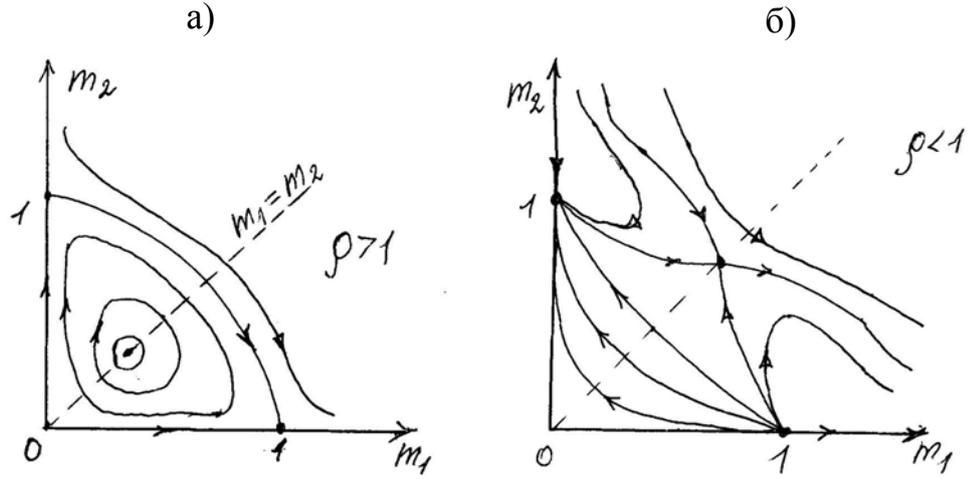


Рис. 3 Фазовые портреты стационарных распределений поля при конкуренции встречных волн в случае сильной (а) и слабой (б) связи

пустим, что на границах имеет место идеальное отражение. Тогда  $m_1 = m_2$  при  $x = 0$  и при  $x = L$ , где  $L$  – длина резонатора. Поэтому следует выбрать те фазовые траектории, которые начинаются и заканчиваются на биссектрисе  $m_1 = m_2$ . При слабой связи ( $\rho < 1$ ) этому условию удовлетворяет только состояние равновесия типа седло (рис. 3б). При этом в резонаторе всегда устанавливается однородный режим генерации. При сильной связи ( $\rho > 1$ , рис. 3,а) возникает другая возможность, связанная с наличием замкнутых траекторий. Траектория должна начинаться и заканчиваться на биссектрисе и при движении по координата  $x$  должна изменяться на величину, равную длине резонатора  $L$ .

Линеаризуем систему для отклонений от состояния равновесия типа центр. Полагая  $m_{1,2} = (1/(\rho + 1)) + \tilde{m}_{1,2}$  и рассматривая решения  $\sim \exp(px)$ , приходим к квадратному характеристическому уравнению для  $p$ , решения которого в частном случае  $V_1 = |V_2| = V$ ,  $h_1 = h_2 = h$  имеют вид

$$p = \pm (h/V) \sqrt{(1 - \rho)/(1 + \rho)} \quad (4)$$

При  $\rho > 1$   $p$  чисто мнимое и определяет период обращения траекторий вокруг центра в его малой окрестности. Поскольку период обращения возрастает при удалении от центра, можно указать необходимое условие реализации замкнутых траекторий в резонаторе. Оно состоит в том, что  $L$  должно быть больше половины минимального периода:

$$L > \frac{\pi V}{h} \sqrt{\frac{1 + \rho}{1 - \rho}} \quad (5)$$

Таким образом, мы пришли к нетривиальному результату: неоднородные распределения возможны только в достаточно длинном резонаторе. Чем длиннее резонатор, тем более неоднородное распределение поля может быть в нем реализовано. Это иллюстрируется на рис. 4 результатами численного решения уравнений (1) (на левой границе задавалось  $m_1(0) = m_2(0) = 0.1$ , а ограничение (5) на  $L$  принимает вид  $L > 5.44$ ). Вычисления показывают, что граничное условие на правой границе  $m_1 = m_2 = 0.48$  впервые выполняется при длине резонатора  $L = 7.45$ , которая действительно больше критического значения 5.44. В

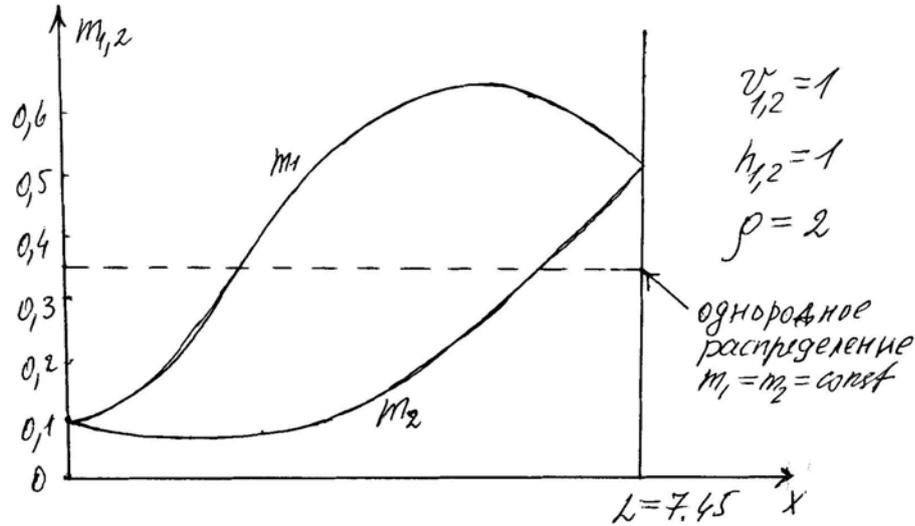


Рис. 4 Режим бегущей волны, возникающий в результате конкуренции двух встречных волн при сильной связи ( $\rho > 1$ )

представленном примере в основной части резонатора фактически реализуется режим бегущей волны ( $m_1$  доминирует). В достаточно длинных резонаторах возможны также осциллирующие распределения поля, которым соответствует полное или многократное обращения фазовой траектории вокруг центра.

Возникает вопрос: не противоречит ли полученное решение тому, что среда изотропна, т.е. в ней нет выделенного направления распространения волн? Ответ состоит в том, что решению с преобладанием прямой бегущей волны можно поставить в соответствие симметричное распределение поля с преобладанием встречной волны, которому соответствует обращение вокруг центра по второй половине замкнутой фазовой траектории. Их реализация зависит от начальных условий

В случае кольцевого резонатора граничные условия принимают вид  $m_1(0) = m_1(L)$ ,  $m_2(0) = m_2(L)$ . В данном случае следует выбрать фазовые траектории, которые начинаются и заканчиваются в одной и той же точке на плоскости  $(m_1, m_2)$  и характеризуются приращением независимой переменной, равным длине резонатора. Таким образом, допускается произвольный фазовый сдвиг биений вдоль кольца.

Проведенный анализ легко обобщается для резонатора с двумя отражающими границами  $x = 0, L$ . Граничные условия в этом случае имеют вид  $m_1 = r_1 m_2$  при  $x = 0$  и  $m_2 = r_2 m_1$  при  $x = L$ , где  $r_{1,2} < 1$  – коэффициенты отражения по мощности. Они отображаются на фазовом портрете рис. За двумя прямыми, имеющими коэффициенты наклона  $r_2 < 1$  и  $1/r_1 > 1$ . Соответственно следует выбирать фазовую траекторию, которая начинается на линии  $m_1 = r_1 m_2$  и заканчивается на линии  $m_2 = r_2 m_1$ . Координата  $x$  на такой траектории также должна изменяться на величину  $L$ .

#### 4.9 РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СПЕКТРАЛЬНО УЗКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ (МОДУЛИРОВАННЫХ ВОЛН)

До сих пор мы ограничивались рассмотрением элементарных нелинейных взаимодействий с участием трех пространственно однородных волн (мод свободного пространства или кольцевого резонатора) либо аналогичных процессов стационарного взаимодействия трех волн в пространстве. Теперь перейдем к рассмотрению более сложного процесса – взаимодействия пространственно локализованных волн. На спектральном языке это узкие волновые пакеты пространственных гармоник.

Рассмотрим эффект захвата (пленения) слабых волн импульсом накачки, который имеет важное значение для понимания особенностей резонансного взаимодействия локализованных волн. Для одномерной задачи в приближении заданного поля волны накачки имеем уравнения

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + V_3 \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = \sigma_2 a_1^* a_3. \quad (1)$$

После перехода в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью импульса накачки  $V_3$  (см. предыдущие лекции), получим следующие уравнения (для координаты и времени сохраним прежние обозначения)

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial a_1}{\partial x} = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial a_2}{\partial x} = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (2)$$

где  $u_1 = V_1 - V_3$ ,  $u_2 = V_3 - V_2$ . Необходимое условие, обеспечивающее возможность захвата (пленения) слабых волн импульсом накачки, состоит в том, что по отношению к импульсу накачки слабые волны распространяются в разные стороны. Для системы (2) оно записывается как  $u_1 > 0$  и  $u_2 > 0$ . В сопутствующей накачке системе отсчета, в которой записаны уравнения (2), получаем стационарный профиль накачки:  $a_3 = a_{30}(x)$ . Далее будем рассматривать прямоугольный импульс накачки, формально удовлетворяющий гиперболическому уравнению для  $a_3$  несмотря на наличие скачков. Для определенности остановимся на случае равновесной консервативной среды, когда распадной является волна наибольшей частоты. При этом выполнено условие  $\sigma_1 \sigma_2^* > 0$  (см. предыдущие лекции).

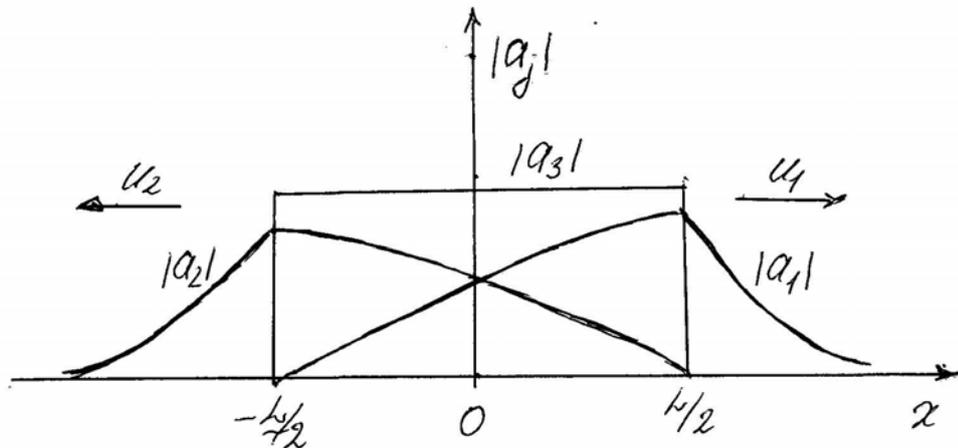


Рис. 1 Иллюстрация к эффекту захвата слабых волн импульсом накачки (конфигурация поля в системе отсчета, сопровождающей импульс накачки при нарастании амплитуд слабых волн)

Предполагаемое распределение поля внутри импульса накачки показано на рис. 1. Качественный анализ процесса взаимодействия волн позволяет предположить, что внутри импульса накачки может возникнуть самоподдерживающееся перекрытие полей всех волн. Поскольку волна  $a_1$  в этой области при взаимодействии с накачкой генерирует волну  $a_1$ , а волна  $a_2$  генерирует  $a_1$ , возникает положительная обратная связь через встречные волны, которая создает условия для развития неустойчивости. За пределами импульса накачки с каждой стороны остается одна из волн, уносящая энергию из области взаимодействия. Если внутри импульса накачки поле нарастает, то поля уходящих волн в соответствии с принципом причинности должны спадать при удалении от импульса накачки.

Попробуем теперь построить решение данной задачи. Рассматривается линейная система, которая включает в себя второе и третье уравнения (2) с фиксированным профилем накачки  $a_3 = a_{30}(x)$ . Используя метод разделения переменных, будем искать решение в виде

$$a_1 = a_{10} \exp(\Gamma t) f_1(x), \quad a_2 = a_{20} \exp(\Gamma^* t) f_2(x), \quad (3)$$

где  $\Gamma$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{20}$  – комплексные постоянные,  $f_{1,2}$  – неизвестные функции. Поскольку при  $|x| > L/2$  накачка отсутствует ( $a_3 = 0$ ) имеем в этой области пару уравнений  $\Gamma f_1 + u_1 f_1' = 0$  и  $\Gamma^* f_2 - u_2 f_2' = 0$ . Будем искать конфигурации волнового поля, обладающие конечной энергией. Тогда следует взять исчезающие на бесконечности решения этих уравнений, которые имеют вид (см. рис. 1)

$$\begin{aligned} f_1 &= C_1 \exp(-\Gamma x/u_1), \quad f_2 = 0 \quad (x > L/2), \\ f_2 &= C_2 \exp(\Gamma^* x/u_2), \quad f_1 = 0 \quad (x < -L/2), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $C_{1,2} = \text{const}$  и предполагается, что  $\text{Re}(\Gamma) > 0$  (именно этот случай, когда возникает неустойчивость, нас интересует в первую очередь).

Амплитуда накачки постоянна в области  $-L/2 < x < L/2$ . Поэтому легко выразить  $f_2$  через  $f_1$

$$f_2^* = \frac{a_{10}}{\sigma_1 a_{20}^* a_3} (\Gamma f_1 + u_1 f_1'). \quad (5)$$

и перейти к одному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами для  $f_1$ :

$$f_1'' - \frac{\Gamma(u_1 - u_2)}{u_1 u_2} f_1' + \frac{\Gamma_0^2 - \Gamma^2}{u_1 u_2} f_1 = 0, \quad (6)$$

где  $\Gamma_0 = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2^*} |a_3|$  – инкремент развивающейся во времени параметрической неустойчивости в поле однородной по всему пространству накачки (см. предыдущие лекции). В равновесной среде подкоренное выражение положительное и  $\Gamma_0$  – положительное вещественное число. Решение (6) представляется в виде  $f_1 = \bar{C}_1 \exp(p_1 x) + \bar{C}_2 \exp(p_2 x)$ , где  $\bar{C}_{1,2}$  произвольные постоянные. При этом показатели экспонент имеют вид

$$p_{1,2} = \frac{\Gamma(u_1 - u_2)}{2u_1 u_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\underbrace{\frac{\Gamma^2(u_1 + u_2)^2}{u_1^2 u_2^2} - \frac{4\Gamma_0^2}{u_1 u_2}}_{i\delta_0}} \quad (7)$$

Используя (2), можно показать, что амплитуды волн и, следовательно, функции  $f_{1,2}$  непрерывны на краях импульса накачки, т.е. выполняются соотношения  $f_{1,2}(L/2+0) = f_{1,2}(L/2-0)$ ,  $f_{1,2}(-L/2-0) = f_{1,2}(-L/2+0)$ . Эти четыре условия сшивки решений на границах импульса накачки дают четыре однородных линейных уравнения

для определения  $C_{1,2}$  и  $\bar{C}_{1,2}$ . Порядок этой системы уравнений легко понизить до второго, выразив  $C_{1,2}$  через  $\bar{C}_{1,2}$ . Из условия существования нетривиальных решений (обращение определителя в ноль) получаем характеристическое уравнение для определения инкремента  $\Gamma$ . Его решение можно представить в виде

$$\Gamma = -\frac{2u_1u_2}{(u_1 + u_2)L} \delta \operatorname{ctg}(\delta), \quad \sin(\delta) = \pm \frac{\delta}{m}, \quad (8)$$

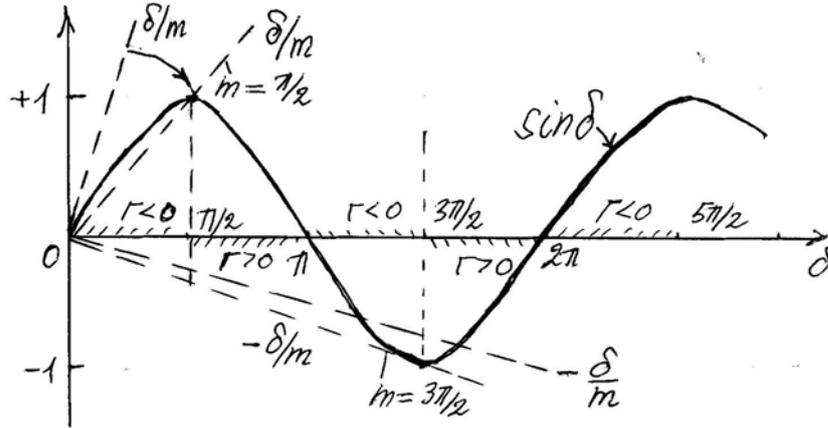


Рис. 2 Графическое определение действительных корней характеристического уравнения. На оси  $\delta$  показаны области с положительными и отрицательными значениями инкремента как функции  $\delta$

где  $m = \Gamma_0 L / \sqrt{u_1 u_2}$  и  $\delta$  – безразмерные параметры ( $\delta = \delta_0 L$  – см. формулу (7)). В первой формуле (8)  $\delta$  следует рассматривать как вспомогательный параметр, который определяется из трансцендентного уравнения (вторая формула в (8)) и зависит только от  $m$ .

Действительные корни трансцендентного уравнения для  $\delta$  можно найти графически (рис. 2). Достаточно рассмотреть интервал  $\delta > 0$ , поскольку  $\Gamma$  является четной функцией  $\delta$ . При малых  $m < 1$  отсутствует пересечение прямой  $F = \delta/m$  и синусоиды. Действительное решение для  $\delta$  появляется только при  $m > 1$ . Поскольку знак  $\Gamma$  совпадает со знаком функции  $[-\delta \operatorname{ctg}(\delta)]$  при увеличении  $m$  сначала получаем отрицательные значения инкремента. Они не должны рассматриваться согласно принятым при выводе ограничениям. Решения с отрицательными  $\Gamma$  в искомом виде решения просто не существуют. Однако особого значения это обстоятельство иметь не может, поскольку основной интерес представляют нарастающие решения. Инкремент становится положительным после того, как прямая  $F = \delta/m$  пройдет через вершину первой полуволны синуса, т.е. при  $m > \pi/2$ . Это решение соответствует первой неустойчивой моде. Таким образом, неустойчивость впервые возникает при значениях параметра накачки

$$m = \frac{\Gamma_0 L}{\sqrt{u_1 u_2}} = \frac{\Gamma_0 L}{\sqrt{(V_1 - V_3)(V_3 - V_2)}} > \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

Поскольку теперь решение задачи полностью известно, можно проверить, что конфигурация поля будет такой же, как показанная на рис. 1. В частности, можно показать, что максимум интенсивностей волн на пороге возникновения неустойчивости совпадает с краями импульса накачки и смещается вовнутрь импульса накачки при переходе через этот порог.

Полученный критерий (9) имеет наглядный смысл. При фиксированных прочих параметрах системы неустойчивость появляется только при достаточно сильной амплитуде накачки ( $\Gamma_0$ ), поскольку необходимо скомпенсировать потери энергии на излучение волн за пределы импульса накачки («радиационные потери»). Таким образом, в отличие от параметрической неустойчивости однородных волн неустойчивость возникает при переходе

через пороговое значение поля накачки. Радиационные потери растут при увеличении скорости выноса волн за пределы импульса накачки. Поэтому увеличение  $u_{1,2}$  ужесточает требование к амплитуде накачки. Уменьшение длины импульса также усиливает условие на накачку, так как уменьшается усиление волн при их распространении внутри импульса накачки.

При дальнейшем росте  $m$  первый положительный корень появляется в точке пересечения отрицательной полуволны синуса с прямой  $F_2 = -\delta/m$  на рис. 2. Возникающая неустойчивая структура является второй неустойчивой модой. При достаточно большом  $m$  возможно существование нескольких неустойчивых мод. Асимптотическое (на больших временах) решение с произвольными начальными условиями представляет собой суперпозицию неустойчивых мод.

Аналогичные многомодовые решения получены для гладких импульсов накачки. В частности, для  $a_3 = a_m / \text{ch}(x/L)$  изменяется только константа в правой части критерия неустойчивости (9) (замена  $\pi/2 \rightarrow 1/2$ ).

Если среда равновесна, генерация волн внутри импульса накачки ведет к ослаблению (распаду) самой накачки, после чего волны разбегаются в разные стороны от ослабленного импульса накачки, который уже не в состоянии их удержать. При взрывном взаимодействии волн (например, когда волна накачки имеет отрицательную энергию), развитие параметрической неустойчивости сопровождается нарастанием волны накачки, которая уже «не отпускает» две другие волны. В конечном счете возникает взрывной рост всех трех волн. По сути это механизм взрывной неустойчивости локализованных в пространстве волн, когда в начальный момент доминирует одна из них.

Задача о трехволновом взаимодействии в квадратичной среде с консервативной нелинейностью является точно интегрируемой методом обратной задачи рассеяния (включая взрывную неустойчивость). Однако получение информации о решении, построенном в рамках метода обратной задачи, по существу, является самостоятельной непростой задачей. Проведенный выше анализ достаточно нагляден и позволяет понять важные закономерности взаимодействия волновых пакетов.

### ***Стационарные волновые пучки и пространственно-временная аналогия.***

Решенная в предыдущем разделе задача о захвате слабых волн импульсом накачки во времени позволяет фактически без дополнительных усилий получить решение другой задачи – о стационарном параметрическом усилении волн в пространстве. Для этого достаточно воспользоваться пространственно–временной аналогией. Уравнения для взаимодействия плоских модулированных волн в случае неоднородной модуляции в заданном поле накачки имеют вид

$$\frac{\partial a_3}{\partial t} + (\vec{V}_3 \cdot \vec{\nabla}) a_3 = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial t} + (\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla}) a_1 = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad \frac{\partial a_2}{\partial t} + (\vec{V}_2 \cdot \vec{\nabla}) a_2 = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (10)$$

Вид линейного оператора в левых частях уравнений соответствует главному члену разложения закона дисперсии (в фуре-представлении). Отметим, что в этом случае условия резонанса должны выполняться для волновых векторов:  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3$ ,  $\omega(\vec{k}_1) + \omega(\vec{k}_2) = \omega(\vec{k}_3)$ . Направления волновых векторов и групповых волн в анизотропной среде могут не совпадать.

Теперь можно поставить задачу о стационарном параметрическом усилении слабых волн в пространстве при наличии пучка накачки с ограниченной апертурой. Для простоты ограничимся случаем двумерных волновых пучков, поля которых на границе промодулированы по одной поперечной координате  $y$  и развиваются вдоль оси  $x$ . Будем считать (это важно!), что направление оси  $x$  совпадает групповой скоростью волны накачки. Тогда получим уравнения стационарного взаимодействия двумерных пучков виде

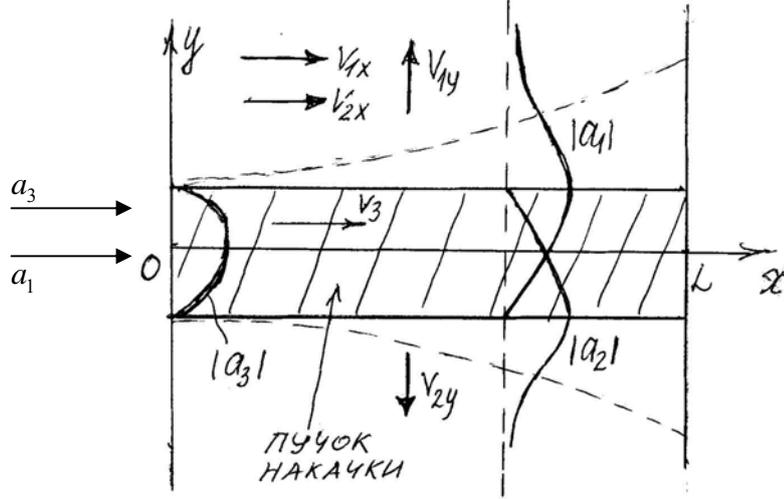


Рис. 3 Иллюстрация к эффекту пространственного захвата слабых волн пучком накачки. Пунктиром показана область локализации захваченных волн. Заштрихована область локализации пучка накачки

$$V_{3x} \frac{\partial a_3}{\partial x} = 0, \quad V_{1x} \frac{\partial a_1}{\partial x} + V_{1y} \frac{\partial a_1}{\partial y} = \sigma_1 a_2^* a_3, \quad V_{2x} \frac{\partial a_2}{\partial x} - |V_{2y}| \frac{\partial a_2}{\partial y} = \sigma_2 a_1^* a_3, \quad (11)$$

Чтобы получить полную аналогию с временной задачей, следует принять, что волны распространяются в одном направлении вглубь среды ( $V_{1x}, V_{2x} > 0$ ) и имеют различные направления группового распространения поперек пучка накачки  $V_{1y} > 0, V_{2y} = -|V_{2y}| < 0$ .

Как видно из первого уравнения (11), амплитудный профиль по  $y$  (апертура) пучка накачки не изменяется вдоль оси  $x$ , т.е.  $a_3 = a_3(y)$ . Область пучка накачки, возбуждаемого с границы  $x = 0$ , заштрихована на рис. 3. Теперь уравнения задачи в точности сводятся к рассмотренным выше для параметрической неустойчивости во времени (после деления первого и второго уравнений на  $V_{1x}$  и  $V_{2x}$  и последующей замены  $x \rightarrow t, y \rightarrow x$ ). Ранее уже говорилось о том, что сведение временной задачи к пространственной и обратно называется методом пространственно-временной аналогии. Основываясь на изученном выше решении временной задачи, в данном случае можно говорить о пространственном захвате пучков слабых сигнальных волн пучком накачки, когда поля слабых волн локализируются внутри пучка накачки и выносят энергию за его пределы в поперечном направлении – см. рис. 3. На этом рисунке показаны профили волн. Поле в сечении  $x = const$  полностью аналогично распределению поля на рис. 1 в фиксированный момент времени. Поскольку поле усиливаемых волн локализуется внутри пучка накачки, этот эффект важен для реализации распределенного параметрического усилителя. Он дает возможность усиливать волну сигнала, локализованную внутри пучка накачки, даже если она имеет поперечную к нему составляющую групповой скорости. Параметрическое усиление возникает при превышении амплитуды импульса накачки над пороговым значением. Критерий усиления получается непосредственно из критерия (9), полученного выше для задачи о захвате волн во времени.

В заключение заметим, что эффект захвата волновых пакетов во времени возможен в случае двумерных и даже трехмерных импульсов накачки. Соответственно возможен пространственный захват пучков с двумерной апертурой (цилиндрические пучки). При этом основной принцип остается прежним – волновое поле должно выноситься слабыми волнами в разных направлениях от импульса или пучка накачки по каждой из координатных осей.

## СТРУКТУРЫ В НЕРАВНОВЕСНЫХ СРЕДАХ (ДОПОЛНЕНИЯ К ЛЕКЦИЯМ)

### 7.1.1 Диссипативный предел уравнения Гинзбурга –Ландау

Диссипативным пределом КУГЛ (или вещественным уравнением Гинзбурга– Ландау) называется уравнение с чисто вещественными коэффициентами

$$\frac{\partial a}{\partial t} = a + \Delta a - |a|^2 a \quad (1)$$

Для получения (1) в КУГЛ общего вида следует положить  $c=0$ ,  $b_1=b_2=b=0$ . В уравнении (1) отсутствуют нелинейный сдвиг частоты и дисперсионное слагаемое. Оно описывает эффекты неустойчивости, нелинейного затухания и диффузии огибающей волнового пакета. Важная особенность уравнения (1) состоит в том, что оно не содержит параметров.

Покажем, что уравнение (1) является градиентным. Для градиентного уравнения можно ввести функционал обобщенной свободной энергии (в математической теории устойчивости он называется функционалом Ляпунова). Покажем, что функционал Ляпунова для уравнения (1) имеет вид

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -|a|^2 + \frac{1}{2}|a|^4 + |\nabla a|^2 \right] dx dy \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ -aa^* + \frac{1}{2}a^2 a^{*2} + (\nabla a \nabla a^*) \right]}_U dx dy \quad (2)$$

Произведем вариацию комплексной функции  $a$  с «закрепленными краями»:

$$a = a_0 + \delta a, \quad \delta a \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x|, |y| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Вычисляя вариацию с учетом (3), получим

$$\delta F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial U}{\partial a} \delta a + \frac{\partial U}{\partial \nabla a} \delta(\nabla a) + \frac{\partial U}{\partial a^*} \delta a^* + \frac{\partial U}{\partial \nabla a^*} \delta(\nabla a^*) \right] dx dy \quad (4)$$

Слагаемые в подынтегральном выражении, содержащие вариации производных от  $a$ , преобразуем с помощью интегрирования по частям:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial U}{\partial \nabla a} \nabla(\delta a) \right] dx dy = \frac{\partial U}{\partial \nabla a} \delta a \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \nabla \cdot \frac{\partial U}{\partial \nabla a} \right] \delta a dx dy \quad (5)$$

Первый член в (5) обращается в ноль с учетом условия закрепленных концов (3). После этого вариация функционала (4) принимает вид

$$\delta F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \underbrace{\left[ \frac{\partial U}{\partial a} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \nabla a} \right) \right]}_{\frac{\delta F}{\delta a}} \delta a + \underbrace{\left[ \frac{\partial U}{\partial a^*} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \nabla a^*} \right) \right]}_{\frac{\delta F}{\delta a^*}} \delta a^* \right\} dx dy \quad (6)$$

Коэффициенты при  $\delta a$  и  $\delta a^*$  в подынтегральном выражении (6) называются функциональными производными и обозначаются как  $\frac{\delta F}{\delta a}$  и  $\frac{\delta F}{\delta a^*}$  (формула (6) дает правило вычисления вариационной производной. Общее определение можно найти в литературе по функциональному анализу). С учетом (6) и (2) уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta a^*} \quad (7)$$

Уравнения, для которых возможно представление вида (7) называются градиентными.

Градиентные уравнения обладают важным свойством, относящимся к поведению функционала Ляпунова во времени. Дифференцируя левую и правую части (2) по времени и выполняя интегрирование по частям (так же, как это делалось выше), получим

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{\partial U}{\partial a} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \nabla a} \right) \right] \frac{\partial a}{\partial t} + k.c. \right\} dx dy \quad (8)$$

Замечая, что под интегралом в квадратных скобках стоит вариационная производная и используя (7), находим

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta F}{\delta a} \frac{\partial a}{\partial t} + k.c. \right\} dx dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial a}{\partial t} \right|^2 dx dy \leq 0 \quad (9)$$

Поскольку интеграл в правой части уравнения (9) является отрицательной величиной либо нулем, функционал Ляпунова непрерывно убывает до тех пор, пока не достигнет своего минимального значения. При этом  $\partial a / \partial t = 0$ , т.е. реализуется одно из стационарных решений уравнения ГЛ (1). При шумовых начальных условиях наиболее вероятным является достижение стационарного решения с наименьшим значением функционала Ляпунова.

Таким образом, в градиентных системах всегда устанавливается одно из стационарных состояний. Нестационарные режимы являются переходными и обычно содержат движущиеся фронты, разделяющие области структур поля, близких к стационарным.

### 7.1.3 ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ (галерея феноменов)

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (1 + ib) \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \right) + a - (1 + ic) |a|^2 a$$

(без ущерба общности можно принять  $c > 0$ )

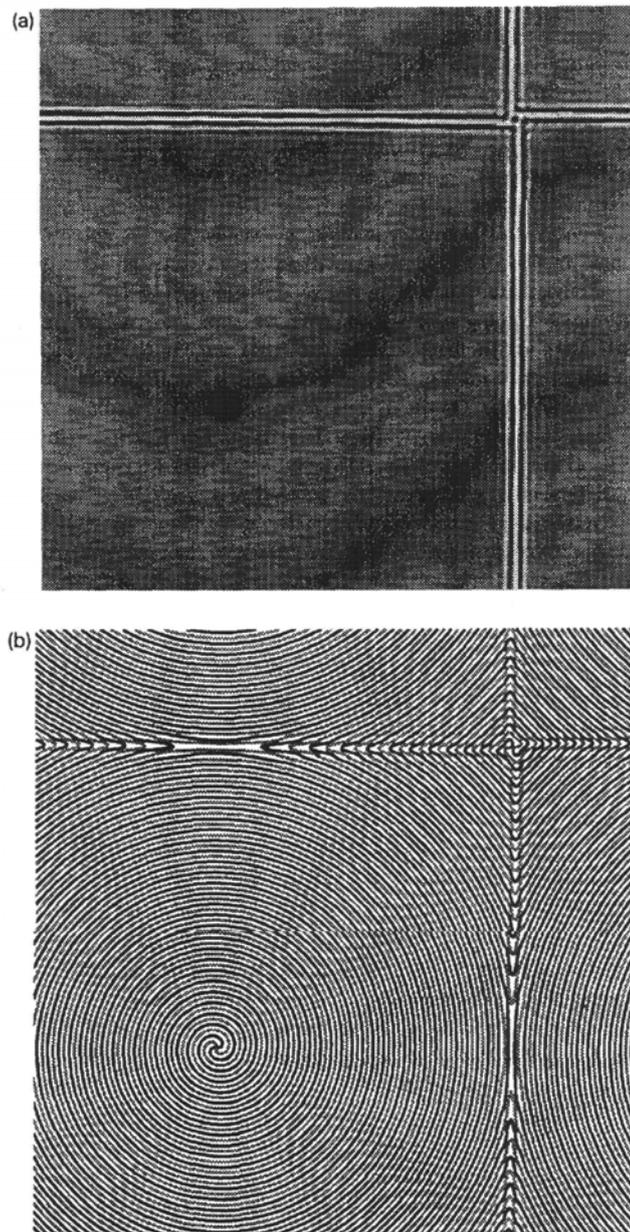


Рис. 1 Мгновенный снимок простой «замороженной» конфигурации с одним спиральным дефектом при  $b = -2$ ,  $c = 0.6$ . Периодические граничные условия. Линейный размер области  $L = 512$ . (а) – изображение  $|a(x,y,t)|$  в черно-белом коде, когда черный цвет показывает минимальное значение поля, серый – максимальное; (б) – линии постоянной фазы  $\phi \equiv \arg a = 0$  и  $\phi = \pi$  (показаны светло серым и темно серым цветом соответственно). Структуры в виде прямых светлых линий иногда рассматриваются как особый вид дефектов – «гребни скачков»

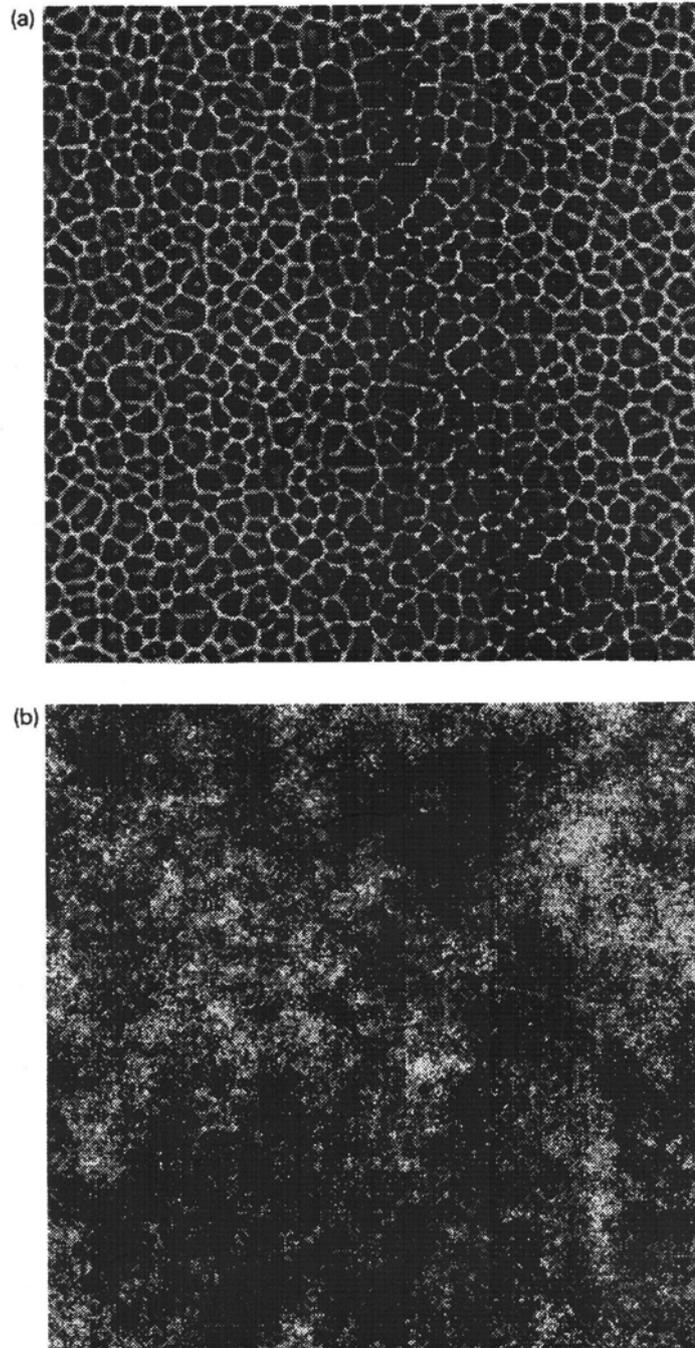


Рис. 2 Мгновенный снимок фазовой турбулентности при  $b = -2$ ,  $c = 0.752$ . Линейный размер области  $L = 5120$ . (а) – изображение  $|a|$  в диапазоне изменения  $|a|$  от 0.87 (черный цвет) до 1.12 (белый цвет). Показан фрагмент исходной области с размером  $L = 640$ . Видна ячеистая структура поля амплитуды; (б) поле фазы  $\phi = \arg a$  в черно-белом коде. Полное изменение фазы  $\Delta\phi = 4.27 \pi$ . Приведенные данные иллюстрируют случайный характер крупномасштабных изменений фазы в пространстве при относительно малых мелкомасштабных осцилляциях амплитуды.

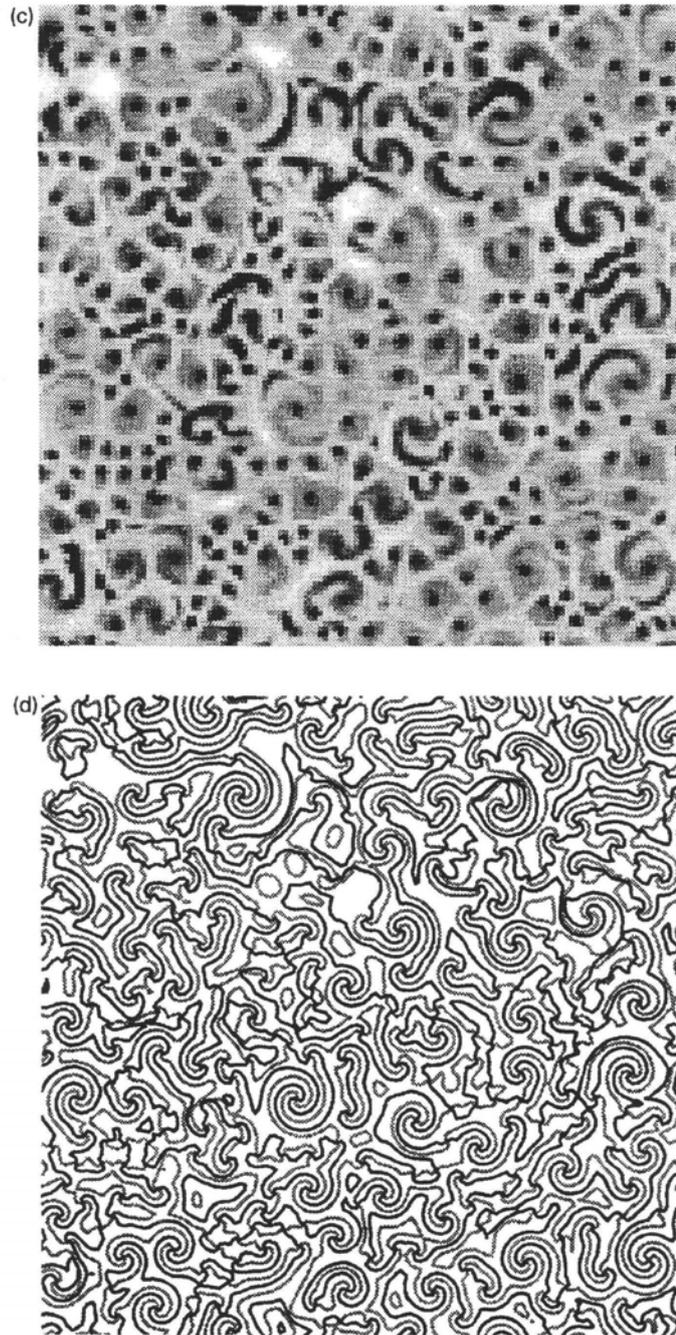


Рис. 3 Мгновенный снимок турбулентности дефектов при  $b = 0$ ,  $c = 1.786$ . Линейный размер области  $L = 256$ . (c) – изображение  $|a|$  в диапазоне изменения  $|a|$  от 0 (черный цвет) до 1 (белый цвет), (d) линии постоянной фазы  $\phi = \arg a = 0$  (светло серый цвет) и  $\phi = \pi$  (темно серый цвет). На рис. (c) центры вихрей (дефекты) отображаются черными точками; рис. (d) демонстрирует спиральную структуру поля фазы в окрестности отдельных дефектов. Турбулентность дефектов характеризуется экспоненциальным спаданием пространственной корреляции и ее малым масштабом

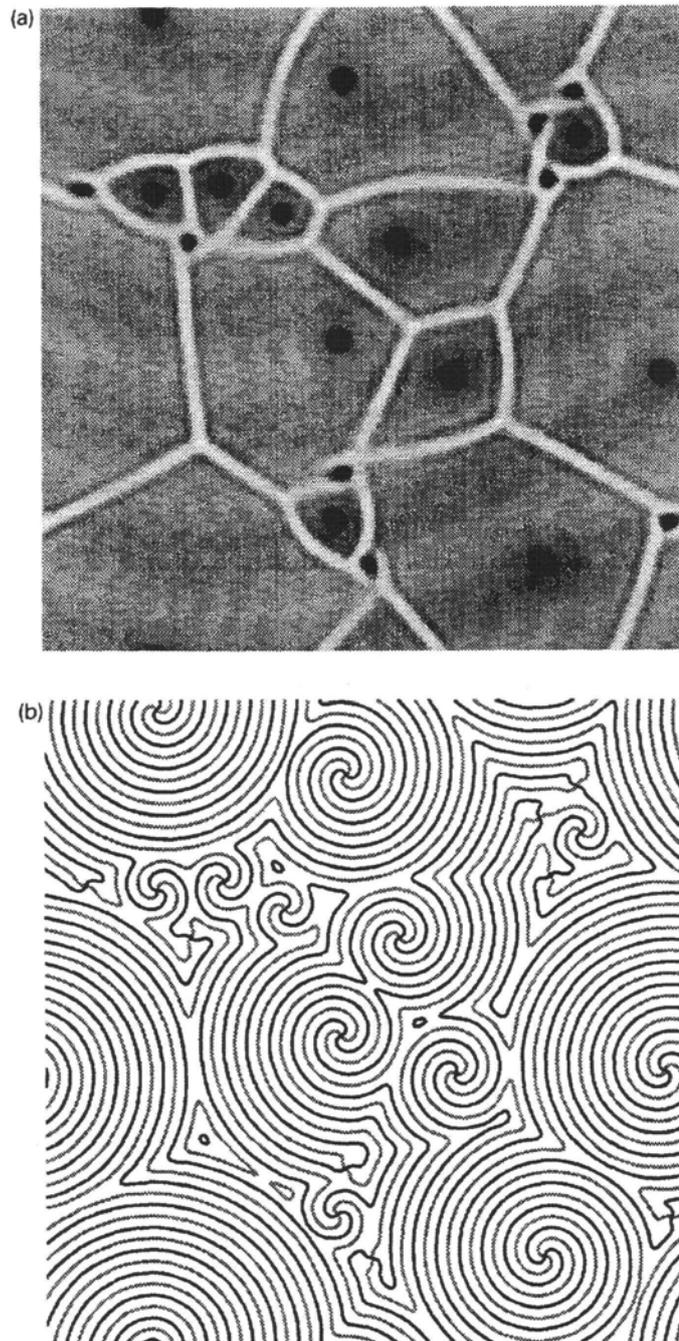


Рис. 4 Пример замороженного состояния типа «вихревого стекла» при  $b = -2$ ,  $c = 0.2$ . Линейный размер области  $L = 256$ . (a) – изображение  $|a|$  в диапазоне  $0 < |a| < 1.17$ , (b) линии постоянной фазы  $\phi = \arg a = 0$  (светло серый цвет) и  $\phi = \pi$  (темно серый цвет). Спиральные вихри находятся внутри многоугольников, на границах которых интенсивность поля имеет максимальное значение. Пространственный масштаб многоугольников монотонно возрастает при общем замедлении развития картины во времени.

## 7.2 ЯЧЕЙСТЫЕ СТРУКТУРЫ ПРИ ТЕРМИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ В ПОДОГРЕВАЕМОМ СНИЗУ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

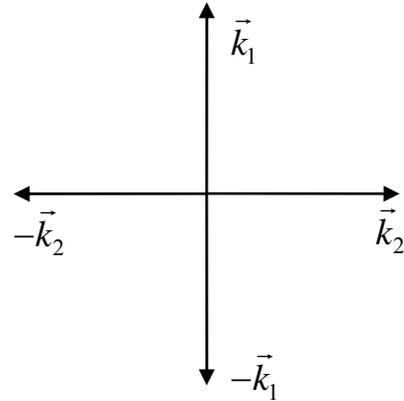
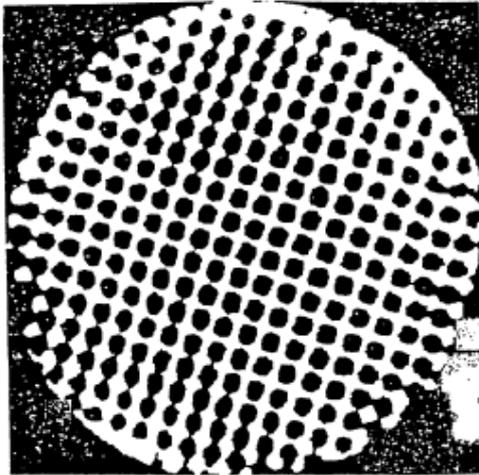


Рис.1 Четырехгранные конвективные ячейки на поверхности слоя жидкости между пластинами с подогревом снизу. Справа показаны волновые вектора пространственных гармоник вертикальной скорости, наложение которых дает картину правильных четырехгранников.

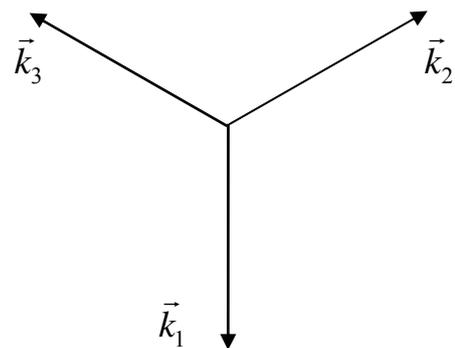
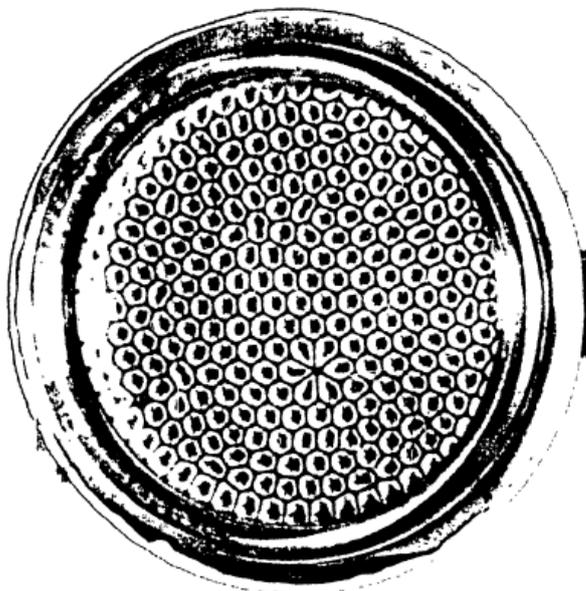


Рис.2 Шестигранные ячейки на свободной поверхности слоя силиконового масла при подогреве снизу (визуализация светоотражающими частицами). Справа показаны волновые вектора пространственных гармоник, для которых выполняются условия резонанса  $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$  (для упрощения рисунка не на нем показаны волновые вектора комплексно сопряженной составляющей поля  $-\vec{k}_j$ )

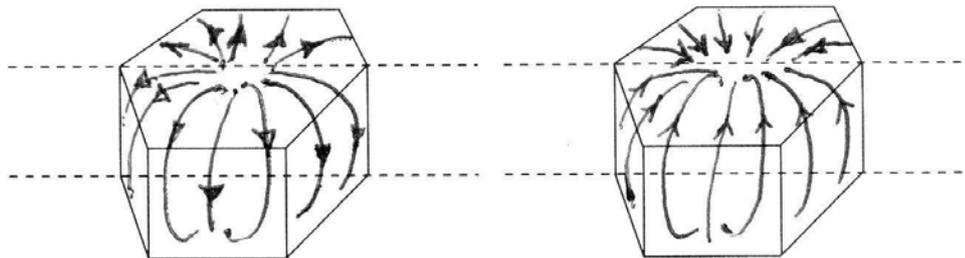


Рис. 3 Схема течения жидкости в шестигранных конвективных ячейках открытого типа (слева) и закрытого типа (справа).

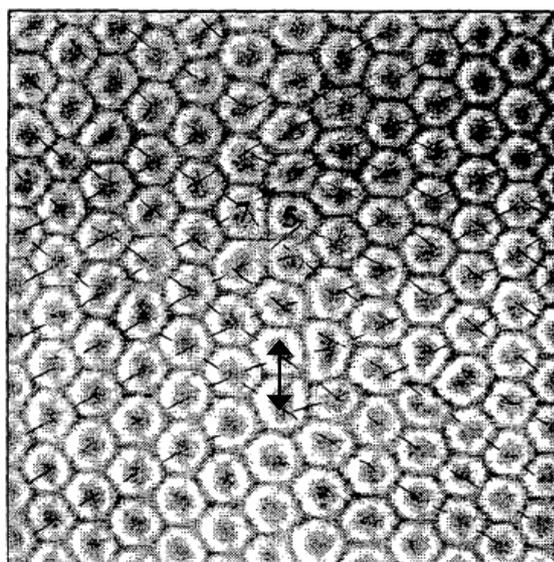


Рис. 4 Пенто-гепто-дефект – локальное нарушение порядка в периодической решетке правильных шестигранников. Стрелками  $\updownarrow$  показаны две смежные ячейки, одна из которых имеет пять соседей, а другая – семь соседей.

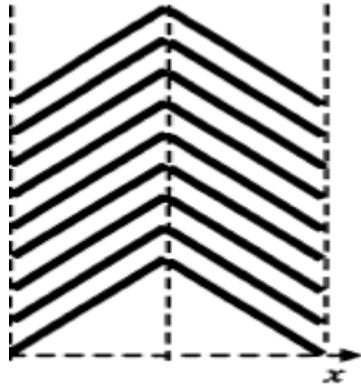


Рис. 5 Простейшая модель доменной стенки, возникающей как результат взаимодействия двух ортогональных решеток валов с одинаковыми по модулю волновыми векторами. Конкуренция решеток приводит к «выживанию» в полупространствах  $x > 0$  и  $x < 0$  только одной из них. Соответствующее решение уравнения Свифта-Хоенберга имеет вид

$$u = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cos(kx + ky) + \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{th} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cos(kx - ky)$$

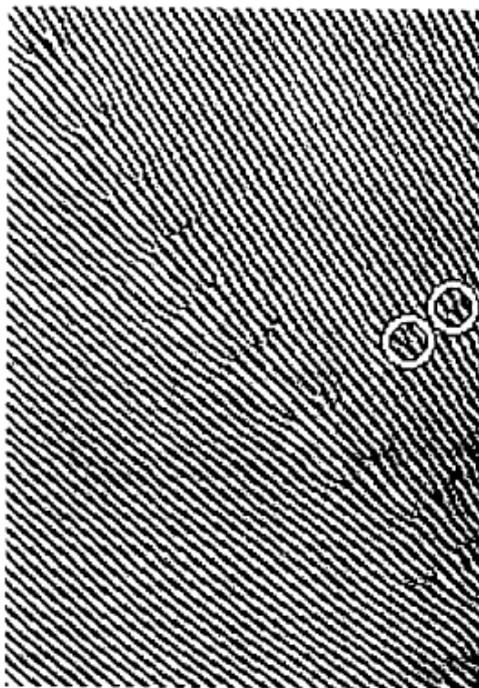


Рис. 6 Доменная стенка между двумя решетками конвективных валов, которая имеет вид цепочки топологических дефектов – дислокаций. Волновые вектора пространственных гармоник, соответствующих валам, близки и по направлению и по абсолютной величине.