№10.1

$$= \vec{x}_0 \cdot 0 - i\frac{c}{\omega}\vec{y}_0\frac{\partial E_x}{\partial z} + i\frac{c}{\omega}\vec{z}_0\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

D/3: 10.35, 10.38, 10.39*, не экзам, 10.45*, 10.48

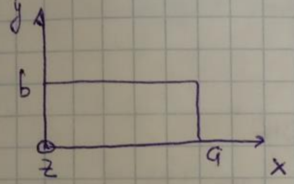
Д/З: $\sqrt{}$ 10.1+, 10.2+ 327, 328

$\omega_{кр}$ - частота при в происходит изменение поля.

$h = ?$ - чтобы это значило если h - комплексное

Домашняя работа.

$\sqrt{}$ 10.1.



а) $TE_{10} \Rightarrow m = 1$ $\qquad k^2 - h^2 = \varkappa^2$

$$\varkappa^2 = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 \qquad \varkappa_{min} = \frac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$\omega = \omega_{cr} \Rightarrow h = 0 \Rightarrow \omega_{cr} = \frac{\pi c}{a}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi}{k_{cr}} = \frac{2\pi c}{\omega_{cr}}$$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\pi c}{a}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{2\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\omega^2 - \omega_{cr}^2}} = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2}}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dh} \qquad dh = \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right)^{-1/2}\frac{1}{2}\frac{2\omega\varepsilon\mu}{c^2}d\omega$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dh} = \frac{c^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2} =$$

$$= \frac{c^2}{\varepsilon\mu v_\varphi}$$

б) $$H_x = \frac{hc}{\omega\mu}E_{max} = \frac{c}{\omega\mu}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}E_{max} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\mu}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cr}}{\omega}\right)^2}E_{max}$$

$$H_z = \frac{c\pi}{\omega\mu a}E_{max} = \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega_{cr}}{\omega}E_{max}$$

Продолжаем 10.35.

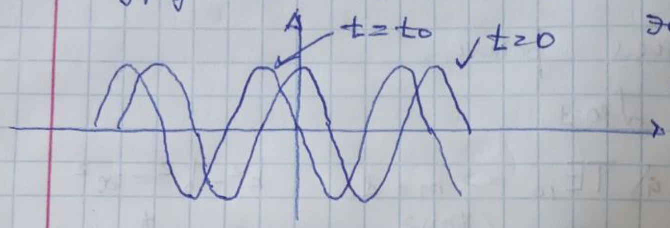
Это бегущие волны

$\omega > \omega_{кр}$ – распространяется

$\omega < \omega_{кр}$ – не распространяется

$$E_y = E_0 \sin(æx) e^{ihz + i\omega t}$$

$$E_{y\,физ} = E_0 \sin(æx) \cos(hz + \omega t)$$



Эта волна распространяется против оси z.

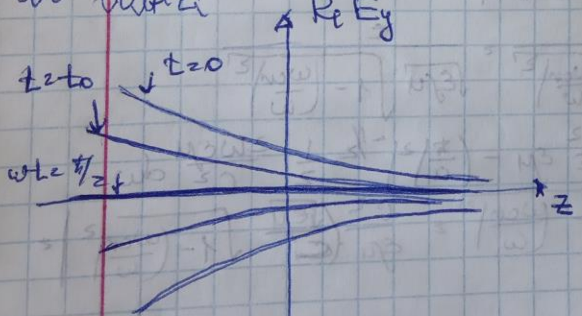
Если h – действ, то волна распр.

Если h – мнимое, то волна не распр.

Пусть $h^2 < 0$ то $h = \pm i|h|$

Тогда $e^{i\omega t - (\pm i \cdot i|h|z)} = e^{i\omega t} e^{\mp|h|z}$

$E_y = E_0 \sin(æx) e^{i\omega t} e^{\mp|h|z}$ – не распространяющаяся волна



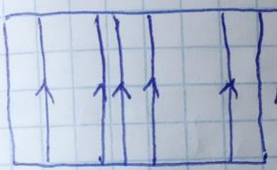
Потерь нет.

$$= \vec{X}_0 \cdot 0 - i\frac{c}{\omega}\vec{y}_0 \frac{\partial E_x}{\partial z} + i\frac{c}{\omega}\vec{z}_0\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

ϰ - просто обозначение
нашли значение из граничных условий.

ωкр - частота при в распространяющаяся волна становится не распространяющейся, т.е. значение действительное h становится мнимой => проходит через 0 => ищем h=0 => $k^2 = ϰ^2$.

Волны отличаются структурой поля.
(у каждой моды своя поперечная структура поля)



m=1

Отличаются также значением продольного волнового числа h

В волноводе ∃ множество волн. Они имеют свою структуру поля и h. У каждой своя критическая частота.

Чтобы передавать энергию нужно чтобы ω > ωкр. т.е. чтобы мода была распространяющейся.

Низшая мода - мода у в поперечное волновое число принимает минимальное значение из имеющихся.

Пустой волновод - не заполненный, то есть ε = μ = 1.

Критическая длина волны - длина, в имеет плоская

D/3:
0.35
0.38
0.39*
не экзам
0.45*
$\boxed{0.48}$

щая-

Продолжаем 10.35.

волна в вакууме

Если волновод имеет длину н-р 3см, то в неё можно „загнать" волну, в в вакууме имеет длину волны меньше 6см.

Убывает волна / возрастает или же просто бежит вдоль / против оси z будет зависеть от того где расположен источник и какой он
(Если источник есть ?)

Сейчас мы ∢ без источника.

В бытовых приборах два провода. Также нулевая мода $æ=0 \Rightarrow \omega_{кр}=0$
Но $h^2=k^2$ поэтому волны там распр-ся

$\lambda_В$ - длина волны в волноводе - пространственный период волны

∢ при $t=0$ $\quad \omega t - hz = 2\pi \Rightarrow z = \frac{2\pi}{h}$

Чтобы cos перешёл сам в себя нужно

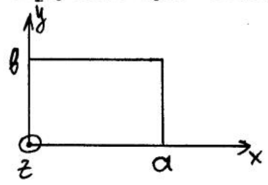
$\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi) \Rightarrow$ величина

$$h\Delta z = 2\pi \Rightarrow \Delta z = \frac{2\pi}{h} = \lambda_В$$

$$\lambda^{(0)} = \frac{2\pi c}{\omega}$$

$$\lambda_В = \frac{\lambda^{(0)}}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}} > \lambda^{(0)}$$

10.1 В идеальном прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a и b (a>b) распространяется волна типа TE_{10}(низшая мода) с частотой ω и максимальной амплитудой электрического поля E_{max}. Найти: a) критическую частоту, длину волны в волноводе, фазовую и групповую скорости



$\frac{\omega^2}{c^2} = \varkappa^2 + h^2$, где $\varkappa$ - попереч волновое число

Это дисперсионное ур-ие для волн в ЛП.

$\varkappa = \sqrt{\varkappa_x^2 + \varkappa_y^2}$, где $\varkappa_x = \frac{\pi n}{a}$, $\varkappa_y = \frac{\pi m}{b}$

Для низшей моды $\varkappa$ - min : $\varkappa = \varkappa_x = \frac{\pi}{a}$

Компоненты полей для нашей волны: $E_y = E_{max} \sin\frac{\pi x}{a} e^{i\omega t - ihz}$

$-\frac{i\omega}{c}\vec{H} = \text{rot}\, E \Rightarrow \vec{H} = -\frac{c}{i\omega}\text{rot}\, E$

$$\text{rot}\, E = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y(x,z) & 0 \end{vmatrix} = x_0 ih E_y + z_0 \frac{\pi}{a} E_{max} \cdot \cos\frac{\pi x}{a} e^{i\omega t - ihz}$$

Отсюда $H_x = -\frac{ch}{\omega} E_{max} \sin\frac{\pi x}{a} e^{i\omega t - ihz} \Rightarrow H_x^{max} = \frac{ch}{\omega} E_{max} = \frac{h}{k} E_{max}$

$H_z = i\frac{\pi c}{\omega a} E_{max} \cos\frac{\pi x}{a} e^{i\omega t - ihz} \Rightarrow H_z^{max} = \frac{\pi c}{\omega a} E_{max} = \frac{\varkappa}{k} E_{max}$

Критическая частота - наименьшая. Т.к. $\varkappa$ навязано геометрией волновода, то

$\omega = c\varkappa = \frac{\pi c}{a}$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{a}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}}$$

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{dh} = \frac{d\omega}{dk} \cdot \frac{1}{dh/dk} = c \cdot \frac{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}}{k} = \frac{ch}{k} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega a}\right)^2}$$

$\frac{d}{dk}\left(\sqrt{k^2 - \varkappa^2}\right)$

N 10.1. стр 1

a) $h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$, $\varepsilon, \mu = 1$

$\omega_{cr} = \frac{\pi c}{a} = \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^{10}\ \frac{см}{c}}{2\ см} = 4{,}71 \cdot 10^{10}\ \frac{1}{c}$, $\lambda_{cr} = \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = 2a = 4 см.$

$\lambda_g = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi c}{\omega}\left(1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4{,}53\ см.$

$v = \frac{\omega}{h} = c\left(1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4{,}53 \cdot 10^{10}\ \frac{см}{c}$

$\frac{\omega^2}{c^2} = h^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$, $\frac{1}{c^2} 2\omega d\omega = 2h\,dh$, $v_g = \frac{d\omega}{dh} = \frac{c^2}{\frac{\omega}{h}} = \frac{c^2}{v} = 1{,}98 \cdot 10^{10}\ \frac{см}{c}$

б) $$\left.\begin{aligned} H_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\psi^m \\ \bar{H}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^m \\ \bar{E}_\perp &= -\frac{1}{\varepsilon}[\nabla_\perp\psi^m, \bar{z}^0] \\ E_z &= 0 \end{aligned}\right\} e^{i(\omega t - hz)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^m + \varkappa^2\psi^m = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi^m}{\partial n}\right|_e = 0.$$

$$\psi^m = c_1 \cos\frac{\pi x}{a}$$

$\varepsilon, \mu = 1$, $\bar{E}_\perp = c_1\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}[\bar{x}^0, \bar{z}^0]\,e^{i(\omega t - hz)} =$

$= \bar{y}_0\left(-c_1\frac{\pi}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}\,e^{i(\omega t - hz)} = \bar{y}_0\,E_{max}\sin\frac{\pi x}{a}\,e^{i(\omega t - hz)}$,

$\bar{H}_\perp = \bar{x}_0\frac{h}{k_0}c_1\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\,e^{i(\omega t - hz)} = -\bar{x}_0\frac{h}{k_0}E_{max}\sin\frac{\pi x}{a}\,e^{i(\omega t - hz)} =$

$= \bar{x}_0\,H_{max_\perp}\sin\frac{\pi x}{a}\,e^{i(\omega t - hz)}$, $|H_{max_\perp}| = E_{max}\left(1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\operatorname{div}\bar{H} = 0 = \operatorname{div}(\bar{H}_\perp + \bar{H}_z)$, $\frac{\partial H_z}{\partial z} = -\frac{\partial H_\perp}{\partial x}$

$H_z = i\,H_{max_z}\cos\frac{\pi x}{a}\,e^{i(\omega t - hz)}$

$H_\perp = H_{max_\perp}\sin\frac{\pi x}{a}\,e^{i(\omega t - hz)}$

$h\,H_{max_z} = -\frac{\pi}{a}H_{max_\perp} = \frac{\pi}{a}\frac{h}{k_0}E_{max}.$

$H_{max_z} = \frac{\frac{\pi c}{a}}{k_0 c}E_{max} = E_{max}\frac{\omega_{cr}}{\omega}$

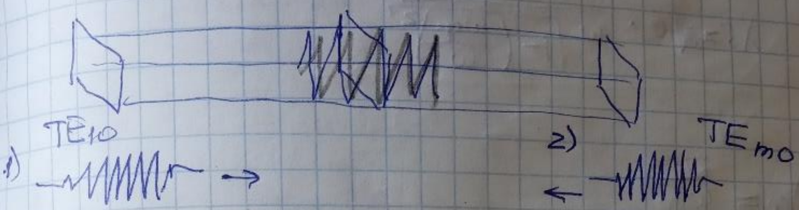
№10.2

$= \vec{X}_0 \cdot 0 - i \frac{c}{\omega} \vec{y}_0 \frac{\partial E_x}{\partial z} + i \frac{c}{\omega} \vec{z}_0 \frac{\partial E_x}{\partial y}$

При $\omega \to \infty$ $\quad \lambda_в \to \lambda^{(0)}$

Если $\lambda_в$ стала мнимой, то волна не распространяется.

№10.2



$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - æ^2}$$

$$h_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\omega_2^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

Раз импульсы встретились точно по середине

$\Rightarrow \quad v_{гр1} = v_{гр2} \qquad v_\varphi \cdot v_{гр} = c^2$

$\Rightarrow \quad v_{\varphi 1} = v_{\varphi 2}$

$$\frac{\omega_1}{h_1} = \frac{\omega_2}{h_2} \qquad \omega_2^2 = \omega_1^2 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2$$

Д/З: № 10.2+, 10.3+, 10.4+

Ответ: $\frac{\;}{\omega_{cr}} = \sqrt{4}$

№10.2.

$$\frac{\lambda_{в1}}{\lambda_{в2}} = \frac{2\pi}{h_1}\cdot\frac{h_2}{2\pi} = \frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\frac{\frac{\omega_2^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} =$$

$$= \vec{X}\cdot 0 - i\frac{c}{\omega}\vec{y}\cdot\frac{\partial f_x}{\partial z} + i\frac{c}{\omega}\vec{z}\cdot\frac{\partial f_x}{\partial y}$$

Д/З:
0.35
0.38
0.39*
(не экзам)
0.45*
$\boxed{0.48}$

$$= \sqrt{\frac{\omega_1^2\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2/c^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}$$

$$\frac{\lambda_{в1}}{\lambda_{в2}} = \frac{\sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2}\left(\frac{\lambda_{в2}}{\lambda_{в1}}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}{\sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}$$

$$\frac{\lambda_{в1}}{\lambda_{в2}} = \frac{2\pi h_2}{2\pi h_1} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{\frac{\omega_2^2}{c^2} - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}$$

$$\omega_2^2\left(\frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right) = \omega_1^2\left(\frac{\omega_2^2}{c^2} - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2\right)$$

$$\omega_2^2\frac{\omega_1^2}{c^2} - \omega_2^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 = \omega_1^2\frac{\omega_2^2}{c^2} - \omega_1^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 m^2$$

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 m^2$$

$$\frac{\lambda_{в1}}{\lambda_{в2}} = \sqrt{\frac{\frac{\omega_2^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 m^2}{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\frac{\omega_1^2}{c^2}m^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 m^2}{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}} = \sqrt{m^2} = m$$

$$\frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}} = \frac{2\pi c}{\omega_1}\cdot\frac{\omega_2}{2\pi c} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = m$$

Ответ: $\frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}} = \frac{\lambda_{в1}}{\lambda_{в2}} = m$

10.2. С двух концов прямоугольного волновода запущены навстречу друг другу два радиоимпульса с высокочастотным заполнением: один на волне TE_{10}, второй – на волне TE_{m0}. Центры импульсов встречаются точно посередине волновода. Каково соотношение между длинами волн обоих импульсов в свободном пространстве (λ_1/λ_2) и в волноводе ($\lambda_{g1}/\lambda_{g2}$)?

Т.к центры встречаются посередине $\Rightarrow$ $v_{гр1} = v_{гр2}$, т.к. гр. ск-ть явл. скоростью распространения огибающей

Т.к. дан тип волн, то знаем $æ_{10} = \frac{\pi}{a}$ и $æ_{m0} = \frac{\pi m}{a}$

$$v_{гр} = c\sqrt{1-\left(\frac{\pi c}{\omega_1 a}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{\pi m c}{\omega_2 a}\right)^2} \Rightarrow \omega_2 = m\omega_1$$

Значит $k_2 = mk_1 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = m$ для свободного пр-ва

Тогда $\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{m}$, т.к. $h = \sqrt{k^2 - æ^2}$

$$h_2 = \sqrt{k_2^2 - æ_2^2} = \sqrt{m^2k_1^2 - m^2æ_1^2} = mh_1$$

$$\frac{\lambda_{g1}}{\lambda_{g2}} = \frac{h_2}{h_1} = m$$

N10.2.

Если два импульса были одновременно отправлены друг другу навстречу и их центры совпали посередине волновода, значит у них одинаковые v_g. $h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - æ^2$, $\frac{2\omega d\omega}{c^2} = 2h\,dh$, $v_g = \frac{d\omega}{dh} = \frac{c^2}{v}$

$$v_{g_1} = \frac{c^2}{v_1} = \frac{c^2}{\omega_1}h_{10}, \quad v_{g_2} = \frac{c^2}{v_2} = \frac{c^2}{\omega_2}h_{m0},$$

$$h_{10} = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \quad h_{m0} = \sqrt{\frac{\omega_2^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2},$$

$$\frac{h_{10}}{\omega_1} = \frac{h_{m0}}{\omega_2}, \quad \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a\omega_1}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a\omega_2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega_1} = \frac{m}{\omega_2}, \quad \frac{\lambda_1}{2\pi c} = \frac{\lambda_2 m}{2\pi c}, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = m.$$

В свободном пространстве: $\lambda^{(0)} = \frac{2\pi}{k}$, $\varepsilon, \mu = 1$,

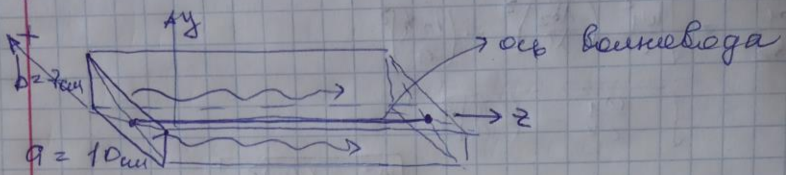
$$\lambda_1^{(0)} = \frac{2\pi c}{\omega_1}, \quad \lambda_2^{(0)} = \frac{2\pi c}{\omega_2} \Rightarrow \frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}} = m$$

№10.4(а,б)

№10,4.

$a = 10$ см $b = 7$ см

а) TE_{10} и TE_{30} $f = 1700$ МГц



$x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}$$

$$E_y = E_{01} \sin(\varkappa x) \cos(\omega t - h_{10} z) + E_{03} \sin(\varkappa x) \cos(\omega t - h_{30} z)$$

$$h_{10} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (1{,}7)^2 \cdot 10^{18}}{c^2} - \frac{\pi^2}{100}} > 0 \text{ — действ-ное}$$

$c^2 = 9 \cdot 10^{20}$ $\approx 0{,}17$

$$h_{30} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (1{,}7)^2 \cdot 10^{18}}{9 \cdot 10^{20}} - \frac{9 \cdot \pi^2}{100}} = \text{мнимое число}$$

Для первой $\omega > \omega_{кр}$, для второй $\omega < \omega_{кр}$.

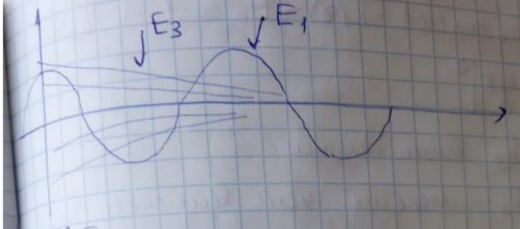
Учти, что ... при $x = \frac{a}{2}$

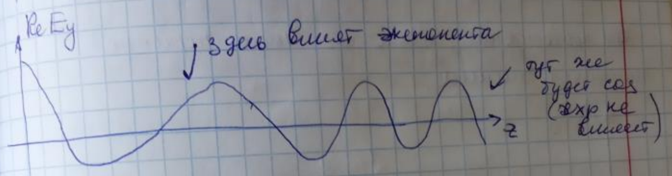
$$\mathrm{Re}\, E_y = E_0 \cos(\omega t - h_1 z) - E_0 \cos(\omega t) \cdot e^{-|h_3| z}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin \varkappa_1 x &= 1 \\ \sin \varkappa_3 x &= -1 \end{aligned}\right\} \text{ при } x = \frac{a}{2}$$

$= \vec{x}_0 \cdot 0 - i\frac{c}{\omega}\vec{y}_0 \frac{\partial E_x}{\partial z} + i\frac{c}{\omega}\vec{z}_0 \frac{\partial E_x}{\partial y}$

D/3:
0.35
0.38
0.39*
(не экзам)
0.45*
0.48



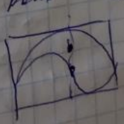


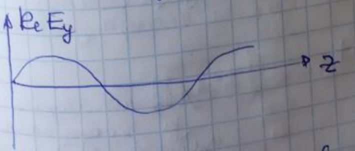
↑ в разные моменты она будет по разному будет колебаться

б) TE_{10} и TE_{20} $f = 1700$ МГц

$$h_{20} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (1{,}7)^2 \, 10^{18}}{9 \cdot 10^{20}} - \frac{4\pi^2}{100}}$$ — мнимое

но при $x = \frac{a}{2}$ $\sin \varkappa_2 x = 0$ => в нужном нам месте будет только играть роль E_{10y}.





в) TE_{10} и TE_{30} $f = 10^5$ МГц

h_1 и h_3 в этом случае действительные

Продолжаем 10.35.

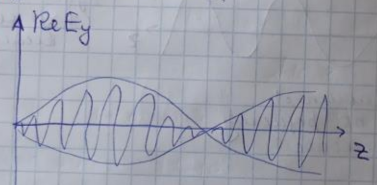
$$\mathrm{Re}\, E_y = E_0 \cos(\omega t - h_1 z) - E_0 \cos(\omega t - h_3 z)$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 >> \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$$

=> h_1 и h_3 очень близки

$\Delta h = h_1 - h_3$ — меньше чем величины h_1, h_3

Для прохождения какого-то числа периодов получается биение.



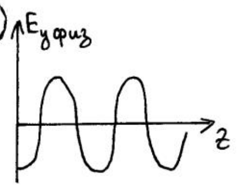
10.4. В прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a и b на частоте f возбуждены две волны, бегущие в одном направлении. Нарисовать качественно графики зависимости электрического поля от продольной координаты z в различные моменты времени t на осевой линии волновода (пересечении диагональных плоскостей) для волн типов: а) TE10 и TE30 при f=1700 б) TE10 и TE20 при f=1700

а)
$$\left\{\begin{aligned} &H_z = \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon_\mu}\psi^m \\ &H_\perp = -\frac{h}{k_0\varepsilon_\mu}\nabla_\perp\psi^m \quad \times e^{i(\omega t - hz)} \\ &E_\perp = -\frac{1}{\varepsilon}[\nabla_\perp\psi^m \times z_0] \end{aligned}\right.$$

$$E_\perp = y_0 \sin\frac{\pi x}{a}\cdot E_0 e^{i\pi} e^{i(\omega t - hz)}$$

$$E_{y\,\text{физ}} = E_0^{10}\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t - hz - \pi) = -E_0\sin\frac{\pi x}{a}\cos(\omega t - h_{10}z)$$

$$E^{10}_{y\,\text{физ}}\Big|_{x=\frac{a}{2}} = -E_0^{10}\cos(\omega t - hz)$$



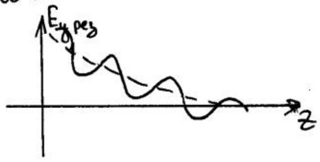
$$\omega^{10}_{\text{кр}} = \varkappa_{10}\cdot c = \frac{\pi c}{a} \Rightarrow f_{\text{кр}} = \frac{c}{2a} = 1500 \text{ МГц}.$$

$f = 1700$ МГц $\Rightarrow TE_{10}$ – распространяющаяся мода

$$\omega^{30}_{\text{кр}} = \varkappa_{30}\cdot c = \frac{3\pi c}{a} \Rightarrow f_{\text{кр}} = \frac{3c}{2a} = 4500 \text{ МГц} \Rightarrow TE_{30} \text{ – нераспростр. мода}$$

$$E^{30}_{y\,\text{физ}}\Big|_{x=\frac{a}{2}} = -E_0^{30} e^{\pm|h_{30}|z}\cos\omega t$$

$$E_{y\,\text{результ.}} = -E_{10}\cos(\omega t - h_{10}z) - E_{30}e^{-|h_{30}|z}\cos\omega t$$



б) $$\omega_{\text{кр}20} = \varkappa_{20}\cdot c = \frac{2\pi c}{a} \Rightarrow f_{\text{кр}} = \frac{c}{a} = 3000 \text{ МГц} \Rightarrow TE_{20} \text{ – нераспр. мода}$$

$$E_{y20} = y_0 E_{20}\sin\frac{2\pi}{a}x\cdot e^{i(\omega t - h_{20}z)}\Big|_{x=\frac{a}{2}} = 0$$

стр 5

№ 10.4. (a)

$a = 10$ см., $b = 7$ см., $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $\bar{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon}[\nabla_\perp \psi^m, \bar{z}^0] e^{i(\omega t - hz)}$,

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^m + \text{æ}^2\psi^m = 0$, $\left.\frac{\partial \psi^m}{\partial n}\right|_e = 0$.

a) TE_{10} и TE_{30} при $f = 1700$ Мгц

TE_{10}: $E_y^{10} = -C_{10}\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - h_{10} z)}$.

$$h_{10} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \quad \omega_{cr} = \frac{\pi c}{a} = 9424 \text{ Мгц}$$

$$f_{cr} = 1500 \text{ Мгц}.$$

TE_{30}: $E_y^{30} = -C_{30}\frac{3\pi}{a}\sin\frac{3\pi x}{a} e^{i(\omega t - h_{30} z)}$

$$h_{30} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}, \quad \omega_{cr} = \frac{3\pi c}{a}, \quad f_{cr} = 4500 \text{ Мгц}.$$

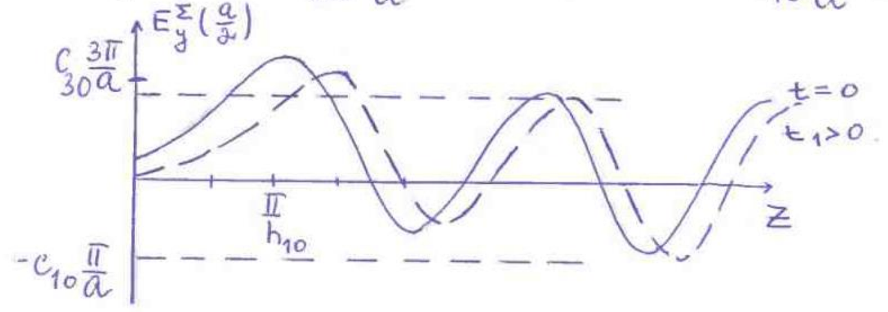
$$\Rightarrow h_{30} = \pm i\sqrt{\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \Rightarrow E_y^{30} = -C_{30}\frac{3\pi}{a}\sin\frac{3\pi x}{a} e^{-|h_{30}|z} e^{i\omega t}$$

Выбрали h так, чтобы амплитуда волны экспоненциально затухала.

$$E_y^\Sigma = E_y^{10} + E_y^{30} = -\left(C_{10}\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a} e^{-ih_{10}z} + C_{30}\frac{3\pi}{a}\sin\frac{3\pi x}{a} e^{-|h_{30}|z}\right) \cdot e^{i\omega t}$$

$$E_y^\Sigma\left(\frac{a}{2}\right) = -C_{10}\frac{\pi}{a} e^{i(\omega t - h_{10}z)} + C_{30}\frac{3\pi}{a} e^{-|h_{30}|z} e^{i\omega t}$$

$$\mathrm{Re}\, E_y^\Sigma\left(\frac{a}{2}\right) = C_{30}\frac{3\pi}{a} e^{-|h_{30}|z}\cos\omega t - C_{10}\frac{\pi}{a}\cos(\omega t - h_{10}z)$$



№ 10.4. (б) стр 6

$a = 10$ см, $b = 7$ см., $f = \frac{\omega}{2\pi}$, $\bar{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon}[\nabla_\perp \psi^m, \bar{z}^0] e^{i(\omega t - hz)}$,

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^m + \varkappa^2 \psi^m = 0$, $\frac{\partial \psi^m}{\partial n}\Big|_e = 0$.

б) TE_{10} и TE_{20} при $f = 1700$ Мгц.

TE_{10}: $E_y^{10} = -C_{10}\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - h_{10} z)}$

$$h_{10} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \quad \omega_{cr} = \frac{\pi c}{a}, \quad f_{cr} = \frac{\omega_{cr}}{2\pi} = 1500 \text{ Мгц}.$$

TE_{20}: $E_y^{20} = -C_{20}\frac{2\pi}{a}\sin\frac{2\pi x}{a} e^{i(\omega t - h_{20} z)}$

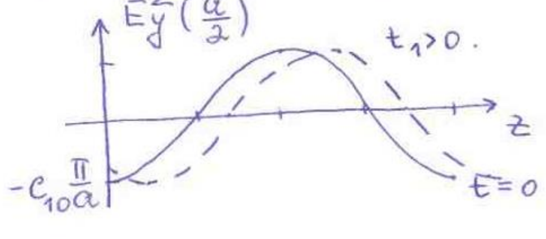
$$h_{20} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}, \quad \omega_{cr} = \frac{2\pi c}{a}, \quad f_{cr} = \frac{c}{a} = 3000 \text{ Мгц}.$$

$$\Rightarrow h_{20} = \pm i\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \Rightarrow E_y^{20} = -C_{20}\frac{2\pi}{a}\sin\frac{2\pi x}{a} e^{-|h_{20}|z} e^{i\omega t}$$

Выбрали h так, чтобы амплитуда волны экспоненциально затухала.

$E_y^\Sigma = E_y^{10} + E_y^{20}$.

$\mathrm{Re}\, E_y^\Sigma\left(\frac{a}{2}\right) = -C_{10}\frac{\pi}{a}\cos(\omega t - h_{10} z)$

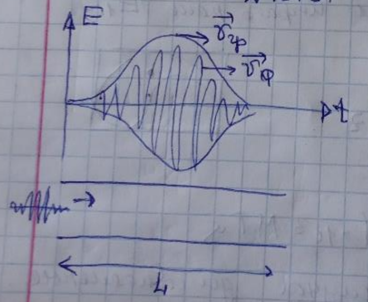


В сечении $x \neq \frac{a}{2}$ график будет такой же, как в 10.4 (а)

№10.5(а,б)

Задачи.

№10.5.



Несущая частота ω — частота заполнения

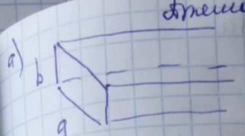
Можно следить за координатой центра этого импульса

б)

$= \vec{x}_0 \cdot 0 - i\frac{c}{\omega}\vec{y}_0\frac{\partial E_x}{\partial z} + i\frac{c}{\omega}\vec{z}_0\frac{\partial E_x}{\partial y}$

Прямоугольный волновод

а)



Не заполнен $\Rightarrow \varepsilon = \mu = 1$.

$m = 1$.

$\mathrm{Re}\,E_y = E_0 \cos(\omega t - hz)$

$h>0$ — действ-ная — т.к. распр. волна

$z = L$

$t = L / v_{гр}$

$v_\phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}$ $\qquad v_{гр} = \frac{d\omega}{dh}$

Это только при отсутствии затухании (Если нет затухания, то будет не так)

$v_{гр} \cdot v_\phi = c^2 \qquad v_{гр} = \frac{c^2}{v_\phi}$

$t = \frac{L\omega}{c^2} \Big/ \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$

б) TEM $\quad æ = 0 \quad h = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$

$t = L / v_{гр}$

$v_{гр} = \frac{d\omega}{dh} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad h = \frac{\omega}{c}$

Д/З: №10.5+, 10.7+, 10.8, 10.9+, 10.10.

$t = L \Big/ \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Д/З:
0.35
0.38
0.39*
не экзам
0.45*
0.48

10.5 За какое время радиоимпульс с ВЧ заполнением на частоте ω пройдет отрезок линии передачи длины L, если: а) это импульс первой распространяющейся волны в незаполненном прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a и b; б) это импульс главной волны(TEM) в незаполненной коаксиальной линии.

а) $t = \frac{L}{v_{гр}}$ Первая распр. волна → низшая мода TE_{10}

$$v_{гр} = c\sqrt{1-\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{для } TE_{10} \\ \varkappa = \begin{cases} \pi/a, & \text{если } a>b \\ \pi/b, & \text{если } b>a \end{cases} \\ k = \frac{\omega}{c} \text{ вакуум} \end{array} \right\} =$$

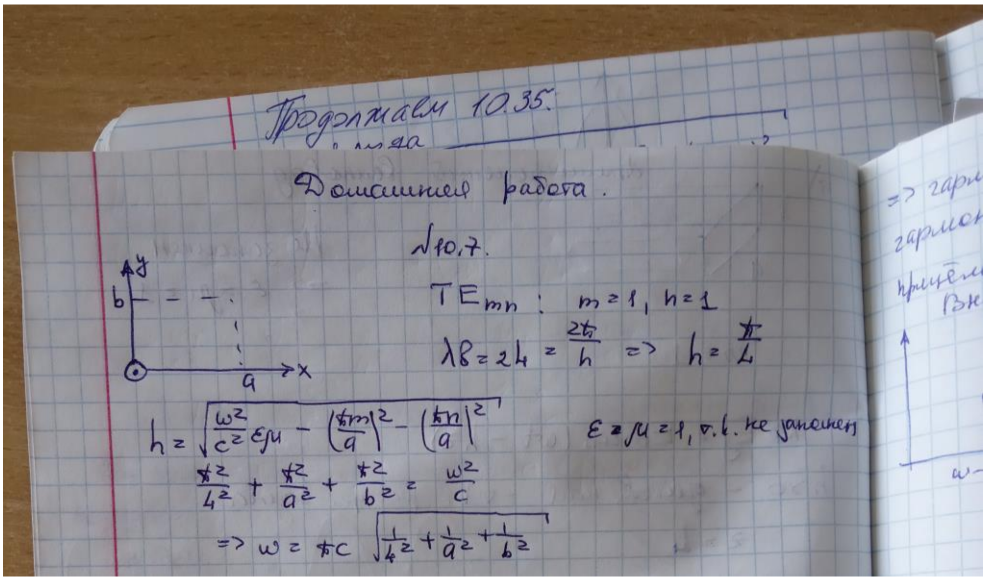
$$= c\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{a}\cdot\frac{c}{\omega}\right)^2}$$

$$t = \frac{L}{c}\left(1-\frac{\pi^2 c^2}{\omega^2 a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

б) для TEM волны $v_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = c$

$$t = \frac{L}{c}$$

№10.7



Продолжаем 10.35.

Домашняя работа.

№10,7.

TE_{mn} : $m=1$, $n=1$

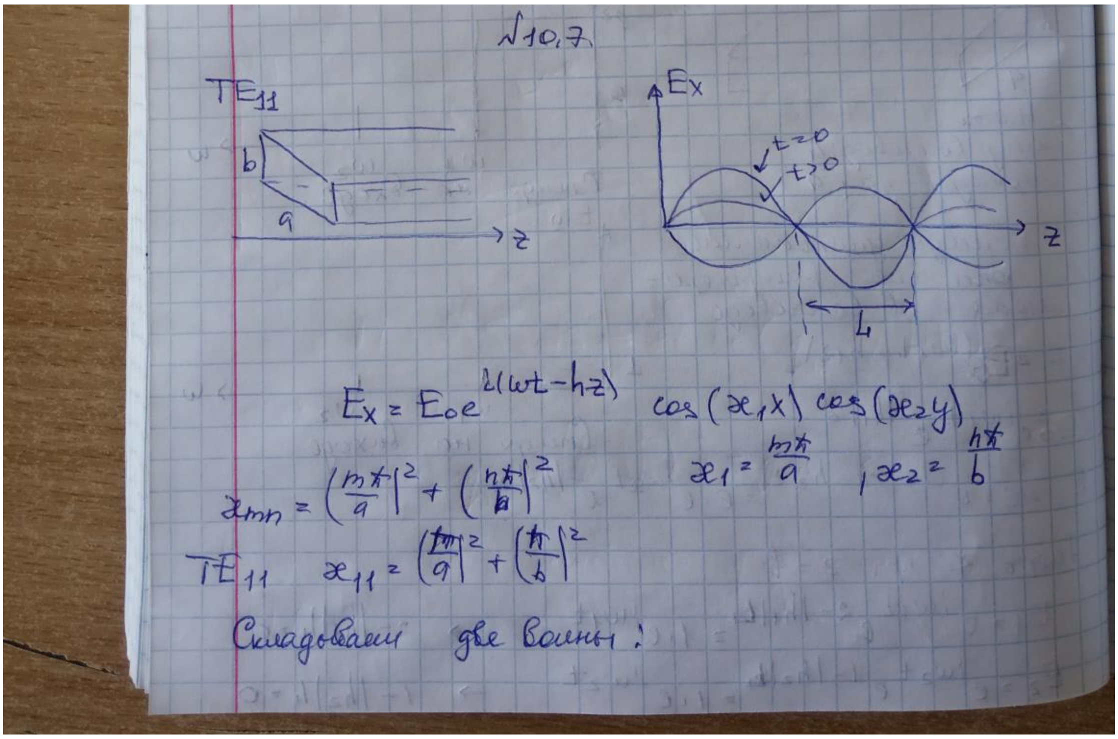
$\lambda_в = 2L = \frac{2\pi}{h} \Rightarrow h = \frac{\pi}{L}$

$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}$

$\varepsilon = \mu = 1$, т.к. не заполнен

$\frac{\pi^2}{L^2} + \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2} = \frac{\omega^2}{c}$

$\Rightarrow \omega = \pi c \sqrt{\frac{1}{L^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$



№10,7

TE_{11}

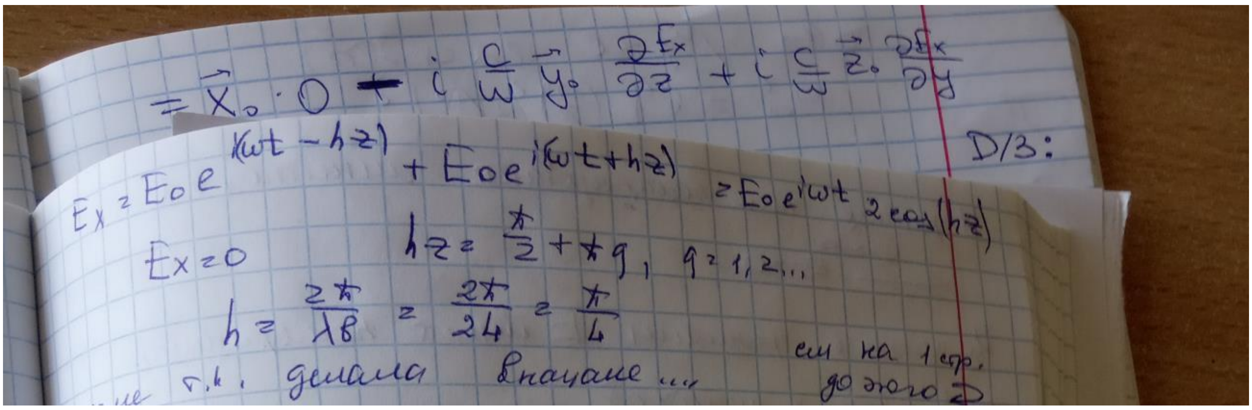
$E_x = E_0 e^{i(\omega t - hz)} \cos(æ_1 x)\cos(æ_2 y)$

$æ_1 = \frac{m\pi}{a}$, $æ_2 = \frac{n\pi}{b}$

$æ_{mn} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

TE_{11} $æ_{11} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$

Складываем две волны:



$= \vec{x}_0 \cdot 0 - i\frac{c}{\omega}\vec{y}_0 \frac{\partial E_x}{\partial z} + i\frac{c}{\omega}\vec{z}_0 \frac{\partial E_x}{\partial y}$

Д/З:

$E_x = E_0 e^{i(\omega t - hz)} + E_0 e^{i(\omega t + hz)} = E_0 e^{i\omega t}\, 2\cos(hz)$

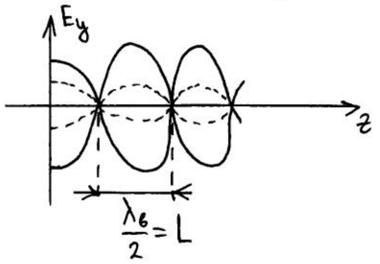
$E_x = 0$ $\quad hz = \frac{\pi}{2} + \pi q$, $q = 1, 2, \ldots$

$h = \frac{2\pi}{\lambda_в} = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$

см на 1 стр.

т.к. делала вначале ... до этого Д

10.7 Расстояние между ближайшими узлами стоячей волны TE_{11} в прямоугольном волноводе с размерами поперечного сечения a и b равно L. Найти частоту поля ω.



$$L = \frac{\lambda_в}{2}$$

$$\lambda_в = 2L = \frac{2\pi}{h}$$

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa^2}; \quad \varkappa^2 = \pi^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$4L^2 = \frac{4\pi^2}{h^2} = \frac{4\pi^2}{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)}$$

$$4\pi^2 = 4L^2\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} + \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\omega = \pi c\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{L^2}}$$

№10.8

№10.8.

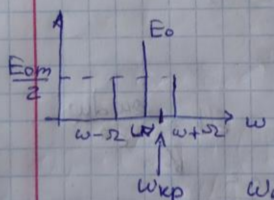
$$E = E_0(1 + m\cos\Omega t)\exp(i\omega t) = E_0\left(1 + \frac{m}{2}\left(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}\right)\right)e^{i\omega t}$$

Волна типа TE_{10}.

$$\frac{\pi c}{\omega + \Omega} < a < \frac{\pi c}{\omega}$$

$$\cos\Omega t = \frac{e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}}{2}$$

$$= E_0 e^{i\omega t} + \frac{E_0 m}{2} e^{i(\Omega+\omega)t} + \frac{E_0 m}{2} e^{i(\omega-\Omega)t}$$



Нужно найти место на этом графике для $\omega_{кр}$.

$$\omega = c\sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$\omega_{кр}\big|_{h=0} = \frac{c\pi}{a} \rightarrow a = \frac{\pi c}{\omega_{кр}}$$

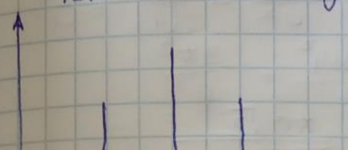
$$\Rightarrow \frac{\pi c}{\omega + \Omega} < \frac{\pi c}{\omega_{кр}} < \frac{\pi c}{\omega}$$

$$= \vec{x}_0 \cdot 0 - i\frac{c}{\omega}\vec{y}_0\frac{\partial E_x}{\partial z} + i\frac{c}{\omega}\vec{z}_0\frac{\partial E_x}{\partial y}$$

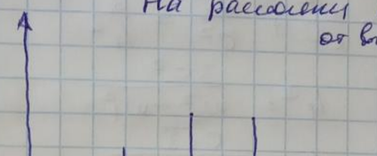
Д/З:

$\Rightarrow$ гармоника с частотой $\omega + \Omega$ будет сохраняться, а гармоники с частотами $\omega - \Omega$ и ω будут затухать, причём на частоте $\omega - \Omega$ больше убывает.

Вначале волновода

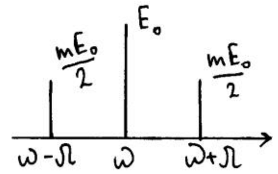


На расстоянии l от входа



№10.9.

10.8. На входе в незаполненный прямоугольный волновод с идеально проводящимистенками волна типа TE_{10} промодулирована по амплитуде на частоте Ω: $E=E_0(1+m\cos\Omega t)\exp(iwt)$. Ширина волновода a удовлетворяет условиям $\Pi c/\omega>a>\Pi c/(\omega+\Omega)$. Как зависит частотный спектр сигнала от продольной координаты z?



На входе имеем тригармонич. спектр с амплитудами E_0 и $\frac{mE_0}{2}$

Волна TE_{10} типа, т.е. $E=E_0^{max}\sin\frac{\Pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}$

Причем $\varkappa=\frac{\Pi}{a}$ $\quad h^2+\varkappa^2=\frac{\omega^2}{c^2}\Rightarrow h=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\Pi^2}{a^2}}$

Из условий на „a" видно, что h-действит. лишь для гармоники $\omega+\Omega$, т.к. $\frac{\Pi}{a}<\frac{\omega+\Omega}{c}$. Значит $E_{\omega+\Omega}$ не меняется от z

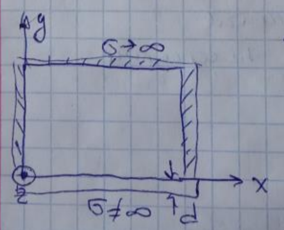
Две других затухают $\sim\exp(-ihz)$, т.к. $\frac{\Pi}{a}>\frac{\omega}{c}>\frac{\omega-\Omega}{c}\Rightarrow h$-мним.

т.е. $E_\omega\sim\exp\left(-z\sqrt{\frac{\Pi^2}{a^2}-\frac{\omega^2}{c^2}}\right)$

и $E_{\omega-\Omega}\sim\exp\left(-z\sqrt{\frac{\Pi^2}{a^2}-\frac{(\omega-\Omega)^2}{c^2}}\right.$

№10.16

Домашняя работа.



√10.16.

$a > b$, TE_{01}, $d \gg \delta = \frac{c}{\sqrt{8\pi\mu\omega\sigma}}$

$h = h' + i h''$

Нужно найти h''?

$$\eta_s = \sqrt{\frac{\mu_{ст}}{\varepsilon_{ст}}} = \sqrt{i\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} \quad \mu_{ст} = 1.$$

$$h'' = -\frac{P_{ст}}{2\Pi} \qquad \Delta P_{ст} = P_{ст} \cdot \Delta z$$

$$\Delta P_{ст} = \frac{c}{8\pi}\oint_L \mathrm{Re}\,\eta_s\,|\vec{H_\tau}|^2\,\Delta z\,dl$$

$$\Delta P_{ст} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}\,\Delta z\int_0^a |\vec{H_\tau}|^2\,dx \quad (*)$$

$$H_x = -\frac{hc}{\omega}E_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{i\omega t - ihz}, \quad H_z = \frac{ic\varkappa}{\omega}E_0\cos\varkappa x\,e^{i(\omega t - hz)}$$

$$\Delta P_{ст} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\,\Delta z\left(\frac{hc}{\omega}\right)^2E_0^2\int_0^a\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx + $$
$$+\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\,\Delta z\left(\frac{\varkappa}{k}\right)^2E_0^2\int_0^a\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{c}{8\pi}E_0^2\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\,\Delta z\,\frac{a}{2}\left(\frac{h^2+\varkappa^2}{k^2}\right)$$

$$\Pi = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\frac{1}{\eta_{\perp 8}}\iint_\Sigma |\vec{E}|^2\,dx\,dy = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\,\eta_{\perp 8}\iint_\Sigma |\vec{H_\perp}|^2\,dx\,dy$$

$$\Pi = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{k}{h}\right)\right)\left|\frac{h}{k}\right|^2\int_0^b dy\int_0^a E_0^2\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\frac{k}{h}\,b\,E_0^2\,\frac{a}{2}\left|\frac{h}{k}\right|^2 = \frac{c}{8\pi}\frac{h}{k}\,b\,E_0^2\frac{a}{2} \qquad h^2 + \varkappa^2 = k^2$$

$$|h''| = \frac{\frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\left(\frac{h^2+\varkappa^2}{k^2}\right)E_0^2\frac{a}{2}}{2\,\frac{c}{8\pi}\frac{h}{k}\,b\,E_0^2\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\,\frac{1}{2b}\,\frac{k}{h}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \qquad h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

h'' - отрицательное => затухает в ту сторону, в в распространения.

H_τ - касательная к стенке

$H_\perp$ - поперечная компонента поля.

В (*) нужно подставить это ↓, т.к. касательная (касательная компонента состоит из двух

$$\vec{H_\tau}\Big|_{стенки} = H_z\Big|_{стенки}\cdot\vec{z_0} + H_\perp\Big|_{стенки}\cdot\vec{\tau}$$

... но в этом приближении что мы делаем и почему? Так как были ... с идеальными стенками, в этом случае можем ... $|\eta_s| \ll 1$ ... [illegible]

$\vec{H_\tau} \simeq \vec{H_\tau}^{(0)}$, $\vec{H_\tau} \simeq \vec{H_\tau}^{(0)}$ [illegible]

10.16. Рассчитать постоянную затухания h'' волны низшего типа (TE_{10}) в прямоугольном аолноводе с размерами поперечного сечения a, b $(a>b)$, если одна из его широких стенок имеет конечную проводимость σ, а остальные стенки идеально проводящие. Толщина неидеальной стенки много больше толщины скин-слоя.

$$E_y = E_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - hz)}\ ; \quad \operatorname{rot} E = -\frac{i\omega}{c} H \Rightarrow H = -\frac{c}{i\omega}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$H_x = \frac{c}{i\omega}\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{c}{i\omega}(-ih)E_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - hz)} = -\frac{ch}{\omega} E_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - hz)}$$

$$H_y = 0\ ; \quad H_z = -\frac{c}{i\omega}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{ic}{\omega} E_0 \frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - hz)} = iE_0\frac{\pi c}{a\omega}\cos\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - hz)}$$

$$|H_\tau|^2 = |H_x|^2 + |H_z|^2 = \left(\frac{ch}{\omega}\right)^2 E_0^2 \sin^2\frac{\pi x}{a} + \left(\frac{\pi c}{a\omega}\right)^2 E_0^2 \cos^2\frac{\pi x}{a}$$

$$\oint |H_\tau|^2 dl = \frac{E_0^2}{k^2}\int_0^a \left\{h^2 \sin^2\frac{\pi x}{a} + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos^2\frac{\pi x}{a}\right\} dx = \frac{E_0^2}{k^2}\int_0^a \left\{\frac{h^2}{2}\Big(1 - \underbrace{\cos\frac{2\pi x}{a}}_{0}\Big) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\Big(1 + \underbrace{\cos\frac{2\pi x}{a}}_{0}\Big)\right\} dx =$$

$$= \frac{E_0^2}{k^2}\frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right)}_{k^2}\cdot a = \frac{E_0^2 a}{2}$$

$$\iint |H_\perp|^2 d\Sigma = \iint |H_x|^2 dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^b dy \left(\frac{ch}{\omega}\right)^2 E_0^2 \underbrace{\sin^2\frac{\pi x}{a}}_{\frac{1-\cos\frac{2\pi x}{a}}{2}} = \left(\frac{ch}{\omega}\right)^2 E_0^2 \int_0^b dy \int_0^a \frac{1 - \overset{=0}{\cos\frac{2\pi x}{a}}}{2} dx =$$

$$= \left(\frac{ch}{\omega}\right)^2 E_0^2\, b\, \frac{a}{2} = \frac{ab}{2} E_0^2 \left(\frac{h}{k}\right)^2$$

тогда $h'' = \dfrac{\operatorname{Re}\zeta_s \oint |H_\tau|^2 dl}{2\operatorname{Re}\zeta_\perp \iint |H_\perp|^2 d\Sigma}$ и $\operatorname{Re}\zeta_\perp = \dfrac{k}{h}$, т.к. $\varepsilon = \mu = 1$

$$h'' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\cdot \frac{E_0^2 a}{2} \Big/ \frac{ab}{2}E_0^2\left(\frac{h}{k}\right)^2\cdot\frac{k}{h} \Rightarrow h'' = \frac{k}{2bh}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}$$

$$\zeta_\perp = \frac{|E_\perp|}{|H_\perp|} = \{\text{для } TE_{10}\} = \frac{|E_y|}{|H_x|} = \frac{1}{\frac{ch}{\omega}} = \frac{k}{h}$$

N 10.16.

TE_{10}, $a>b$, $\varkappa=\frac{\pi}{a}$

$$\left.\begin{aligned} H_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\psi^m \\ \bar{H}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^m \\ \bar{E}_\perp &= -\frac{1}{\varepsilon}[\nabla_\perp\psi^m, \bar{z}^0] \\ E_z &= 0 \end{aligned}\right\} e^{i(\omega t-hz)} \quad \left| \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^m+\varkappa^2\psi^m=0, \\ &\left.\frac{\partial\psi^m}{\partial n}\right|_e=0. \\ &\psi^m=c_1\cos\frac{\pi x}{a}. \end{aligned}\right.$$

$\varepsilon,\mu=1$, $\bar{E}_\perp=c_1\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}[\bar{x}^0,\bar{z}^0]e^{i(\omega t-hz)}=\bar{y}_0(-c_1\frac{\pi}{a})\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}=$
$=\bar{y}_0E_0\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}$, $\bar{H}_\perp=\bar{x}_0\frac{h}{k_0}c_1\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}=$
$=-\bar{x}_0\frac{h}{k_0}E_0\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}$, $H_z=\frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}{ik_0}c_1\cos\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}=$
$=-\frac{\pi E_0}{ik_0a}\cos\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t-hz)}$

$\zeta_{\perp b}=\frac{k_0}{h}$ (если $\varepsilon,\mu=1$)

$\zeta_{пов}=\sqrt{\frac{\mu_к}{\varepsilon_к}}=\sqrt{\frac{i\omega}{4\pi\sigma}}=(i+1)\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}$

$$|h''|=\frac{\operatorname{Re}\zeta_{пов}\oint\limits_L|H_\tau|^2dl}{2\operatorname{Re}\zeta_{\perp b}\iint|H_\perp|^2ds}$$

$\bar{H}_\tau=\bar{H}_\perp+\bar{H}_z$, $|H_\tau|^2=H_\perp H_\perp^*+H_zH_z^*=\frac{h^2}{k_0^2}E_0^2\sin^2\frac{\pi x}{a}+$
$+\frac{\pi^2E_0^2}{k_0^2a^2}\cos^2\frac{\pi x}{a}$

$\oint\limits_L|H_\tau|^2dl=\int_0^a\frac{E_0^2}{k_0^2}\left(h^2\sin^2\frac{\pi x}{a}+\frac{\pi^2}{a^2}\cos^2\frac{\pi x}{a}\right)dx=$
$=\frac{E_0^2}{k_0^2}\cdot\frac{a}{2}\left(h^2+\frac{\pi^2}{a^2}\right)=\frac{E_0^2a}{2}.$

$\iint|H_\perp|^2ds=\int_0^a\int_0^b\left(\frac{h}{k_0}E_0\sin\frac{\pi x}{a}\right)^2dxdy=\frac{h^2E_0^2ba}{2k_0^2}$

$$|h''|=\frac{\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}}{2\frac{k_0}{h}}\,\frac{\frac{E_0^2a}{2}}{\frac{h^2E_0^2ba}{2k_0^2}}=\frac{k_0}{2hb}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}$$

№10.18(б)

№10.18. (б)

$\sigma \neq \infty$ Найти: h''. TEM

$$\Pi = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot 1 \iint_{S} |\vec{E}_r|^2 dS =$$

$$= \frac{c}{8\pi} 2\pi \int_a^b \frac{1}{r^2} r\,dr = \frac{c}{8\pi} \cdot 2\pi \ln\frac{b}{a}$$

т.к. контур при определённом r, ∞

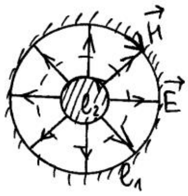
$$\Delta P_{\sigma} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta_s \Delta z \left[\oint_{L_1} \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{= 1/a^2} dl_1 + \oint_{L_2} \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{1/b^2} dl_2 \right] =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \Delta z \left[2\pi \cdot a \frac{1}{a^2} + 2\pi b \frac{1}{b^2} \right] = \frac{c}{8\pi} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \Delta z \left(\frac{a+b}{ab} \right)$$

$$h'' = \frac{P_{\sigma}}{2\Pi} = \frac{\frac{c}{8\pi} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \left(\frac{a+b}{ab} \right)}{2 \cdot \frac{c}{8\pi} \cdot 2\pi \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \frac{a+b}{2ab} \frac{1}{\ln(b/a)}$$

10.18(б). Решить задачу, аналогичную 10.16:

для главной волны *TEM* в неидеальной коаксиальной линии (проводимость $\sigma \neq \infty$); радиусы внутреннего и наружного проводников линии a и b.



Поле коаксиала в глав. представлении $E_r = \frac{A}{r}$

$H_\varphi = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, E_r$

Найдем $P = \frac{c}{8\pi} \iint\limits_{\Sigma} \frac{A^2}{r^2}\, dS = \frac{c}{8\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b dr\, \frac{A^2}{r^2} r = \frac{c}{8\pi} A^2 2\pi \ln\frac{a}{b}$

Запишем $P_s = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \zeta_s \oint\limits_{\ell} |H_\tau^2|\, d\ell = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\, \left[\int\limits_{\ell_1} \frac{A^2}{r^2} r\, d\varphi \Big|_{r=b} + \int\limits_{\ell_2} \frac{A^2}{r^2} r\, d\varphi \Big|_{r=a}\right] =$

$= \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\, A^2 2\pi \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$

Отсюда $h'' = \frac{P_s}{2P} = \frac{a+b}{ab} \Big/ 2\ln\frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \cdot \frac{a+b}{2ab} \cdot \frac{1}{\ln\frac{a}{b}}$

N 10.18 (б) стр 9

$\varepsilon, \mu = 1, \quad H_\varphi = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kz)}, \quad E_r = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kz)}$

$\zeta_{пов} = \sqrt{\frac{i\omega}{4\pi\sigma}} = (i+1)\sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}$

$\zeta_{\perp б} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 1$

$$|h''| = \frac{\operatorname{Re} \zeta_{пов} \oint\limits_L |H_\tau|^2 d\ell}{2 \operatorname{Re} \zeta_{\perp б} \iint |H_\perp|^2 dS}$$

$\oint\limits_L |H_\tau|^2 d\ell = 2\pi\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) E_0^2$

$\iint |H_\perp|^2 dS = 2\pi \ln\frac{b}{a}\, E_0^2$

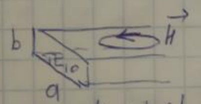
$|h''| = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\, \frac{(a+b)}{2ab} \left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1}$

№10.19

№ 10,19.

Дано: $a > b$, TE_{10}, ω, P

$P = \Pi$



$$E_y = E_0 \sin ϰx \, e^{i(\omega t \mp hz)}$$

$$\Pi = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{\eta_{\text{ЦВ}}} \iint_\Sigma |\vec{E}|^2 dS$$

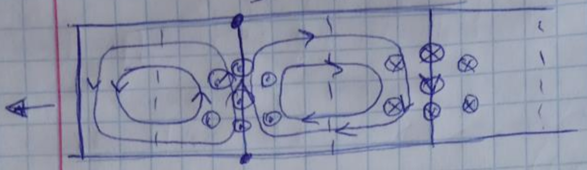
$$\Pi = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{h}{k} \iint_\Sigma E_m^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x \, dx\,dy =$$

$$= \frac{c}{8\pi} \frac{h}{k} E_m^2 \int_0^b dy \int_0^a \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2\frac{\pi}{a} x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{ch\,ba}{16\pi k} E_m^2 \quad \Rightarrow E_m = \left(\frac{16\pi k P}{ch\,ba}\right)^{1/2}$$

$$h = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

→ седловая точка поля



↑ поле не знает куда ему направлятся поэтому здесь оно 0.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{i\omega}{c}\vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{ic}{\omega}\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{ic}{\omega}\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$H_x = -\frac{ic}{\omega}\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{hc}{\omega}E_0 \sin x\varkappa\, e^{i\omega t - ihz}$$

$$H_z = \frac{ic}{\omega}\frac{\partial E_y}{\partial x} = E_0\frac{ic\varkappa}{\omega}\cos\varkappa x\, e^{i\omega t - ihz} =$$

$$= i\frac{c\pi}{a\omega}\cos\varkappa x\, E_0\, e^{i\omega t - ihz}$$

$$E_0 = E_m$$

$$|H_x|_m = \frac{ch}{\omega}E_m \quad \text{при } x = \frac{a}{2}$$

$$|H_z|_m = \frac{c\pi}{a\varkappa}E_m \quad \text{при } x = 0,\ a$$

$P = 1$ кВт $\quad a = 10$ см

Получена в CGS $\quad 1$ Дж $= 10^7$ эрг

1 кВт $= 10^{10}$ эрг/с

10.19. Найти максимальные амплитуды электрического и магнитного полей E_m и H_m в идеальном прямоугольном воноводе с размерами поперечного сечения a и b $(a>b)$, если в нем распространяется волна низшего типа (TE_{10}) частоты ω, несущая вдоль волновода мощность P. Вычислить значение E_m и H_m при a=10см, b=5см, $\omega=5\cdot10^{10}$ 1/с, P=1кВт.

Для прям. волновода TE_{10} волны $E_y = E_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - hz)}$

$H = -\frac{ch}{\omega} E_y x_0 + i\frac{\pi c}{\omega a} E_0 \cos\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - hz)}$

$P_z = \frac{c}{8\pi}\oint Re[EH^*]dS = \frac{c}{8\pi}\int_0^a\int_0^b \frac{ch}{\omega} E_y^2 dx dy = \frac{c}{8\pi}\frac{h}{k} b\int_0^a E_0^2 \sin^2\frac{\pi x}{a}dx = \frac{chb}{8\pi k}E_0^2\int_0^a \frac{1}{2}\left(1-\cos^2\frac{\pi x}{a}\right)\cdot$

$\cdot dx = \frac{chb}{8\pi k}E_0^2\frac{a}{2}$

тогда $E_0 = E_{max} = \sqrt{\frac{16\pi kP}{chab}}$

$S = \frac{c}{8\pi}Re[EH^*]$ – энергия бежит по оси z

$|S|$ – распределение ин-ти полей по попереч сечению

т.к. H_x и H_z сдвинуты на $\frac{\pi}{2}$, то $\max H$ определяет либо H_x^{max} либо H_y^{max}, т.е. $H_{max} = E_{max}\frac{1}{k}\max\{h, \frac{\pi}{a}\}$

N 10.19

TE_{10}, $a>b$, $\varepsilon, \mu = 1$

$$\left.\begin{aligned} H_z &= \frac{\varkappa^2}{ik_0\varepsilon\mu}\psi^m \\ \bar{H}_\perp &= -\frac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\psi^m \\ \bar{E}_\perp &= -\frac{1}{\varepsilon}[\nabla_\perp\psi^m, \bar{z}^0] \\ E_z &= 0 \end{aligned}\right\} e^{i(\omega t - hz)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^m + \varkappa^2\psi^m = 0, \\ &\left.\frac{\partial\psi^m}{\partial n}\right|_e = 0. \\ &\psi^m = c_1\cos\frac{\pi x}{a} \end{aligned}$$

$\bar{E}_\perp = \bar{y}_0\left(-c_1\frac{\pi}{a}\right)\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t - kz)} = \bar{y}_0 E_{max}\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t - kz)}$,

$\bar{H}_\perp = \bar{x}_0\frac{h}{k_0}c_1\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t - kz)} = -\bar{x}_0\frac{1}{\zeta_{\perp b}}E_{max}\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t - kz)}$.

$P = \frac{c}{8\pi}Re\,\zeta_{\perp b}\iint|H_\perp|^2 dS = \frac{c}{8\pi}\frac{E_{max}^2}{\zeta_{\perp b}}\frac{ab}{2}$,

$E_{max} = \left(\frac{16\pi k_0 P}{chab}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\bar{H} = H_z\bar{z}^0 + \bar{H}_\perp = -\bar{z}^0\frac{\frac{\pi}{a}E_{max}}{ik_0}\cos\frac{\pi x}{a}\cdot e^{i(\omega t - hz)} - \bar{x}_0\frac{1}{\zeta_{\perp b}}E_{max}\sin\frac{\pi x}{a}e^{i(\omega t - hz)}$.

$H_{max} = \sqrt{H_\perp^2 - H_z^2} = \frac{E_{max}}{k_0}\max\{h, k\}$

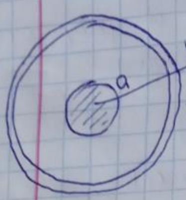
№10.22

Домашняя работа.

№10.22.

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_a^b E_{12}\,dr$$

а)

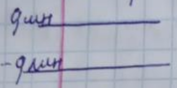


$$\int E_n\,dS = 4\pi Q_{охв}$$

$$2\pi r E_r = 4\pi Q_{охв}$$

$$E_r = \frac{2Q_{охв}}{r} = \frac{2q_{лин}}{r} = \frac{2Q}{\Delta z\, r}$$

$$Q = q_{лин}\cdot\Delta z$$



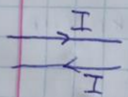
$$C=\frac{q_{лин}}{V}$$

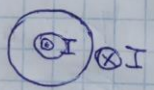
V – разность потенциалов между проводами

$q_{лин}$ – заряд на единицу длины

$$\varphi_1-\varphi_2=\int_a^b \frac{2q_{лин}}{r}\,dr = 2q_{лин}\ln\frac{b}{a}$$

$$C=\frac{\varepsilon q_{лин}}{2q_{лин}\ln\frac{b}{a}} \Rightarrow \boxed{\frac{\varepsilon}{2\ln b/a}=C}$$





Найдём поток ψ через прямоугольник един. длины

$$\psi=\iint_S B_n\,dS$$

$$\oint_L H_\varphi\,dl = \frac{4\pi}{c}I_{охв}=\frac{4\pi}{c}I$$

$$H_\varphi\, 2\pi r = \frac{4\pi}{c}I \Rightarrow H_\varphi=\frac{2I}{cr}$$

$$dS = dr\,dz$$

$B_r = \mu H_\varphi$

$$\Psi = \mu \int_0^z \int_a^b \frac{2I}{cr} dz\,dr = \frac{2I}{c} \ln\left(\frac{b}{a}\right) z\mu$$

Ψ на единицу длины $z = 1$.

$$\Psi' = \frac{2I}{c} \mu \ln\frac{b}{a}$$

с другой стороны $\Psi = \frac{LI}{c}$ $\Rightarrow$ $\boxed{L = 2\mu \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Это первый способ. Второй способ – можно через энергию $W = \frac{LI^2}{2c^2}$

Почему можно использовать э.ст и маг. ст. задачи? Потому что в поперечном сечении эл и маг поля имеют статическую структуру

$$\boxed{LC = \varepsilon\mu \text{ для } \forall \text{ линии передач}}$$

Д-во:

Для I и V есть телеграф. ур-ние

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{LC}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{LC}{c^2}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0$$

+ нет зав-ти от попереч. коор-т.

$$V(z,t) = f_1\left(z - \frac{c}{\sqrt{LC}}t\right) + f_2\left(z + \frac{c}{\sqrt{LC}}t\right)$$

для ур-ния $\frac{d^2V}{dz^2} + k^2 V = 0$

$$V(z,t) = A_1 e^{i(\omega t - kz)} + A_2 e^{i(\omega t + kz)} \qquad k = \frac{\omega}{h}$$

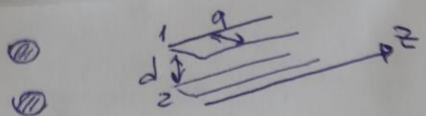
$$V_\varphi = \frac{\omega}{h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$k = h$

$$Z_B = \frac{V}{I} = \sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{c} = \sqrt{\frac{2\mu\ln\left(\frac{b}{a}\right) 2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\varepsilon}}\frac{1}{c} = \frac{2\ln\frac{b}{a}}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

№10.22(б).

Здесь поле как бы кусочек плоской волны засунутой в между этими пластинами



$$C = \frac{q}{V}$$

$$V = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_\ell \, dl = \frac{4\pi q}{a\Delta z} d$$

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} = 4\pi Q_{охв} = 4\pi q$$

$$E a \cdot \Delta z = 4\pi q \rightarrow E = \frac{4\pi q}{a\Delta z}$$

$$C = \frac{\varepsilon a \Delta z}{4\pi d} \qquad \boxed{C_{пог} = \frac{\varepsilon a}{4\pi d}}$$

$$W = \frac{LI^2}{2c^2} = W = \int \frac{B^2}{\mu 8\pi} dV = \frac{\mu^2 16\pi^2 I^2}{\mu^2 a^2 c^2 8\pi} a d \Delta z =$$

$$= \frac{2\pi q^2 d}{a \Delta z}$$

$$\frac{LI^2}{2c^2} = \frac{2\pi d}{a} \frac{I^2}{c^2} \Delta z$$

$$L = \frac{4\pi d}{a} \frac{I^2 c^2}{c^2 I^2} \Delta z \qquad \boxed{L_{пог.} = \frac{4\pi d}{a}}$$

$$H = \frac{4\pi}{c} I \rightarrow B = \mu \frac{4\pi}{c} \frac{I}{a}$$

$$Z_В = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{4\pi d \, 4\pi d}{a a}} \frac{1}{c} = \frac{4\pi d}{ca}$$

N 10.22.

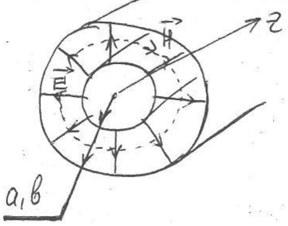
~~Найти $\omega_{кр}$ для TE_{10} в прямоуг. волноводе $(a > b)$~~

Рассчитать экв. погонные параметры (L, C), $Z_в$ для главных TEM-волн в ЛП: а) коаксиальная линия с $r_1 = a$, $r_2 = b$;

б) полосковая линия из двух $\parallel$-х лент шириной a и $d \ll a$.

Решение:

а) Коаксиальная линия:



Для главной TEM-волны в коакс. линии поперечная структура поля имеет статич. характер.

$$\vec{H} = \vec{\varphi}_0 \frac{H_0}{r}, \quad H_0 = \text{const}, \quad H_0 = \frac{2I}{c}; \qquad \vec{E}_\perp = \xi_\perp [\vec{H}_\perp \times \vec{n}],$$

$$\vec{E} = \vec{r}_0 \frac{E_0}{r} = \frac{2\rho_{лин}}{r}\vec{r}_0. \qquad 1 = \xi_\perp = \frac{E_\perp}{H_\perp} = \frac{\rho_{лин} c}{I}$$

$$V = \int_a^b E_r dr = 2\rho_{лин} \ln b/a. \qquad E_r \cdot 2\pi r \cdot 1 = 4\pi \rho_{лин}$$

$$C = \frac{\rho_{лин}}{V} = 2^{-1} \ln^{-1}(b/a) = \boxed{\frac{1}{2\ln b/a} = C} \text{ — погонная ёмкость.} \qquad E_r = \frac{2\rho_{лин}}{r}$$

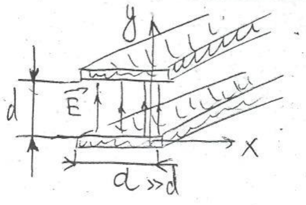
$\frac{\Delta L I}{c} = \Delta\Psi$ — изменение поток. м/м. индукции на длине Δz

$$\frac{LI}{c} = \Psi = \iint_{S_\Psi} B_n dS_\Psi = \frac{2I}{c}\int_a^b \frac{1 \cdot dr}{r} = \frac{2I}{c}\ln b/a = \frac{LI}{c} \Rightarrow \boxed{L = 2\ln b/a.}$$

коэф-т самоиндукции.

$$Z_в = \frac{V}{I} = \frac{2\rho_{лин}\ln b/a}{I} = \frac{2\rho_{лин}\ln b/a}{\rho_{лин} \cdot c} = \boxed{\frac{2\ln b/a}{c} = Z_в}$$

б) Полосковая линия:



$$V = \int_0^d E_y dy; \quad E_y = 4\pi\sigma, \quad V = 4\pi\sigma d.$$

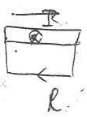
$$C = \frac{\sigma \cdot a}{V} = \frac{1 \cdot a}{4\pi d} = \frac{\rho_{лин}}{V} = \boxed{\frac{a}{4\pi d} = C}$$

С другой ст-ны, $CL = 1 \Rightarrow \boxed{L = \frac{4\pi d}{a}}$

$$Z_в = \frac{U}{I} = \frac{4\pi\sigma d}{I} = \frac{4\pi\sigma d}{\cancel{1}\sigma ac} = 2 \cdot \frac{2\pi d}{ca} = \frac{4\pi d}{ac}.$$

$$\xi_\perp = \frac{E_\perp}{H_\perp} = 1 = \frac{4\pi\sigma}{H_\perp}.$$

$$\boxed{Z_в = \frac{4\pi d}{ac}}$$



$$\int B_e dl = \frac{4\pi}{c} I.$$

$$B_e a = \frac{4\pi}{c} I$$

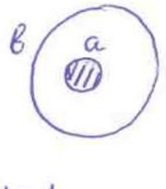
$$B_e = \frac{4\pi I}{ac}$$

$$B_{tot} = \frac{4\pi I}{ac}$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{k}{h} = 1 = \frac{4\pi b}{4\pi I} ac = \frac{1\sigma ac}{I} = 1$$

стр. 40

N 10.22.

а) 

$\varepsilon, \mu = 1.$

$$\oint\limits_S \bar{D}\,d\bar{S} = 4\pi q, \quad D_r 2\pi r l = 4\pi q_{лин} l,$$

$$D_r = \frac{2q_{лин}}{r} = E_r, \quad V = \int_a^b E_r\,dr = 2q_{лин}\ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

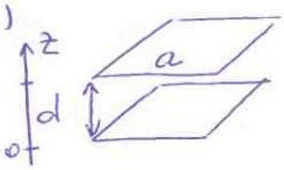
$$C_{пог} = \frac{q_{лин}}{V} = \frac{1}{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}.$$

$$\oint\limits_L H\,dl = \frac{4\pi}{c} I, \quad H_\varphi 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I, \quad H_\varphi = \frac{2I}{cr} = B_\varphi.$$

$$\Phi = \iint B_\varphi\,dS = l\int_a^b B_\varphi\,dr = l\frac{2I}{c}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad \Phi = \frac{LI}{c},$$

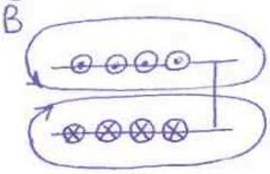
$$L = 2l\ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad L_{пог} = 2\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$Z_b = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L_{пог}}{C_{пог}}} = \frac{2}{c}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

б) 

$$\oint\limits_S \bar{D}\,d\bar{S} = 4\pi q, \quad D_n a l = 4\pi \sigma a l,$$

$$D_n = 4\pi\sigma = E_n, \quad V = \int_0^d E_n\,dz = 4\pi\sigma d$$



$$C_{пог} = \frac{q_{лин}}{V} = \frac{\sigma a}{4\pi\sigma d} = \frac{a}{4\pi d}.$$

$$\oint\limits_L H\,dl = \frac{4\pi I}{c}, \quad Ha = \frac{4\pi I}{c}, \quad H = \frac{4\pi I}{ca}.$$

$$\Phi = \iint B_n\,dS = l\int_0^d \frac{4\pi I}{ca}\,dz = \frac{4\pi I}{ca} l d,$$

$$\Phi = \frac{LI}{c}, \quad L = \frac{4\pi l d}{a}, \quad L_{пог} = \frac{4\pi d}{a}.$$

$$Z_b = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L_{пог}}{C_{пог}}} = \frac{4\pi d}{ac}$$

№10.23

№10.23.

$$Z(L) = Z_B \frac{Z_H + i Z_B tg(kL)}{Z_B + i Z_H tg(kL)}$$

а) $Z_H = \frac{1}{i\omega C}$

$$Z(L) = Z_W \frac{1/i\omega C + i Z_W tg(kL)}{Z_W + \frac{1}{\omega C} tg(kL)}$$

б) $$Z(L) = Z_W \frac{i\omega L + i Z_B c^2 tg(kL)}{Z_W c^2 - \omega L\, tg(kL)}$$

в) $Z_H = Z_W$

$$Z(L) = Z_W \frac{Z_W + i Z_W tg(kL)}{Z_W + i Z_W tg(kL)} = Z_W$$

г) $Z_H = Z_{W1}$

$$Z(L) = Z_W \frac{Z_{W1} + i Z_W tg(kL)}{Z_W + i Z_{W1} tg(kL)}$$

д) $Z_H = 0$

$$Z(L) = Z_W \frac{0 + i Z_W tg(kL)}{Z_W} = i Z_W tg(kL)$$

е) $Z_H = \infty$

$$Z(L) = Z_W \frac{\infty + i \cancel{Z_W tg(kL)}}{\cancel{Z_W} + i \cdot \infty \cdot tg(kL)} = -i Z_W ctg(kL)$$

10.23. Найти коэффициент отражения волны Γ от конца двупроводной линии и входной импеданс $Z(L)$ на расстоянии L от конца, если ее волновое сопротивление равно Z_w, расстояние между проводами много меньше длины волны, а к концу линии подключена следующая нагрузка: а) емкость C; б) индуктивность L; в) сопротивление $R=Z_w$; г) другая линия передачи бесконечной длины с волновым сопротивлением Z_{w1}; д) сопротивление $R=0$ (линия закорочена); е) сопротивление $R=\infty$ (линия разомкнута).

$$\Gamma = \frac{z_н - z_w}{z_н + z_w} \qquad z(L) = z_w \frac{z_н + i z_w \operatorname{tg} kL}{z_w + i z_н \operatorname{tg} kL}$$

а) $z_н = \frac{1}{j\omega C}$ $$z(L) = z_w \frac{\frac{1}{j\omega C} + i z_w \operatorname{tg} kL}{z_w + i \frac{1}{j\omega C} \operatorname{tg} kL} = i z_w \frac{-1 + z_w \omega C \operatorname{tg} kL}{z_w \omega C + \operatorname{tg} kL}$$

$$\Gamma = \frac{1/j\omega C - z_w}{1/j\omega C + z_w} = \frac{1 - j\omega C z_w}{1 + j\omega C z_w} \Rightarrow |\Gamma| = 1$$ - чисто стоячая волна

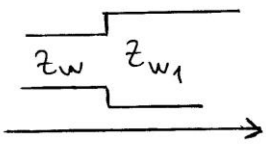
Для ёмк. нагрузки входной импеданс чисто мнимый и он повсюду такой

б) $z_н = j\omega L$ $\quad \Gamma = \frac{j\omega L - z_w}{j\omega L + z_w} \rightarrow |\Gamma| = 1$ но другая фаза

$$z(L) = z_w \frac{j\omega L + i z_w \operatorname{tg} kL}{z_w + i j\omega L \operatorname{tg} kL} = i z_w \frac{\omega L + z_w \operatorname{tg} kL}{z_w - \omega L \operatorname{tg} kL}$$

в) Согласованная нагрузка $R = z_w \rightarrow \Gamma = 0$

В ЛП чисто бегущая волна, поэтому $z_{вх} = z_w = const$

г) 

т.к. импеданс ф-ция непрерывная, а во 2й линии чисто бегущая волна, то всюду $z = z_{w_1} = const \rightarrow$ нагрузка $z_н = z_{w_1}$

Отражения нет в силу бесконечности линии (реально длина волновода должна быть >> масштаба затухания

д) $R=0$ $\quad \Gamma = \frac{0 - z_w}{0 + z_w} = -1 \Rightarrow$ при закороченной линии будет чисто стоячая волна, т.к. полное отражение

$$z(L) = z_w \frac{0 + i z_w \operatorname{tg} kL}{z_w + i \cdot 0} = i z_w \operatorname{tg} kL$$ - импеданс чисто мнимый

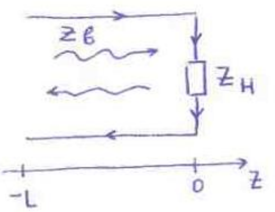
e) $R \to \infty$ $\Gamma = 1$ $z(L) = \lim\limits_{z_n \to \infty} z_w \dfrac{z_n + i z_w \operatorname{tg} kL}{z_w + i z_n \operatorname{tg} kL} = -i z_w \operatorname{ctg} kL$

Случай принципиально тот же, что и в случае g)

Сложности с теми точками, где $\operatorname{tg} kL = 0$. там $|z_n| \to \infty$

но неясно действ она или мнимая

№ 10.23



$$\begin{cases} V(z) = V_i e^{-ikz} + V_r e^{ikz}, \\ I(z) = I_i e^{-ikz} + I_r e^{ikz}. \end{cases} \quad \Bigg| \quad \frac{V_i}{I_i} = z_в, \ \frac{V_r}{I_r} = -Z_в$$

$$I(z) = \frac{V_i}{z_в} e^{-ikz} - \frac{V_r}{z_в} e^{ikz}$$

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_i e^{-ikz} + V_r e^{ikz}}{\frac{V_i}{z_в} e^{-ikz} - \frac{V_r}{z_в} e^{ikz}} =$$

$$= z_в \frac{e^{-ikz} + \frac{V_r}{V_i} e^{ikz}}{e^{-ikz} - \frac{V_r}{V_i} e^{ikz}} = z_в \frac{e^{-ikz} + \Gamma e^{ikz}}{e^{-ikz} - \Gamma e^{ikz}}$$

при $z = 0$: $\quad Z(0) = Z_н = z_в \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \Rightarrow \boxed{\Gamma = \frac{z_н - z_в}{z_н + z_в}}$

$$Z(z) = z_в \frac{e^{-ikz} + \Gamma e^{ikz}}{e^{-ikz} - \Gamma e^{ikz}} = z_в \frac{\cos kz - i \sin kz + \Gamma(\cos kz + i \sin kz)}{\cos kz - i \sin kz - \Gamma(\cos kz + i \sin kz)}$$

$$= Z_в \frac{\cos kz (1+\Gamma) - i \sin kz (1-\Gamma)}{\cos kz (1-\Gamma) - i \sin kz (1+\Gamma)} = z_в \frac{z_н - i z_в \operatorname{tg} kz}{z_в - i z_н \operatorname{tg} kz}$$

$$\boxed{Z(-L) = z_в \frac{z_н + i z_в \operatorname{tg} kL}{z_в + i z_н \operatorname{tg} kL}}$$

а) $z_н = \frac{1}{i\omega C}$, $|\Gamma| = \frac{|1 - i\omega C z_в|}{|1 + i\omega C z_в|} = 1$, $Z(-L) = z_в \frac{\frac{1}{i\omega C} + i z_в \operatorname{tg} kL}{z_в + \frac{1}{\omega C} \operatorname{tg} kL} =$

$$= i z_в \frac{z_в \omega C \operatorname{tg} kL - 1}{z_в \omega C + \operatorname{tg} kL}$$

б) $z_н = \frac{i\omega L}{c^2}$, $|\Gamma| = \frac{|i\omega L - c^2 z_в|}{|i\omega L + c^2 z_в|} = 1$, $Z(-L) = i z_в \frac{\omega L + c^2 Z_в \operatorname{tg} kL}{c^2 Z_в - \omega L \operatorname{tg} kL}$

в) $z_н = R = z_в$, $\Gamma = 0$, $Z(-L) = z_в$

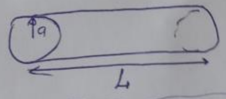
г) $z_н = z_{в_1}$, $\Gamma = \frac{z_{в_1} - z_в}{z_{в_1} + z_в}$, $Z(-L) = z_в \frac{z_{в_1} + i z_в \operatorname{tg} kL}{z_в + i z_{в_1} \operatorname{tg} kL}$

д) $z_н = 0$, $\Gamma = -1$, $Z(-L) = i z_в \operatorname{tg} kL$

е) $z_н = \infty$, $\Gamma = 1$, $Z(-L) = -i Z_в \operatorname{ctg} kL$

№10.31(а,б)

№10.31.



Цилиндр. резонатор – круглый волновод с двумя поперечными стенками.

$$\omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\varkappa_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}$$

а) $L \ll a$ => ~~чтобы была низшая мода~~ $\left(\frac{p\pi}{L}\right) \gg 1$ ~~было мало => p=0~~

TM: $\varkappa_{mn} = \frac{\nu_{mn}}{a}$

TE: $\varkappa_{mn} = \frac{\mu_{mn}}{a}$

$\nu_{01} = 2{,}405 \quad \mu_{11} = 1{,}84$

б) $L \gg a$

$$\omega_{010} = \sqrt{\underbrace{\frac{(2{,}405)^2}{a^2}}_{\approx 5{,}8}} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\omega_{111} = \sqrt{\underbrace{\frac{(1{,}84)^2}{a^2}}_{\approx 3{,}2} + \underbrace{\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}_{\approx 0}} \sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon\mu}}$$

Для TM волны p может быть 0
Для ~~TE~~ TE волны p начинается с 1.
=> ∗ нижние моды TE и TM волн
=> TE_{111} и TM_{010}
и сравниваем их частоты
чья частота меньше та и является низшей модой.

Когда $L \ll a$, то $\frac{\pi}{L}$ очень велико

Когда $L \gg a$, то $\frac{\pi}{L}$ мало

продолжение сзади

10.31. Указать самый низкий тип колебаний и найти его собственную часттоту ω для цилиндрического резонатора высоты h и радиуса a в двух случаях: а) $h \gg a$; б) $h \ll a$.

Видно, что в типе TE $q \neq 0$ иначе $H_z = 0$

Для типа TM : $E_z = A J_m(\varkappa_{mn} r) \cos m\varphi \cos(k_{\parallel} z) e^{i\omega t}$ т.к. на границе по z $E_{\perp} = 0$

Значит здесь возможно $q = 0$, причем $\varkappa_{mn} = \frac{\nu_{mn}}{a}$, где ν_{mn} – $n^{й}$ корень ур-ия $J_m(x) = 0$

В итоге $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu = \varkappa^2 + \left(\frac{\pi q}{h}\right)^2$, $\varkappa^2 \sim \frac{1}{a^2}$

1) $h \gg a \rightarrow \varkappa = \frac{\pi q}{h}$, т.е. все определено $\varkappa$, которое наименьшее для моды TE_{11} : $\nu_{11} = 1{,}84$. При этом низшей из всех будет мода, у которой $q = 1$, т.е. TE_{111}

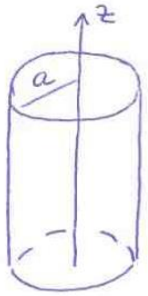
Причем $\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{(1{,}84)^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{h^2}$

2) $h \ll a$, т.е. $\frac{\pi q}{h} \gg \varkappa$

Значит низшей будет та мода, у которой можно занулить q. Минимум TM волн будет TM_{01} мода $\nu_{01} = 2{,}4$

Для резонатора получим TM_{010} моду: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{(2{,}4)^2}{a^2}$

№ 10.3.1.



$$\Delta_\perp \Psi + \varkappa^2 \Psi = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \vartheta^2} + \varkappa^2 \Psi = 0.$$

$$\Psi = R(r)\,\Theta(\vartheta)$$

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \varkappa^2 r^2 + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$$

$$\begin{cases} r^2\dfrac{R''}{R} + r\dfrac{R'}{R} + \varkappa^2 r^2 = C_1, \\ \dfrac{\Theta''}{\Theta} = -C_1 . \end{cases}$$

$$\Theta = A_1 \cos\sqrt{C_1}\,\vartheta + A_2 \sin\sqrt{C_1}\,\vartheta, \quad \sqrt{C_1} = m,\ m = \overline{0,1\ldots}$$

$$R'' + \frac{R'}{r} + \left(\varkappa^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0$$

$$R = B_1 J_m(\varkappa r) + B_2 N_m(\varkappa r), \quad B_2 = 0.$$

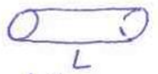
$$R(r) = B_1 J_m(\varkappa r)$$

$$\Psi_m = J_m(\varkappa r)\begin{pmatrix} \cos m\vartheta \\ \sin m\vartheta \end{pmatrix}$$

TE: $\left.\dfrac{\partial \Psi^m}{\partial r}\right|_a = 0 \Rightarrow J_m'(\varkappa a) = 0,\ \varkappa a = \mu_{mn},\ \varkappa_{mn} = \dfrac{\mu_{mn}}{a}.$

TM: $\left.\Psi^e\right|_a = 0 \Rightarrow J_m(\varkappa a) = 0,\ \varkappa a = \nu_{mn},\ \varkappa_{mn} = \dfrac{\nu_{mn}}{a}$

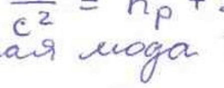
а) $L \gg a$.



$\varepsilon, \mu = 1,\ K^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} = h_p^2 + \varkappa_{mn}^2,\ \omega_{mnp}^2 = c^2\left(\varkappa_{mn}^2 + \left(\dfrac{p\pi}{L}\right)^2\right)$

Самая низшая мода TE_{111}: $\omega_{111} = c\sqrt{\left(\dfrac{\mu_{11}}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2}$

б) $L \ll a$

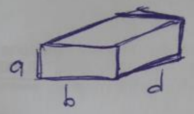


Самая низшая мода TM_{010}: $\omega_{010} = c\,\dfrac{\nu_{01}}{a}.$

№10.33

№10.33. $a < b < d$

а)



Низшая мода в прям. вол-де TE_{10}.

$\Rightarrow$ в прям. резонаторе TE_{101}

Тогда $\omega_{101} = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$ $\qquad \varepsilon = \mu = 1$

$$E = E_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{d}z\right)e^{i\omega_{101}t}$$

$$W_a = \frac{1}{8\pi}\int |E|^2 dV = \frac{E_0^2}{8\pi}\, a \int_0^b \sin^2\left(\frac{\pi}{b}x\right)dx \int_0^d \sin^2\left(\frac{\pi}{d}z\right)dz =$$

$$= \frac{b}{2}\,\frac{d}{2}\,\frac{E_0^2}{8\pi}\,a = \frac{1}{32\pi}E_0^2 abd$$

б) $\varepsilon = 1 - \omega_p^2/\omega^2$

$$\omega^2 = \frac{c^2}{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}\left(\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2\right)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2\left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2\right]}$$

$W_б = W_a$

10.33 (резонатор без плазмы). В пустом прямоугольном резонаторе с размерами ребер *a,b,d* (*a*<*b*<*d*) возбужден низший тип колебаний с максимальной амплитудой электрического поля E_0. Найти собственную частоту колебаний ω и полную запасенную энергию *W*. Рассчитатьих значения при *a*=2см, *b*=3см, d=4см, E_0=10В/см. Найти ω и *W* в случае, когда резонатор заполнен плазмой с диэлектрической протицаемостью $\varepsilon=1-\omega_p^2/\omega^2$ ($\omega_p=const$).

Для резонатора $\frac{\omega^2}{c^2}=\varkappa^2+\left(\frac{\pi m}{d}\right)^2$, где $\varkappa^2=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi l}{b}\right)^2$

У низшей моды занулим коэф. для меньшей стенки $n=0$

тогда получим моду TE_{101} : $E_y=E_0\sin\frac{\pi x}{b}\sin\frac{\pi z}{d}$; $\frac{\omega^2}{c^2}=\frac{\pi^2}{b^2}+\frac{\pi^2}{d^2}$

$$\omega=\pi c\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{d^2}}$$

Найдем маг. поле $\operatorname{rot}E=-\frac{i\omega}{c}H$, т.е. $H=-\frac{c}{i\omega}\operatorname{rot}E=$

$$=-\frac{c}{i\omega}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y(x,z) & 0\end{vmatrix}=-\frac{c}{i\omega}\left\{-x_0\frac{\partial E_y}{\partial z}+z_0\frac{\partial E_y}{\partial x}\right\}=\frac{ic}{\omega}\left\{-x_0\frac{\pi}{d}E_0\cos\frac{\pi z}{d}\sin\frac{\pi x}{b}+\right.$$

$$\left.+z_0\frac{\pi}{b}E_0\cos\frac{\pi x}{b}\sin\frac{\pi z}{d}\right\}$$

$$\langle w\rangle=\langle w_e\rangle+\langle w_m\rangle=\frac{|E|^2}{16\pi}+\frac{|H|^2}{16\pi}=\frac{E_0^2}{16\pi}\left\{\sin^2\frac{\pi x}{b}\sin\frac{\pi z}{d}+\frac{c^2\pi^2}{\omega^2d^2}\cos^2\frac{\pi z}{d}\sin^2\frac{\pi x}{b}+\right.$$

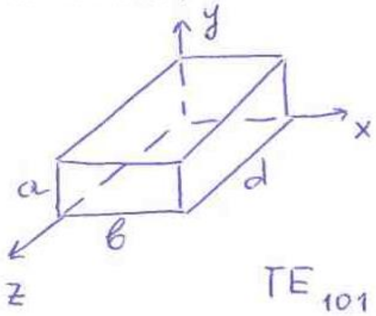
$$\left.+\frac{c^2\pi^2}{\omega^2b^2}\cos^2\frac{\pi x}{b}\sin^2\frac{\pi z}{d}\right\}$$

$$W=\int\langle w\rangle dV$$

$$\int_0^T\sin^2\frac{\pi\xi}{T}d\xi=\int_0^T\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi\xi}{T}\right)d\xi=\frac{T}{2}$$

Значит $W=\frac{E_0^2}{16\pi}a\left\{\frac{bd}{4}+\frac{c^2}{\omega^2}\underbrace{\left[\frac{\pi^2}{d^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right]}_{\frac{\omega^2}{c^2}}\frac{bd}{4}\right\}=\frac{E_0^2}{32\pi}abd$

№ 10.33.



$$\varepsilon, \mu = 1, \quad k^2 = \left(\varkappa_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2\right),$$

$$\varkappa_{mn}^2 = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

$$\omega_{mnp}^2 = c^2\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2\right)$$

$$TE_{101}: \quad \omega_{101} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}$$

$$TM_{110}: \quad \omega_{110} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$\omega_{101} < \omega_{110} \Rightarrow$ низшей модой будет TE_{101}

$$\bar{E}_\perp = \bar{y}_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{b} \sin\frac{\pi z}{d} e^{i\omega t}$$

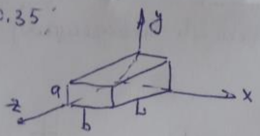
$$W = \bar{W}^e + \bar{W}^m = \iiint \frac{\varepsilon |\bar{E}|^2}{16\pi} dV + \iiint \frac{\mu |\bar{H}|^2}{16\pi} dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_0^a \int_0^b \int_0^d |\bar{E}_\perp|^2 dx\,dy\,dz = \frac{abd}{32\pi} E_0^2$$

№10.35(a)

! положения в тетради !

№10.35.



$\gamma = \omega''$

$\omega = \omega' + i\omega''$

$\vec{E} = \vec{y}_0 E \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{i\omega t}$

т.к. низшая мода, a – мало $\Rightarrow \frac{n\pi}{a}$ – велико, то n младший $= 0$.

$$\omega_{101} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$$

$$\omega'' = \frac{P_\sigma}{2W} \qquad P_\sigma = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \eta_s \oint_S |\vec{H}_\tau|^2 dS \qquad \eta_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{-i\sigma 4\pi}}$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint_V |\vec{H}|^2 dV$$

а) Стенка ab проводящая $(\sigma \neq \infty)$.

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -ik\mu\vec{H} \to \vec{H} = \frac{ic}{\omega\mu}\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{ic}{\omega\mu}\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$H_x = -\frac{ic}{\omega\mu}\frac{\pi}{L} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$$

$$H_z = \frac{ic}{\omega\mu}\frac{\pi}{b} E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \qquad \vec{H}_\tau = H_x \cdot \vec{x}_0 \big|_{z=L}$$

$$P_\sigma = \frac{c}{8\pi}\operatorname{Re}\left(\sqrt{\frac{\omega\mu}{-i4\pi\sigma}}\right)\int_0^b dx \int_0^a dy \, \frac{c^2}{\omega^2\mu^2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 E_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{b}\right) =$$

$$= \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}\frac{c^2}{\omega^2\mu^2}E_0^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 a\,\frac{b}{2}$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_0^a dy \int_0^b dx \int_0^L dz \left(\frac{c^2}{\omega^2\mu^2}E_0^2\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{b}\right)\cos^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi x}{b}\right)\sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right)\right]\right) = \frac{1}{8\pi}\frac{c^2}{\omega^2\mu^2}E_0^2\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\frac{b}{2}\frac{L}{2}a + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\frac{b}{2}\frac{L}{2}a\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\frac{c^2}{\omega^2\mu^2}E_0^2\frac{bLa\pi^2}{4}\frac{(L^2+b^2)}{L^2b^2}$$

$$\omega'' = \frac{c\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}\frac{c^2}{\omega^2\mu^2}E_0^2\frac{\pi^2}{L^2}a\frac{b}{2}\cdot 8\pi}{8\pi \cdot 2\frac{c^2}{\omega^2\mu^2}E_0^2\frac{ba}{2}\frac{L}{2}\frac{\pi^2}{L^2}\frac{1}{b^2}(L^2+b^2)} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma}}\frac{cb^2}{L(L^2+b^2)}$$

10.35(a). Найти декремент затухания γ и добротность Q низшего типа колебанийв прямоугольном резонаторе с размерами ребер a, b, L $(a<b<L)$. Одна из стенок резонатора имеет конечную проводимость σ (толщина стенки много больше толщины скин-слоя), остальные стенки идеально проводящие. Рассмотреть случаи, когда проводящая стенка имеет размеры: a и b.

Для ид. случая в смысле низшей моды имеем: $E_y = E_0 \sin\frac{\pi x}{b} \sin\frac{\pi z}{L} y_0$

$$H = \frac{ic}{\omega}\left\{ -x_0 E_0 \frac{\pi}{L} \cos\frac{\pi z}{L} \sin\frac{\pi x}{b} + z_0 E_0 \frac{\pi}{b} \sin\frac{\pi z}{L} \cos\frac{\pi x}{b} \right\}$$

Полная энергия $W = \frac{E_0^2}{32\pi} V_{рез} = \frac{E_0^2}{32\pi} abL$

При затухании считаем $\tilde{\omega} = \omega + i\gamma$, $|\gamma| \ll \omega \Rightarrow \gamma = \frac{P_s}{2W}$, где

$P_s = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\, \xi_s \oint |H|^2 dS$ – энергия теряемая в стенке ; W – полная

При малом γ берем за H – поле ид. резонатора

В нашем случае неидеальна стенка при $z=0$ (L)

$$\oint |H|^2 dS = \iint \frac{c^2}{\omega^2} E_0^2 \left(\frac{\pi^2}{L^2} \cos^2\frac{\pi z}{L} \sin^2\frac{\pi x}{b} + \frac{\pi^2}{b^2} \sin^2\frac{\pi z}{L} \cos^2\frac{\pi x}{b} \right)\Big|_{z=0} dx\,dy =$$

$$= \frac{c^2}{\omega^2} E_0^2 \int_0^a dy \int_0^b \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2\frac{\pi x}{b}\, dx = \frac{c^2}{\omega^2} E_0^2 \frac{\pi^2}{L^2} a \frac{b}{2}$$

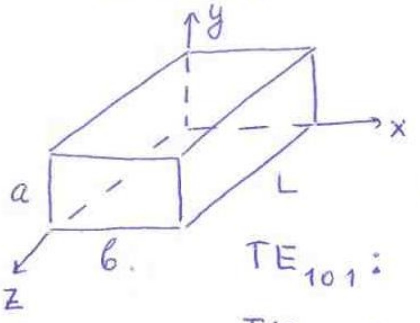
Из дисперсионного ур-ия $\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{L^2}\right) \to \frac{\omega^2}{c^2\pi^2} = \frac{L^2+b^2}{L^2 b^2}$

тогда $\iint |H|^2 dS = \frac{L^2 b^2}{L^2+b^2} E_0^2 \frac{1}{L^2} \frac{ab}{2} = \frac{b^2}{L^2+b^2} E_0^2 \frac{ab}{2}$

$$\gamma = \frac{P_s}{2W} = \frac{\frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \frac{b^2}{L^2+b^2} E_0^2 \frac{ab}{2}}{2 \cdot \frac{E_0^2}{32\pi} abL} = \frac{cb^2}{L(L^2+b^2)} \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}$$

$$Q = \frac{\omega}{2\gamma}$$

N 10.35 (a).



$\varepsilon, \mu = 1$, $K^2 = \left(\varkappa_{mn}^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right)$,

$\varkappa_{mn}^2 = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$, $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$,

$$\omega_{mnp}^2 = c^2\left(\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right)$$

TE_{101}: $\omega_{101} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$

TM_{110}: $\omega_{110} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$

$\omega_{101} < \omega_{110} \Rightarrow$ низшей модой будет TE_{101}

$$\bar{E}_\perp = \bar{y}_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{b} \sin\frac{\pi z}{L} e^{i\omega_{101} t},$$

$$\operatorname{rot}\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad \bar{H} = \frac{ic}{\omega_{101}} \operatorname{rot}\bar{E}.$$

$$\operatorname{rot}\bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{x}^0 & \bar{y}^0 & \bar{z}^0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_\perp & 0 \end{vmatrix} = -\bar{x}^0 \frac{\pi}{L} E_0 \sin\frac{\pi x}{b} \cos\frac{\pi z}{L} e^{i\omega_{101} t} +$$

$$+ \bar{z}^0 \frac{\pi}{b} E_0 \cos\frac{\pi x}{b} \sin\frac{\pi z}{L} e^{i\omega_{101} t}$$

$$\bar{H}_\perp = -\bar{x}^0 \frac{\pi}{L} E_0 \sin\frac{\pi x}{b} \cos\frac{\pi z}{L} \cdot \frac{ic}{\omega_{101}} e^{i\omega_{101} t}$$

$$W = \bar{W}^e + \bar{W}^m = \iiint \frac{\varepsilon |\bar{E}|^2}{16\pi} dV + \iiint \frac{\mu |\bar{H}|^2}{16\pi} dV =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_0^a \int_0^b \int_0^L |\bar{E}_\perp|^2 dx\,dy\,dz = \frac{abL}{32\pi} E_0^2$$

$P_{ст} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \zeta_{пов} \oint_S |\bar{H}_\tau|^2 ds$, в нашем случае $\bar{H}_\tau = \bar{H}_\perp$

$$P_{ст} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\omega_{101}}{8\pi\sigma}} \frac{c^2}{\omega_{101}^2} \frac{\pi^2}{L^2} E_0^2 \underbrace{\cos^2\frac{\pi z}{L}}_{1 \text{ при } z=L} a \int_0^b \sin^2\frac{\pi x}{b} dx =$$

$$= \frac{c^3}{16\pi} \sqrt{\frac{\omega_{101}}{8\pi\sigma}} \frac{\pi^2}{L^2} \frac{E_0^2 ab}{\omega_{101}^2}, \quad \omega'' = \frac{P_{ст}}{2W} = \frac{c^3}{\omega_{101}^2} \frac{\pi^2}{L^3} \sqrt{\frac{\omega_{101}}{8\pi\sigma}} =$$

$$= \frac{c^3 \pi^2}{c^2\left(\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right) L^3} \sqrt{\frac{\omega_{101}}{8\pi\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega_{101}}{8\pi\sigma}} \frac{cb^2}{(b^2+L^2)L}$$

$$Q = \frac{\omega_{101}}{2\omega''}$$

№10.36

пояснения в тетради

№10.36. $\sigma = \infty \quad \varepsilon = \varepsilon_r - i\varepsilon_i \quad \varepsilon_i > 0$

$$\omega' + i\omega'' = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\mu(\varepsilon_r - i\varepsilon_i)}}$$

$$(\omega' + i\omega'')^2 = \frac{\omega^{(0)2}}{\mu\ \varepsilon_r - i\varepsilon_i}$$

$$(\omega')^2 + 2i\omega'\omega'' - (\omega'')^2 = \frac{\omega^{(0)2}(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)}{\mu(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2)}$$

$$(\omega')^2 + 2i\omega'\omega'' - (\omega'')^2 = \frac{\omega_0^{(2)}}{\mu\ \varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2}(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)$$

$$(\omega')^2 - (\omega'')^2 = \frac{\omega^{(0)2}\varepsilon_r}{\mu(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2)}$$

$$2\omega'\omega'' = \frac{\omega_0^{(2)}}{\mu(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2)}\varepsilon_i$$

$$(\omega')^2 - (\omega'')^2 = \frac{2\omega'\omega''\cancel{\mu(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2)}\varepsilon_r}{\varepsilon_i\cancel{\mu(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2)}}$$

$$(\omega')^2 - (\omega'')^2 - 2\omega'\omega''\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} = 0$$

ω'' – мало

$$\omega' - 2\omega''\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} = 0 \qquad \omega'' = \frac{\omega'\varepsilon_i}{2\varepsilon_r}$$

$$(\omega'')^2 + 2\omega'\omega''\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i} - (\omega')^2 = 0$$

$$\omega''_{1,2} = -\frac{\omega'\varepsilon_r}{\varepsilon_i} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega')^2\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i}\right)^2 + 4(\omega')^2}$$

Можно решать для случая когда потери малы

10.36. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для резонатора с идеально проводящими стенками, заполненного средой с комплексной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=\varepsilon_r-i\varepsilon_i$ ($\varepsilon_i>0$).

Для ид. случая было $\frac{\omega^2}{c^2}=k^2$, а теперь $\frac{\tilde{\omega}^2}{c^2}\varepsilon=k^2$, где $\tilde{\omega}=\omega+i\gamma$, $\varepsilon=\varepsilon_r-i\varepsilon_i$

Причем, т.к. $\gamma \ll \omega$, то $\tilde{\omega}^2 \cong \omega^2$

$$\tilde{\omega}^2=\frac{k^2c^2}{\varepsilon} \longrightarrow (\omega+\gamma i)^2=\frac{k^2c^2}{\varepsilon_r-i\varepsilon_i}$$

$$\omega^2-\gamma^2+2i\gamma\omega=\frac{k^2c^2(\varepsilon_r+i\varepsilon_i)}{\varepsilon_r^2+\varepsilon_i^2}$$

Отсюда
$$\begin{cases} 2\gamma\omega=\frac{k^2c^2\varepsilon_i}{\varepsilon_r^2+\varepsilon_i^2} \\ \omega^2-\gamma^2=\frac{k^2c^2\varepsilon_r}{\varepsilon_r^2+\varepsilon_i^2}\approx\omega^2 \quad \text{, т.к. } \gamma\ll\omega \end{cases}$$

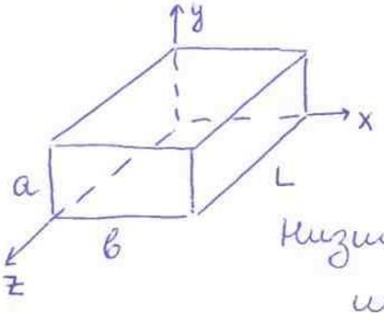
Поделим одно на другое, тогда $\frac{2\gamma}{\omega}=\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_r}$

$$\gamma=\frac{\omega\varepsilon_i}{2\varepsilon_r}$$

N 10.36.

стр 16

$a < b < L$



$\mu = 1$

$\varepsilon = \varepsilon_r - i\varepsilon_i$

$\omega = \dfrac{Kc}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \Rightarrow \omega = \omega' + i\omega''$

$$K^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2$$

Низшей модой будет TE_{101}:

$$\omega^2\varepsilon = c^2\left(\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right) = c^2K^2$$

$$\omega^2 = \omega'^2 - \omega''^2 + 2i\omega'\omega''$$

$$\omega^2 = \frac{c^2K^2}{\varepsilon_r - i\varepsilon_i} = \frac{c^2(\varepsilon_r + i\varepsilon_i)K^2}{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2}$$

$$\begin{cases} 2\omega'\omega'' = \dfrac{c^2\varepsilon_i K^2}{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2} \approx \dfrac{c^2\varepsilon_i K^2}{\varepsilon_r^2}, \\ \omega'^2 - \omega''^2 = \dfrac{c^2\varepsilon_r K^2}{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2} \approx \dfrac{c^2\varepsilon_r K^2}{\varepsilon_r^2} = \dfrac{c^2K^2}{\varepsilon_r}. \end{cases}$$

$\omega''^2 \ll \omega'^2$

$$\begin{cases} \omega'' = \dfrac{c^2\varepsilon_i K^2}{2\omega'\varepsilon_r^2}, \\ \omega'^2 = \dfrac{c^2K^2}{\varepsilon_r}. \end{cases} \Rightarrow \omega'' = \frac{\varepsilon_i\omega'^2}{2\omega'\varepsilon_r} = \frac{\varepsilon_i\omega'}{2\varepsilon_r}$$

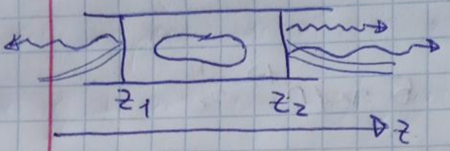
$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_i}$$

10.38

Задачи.

$$\vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec{E}_p \qquad (z > z_2)$$

$$\vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{-p} \vec{E}_{-p} \qquad (z < z_1)$$



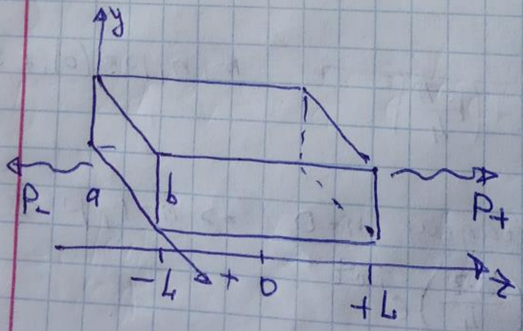
$$a_p = \frac{1}{N_p} \int_V \left(\vec{j}^{\,e} \vec{E}_{-p} - \vec{j}^{\,m} \vec{H}_{-p} \right) dV$$

$$a_{-p} = \frac{1}{N_p} \int_V \left[\vec{j}^{\,e} \vec{E}_p - \vec{j}^{\,m} \vec{H}_p \right] dV$$

$$\vec{E}_p = \vec{E}_p (z=0) e^{-ih_p z}$$

$$\vec{E}_{-p} = \vec{E}_{-p} (z=0) e^{+ih_p z}$$

№ 10.38.



$a > b$

Сторонний ток, текущий внутри волновода

$$\vec{j} = \vec{y}_0 j_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - gz)}$$ при $|z| < L$

и ток задан в виде бегущей волны

при $|z| > L$ $\vec{j} = 0$

Если индекса не написано, то считаем, что $\vec{j}^{\,e}$.

$h_p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \varkappa_p^2}$

$\Pi_p = P_p$ — полный поток энергии, в некот. соб. моды

Надо найти поле и коэффициенты a_p и a_{-p}

$P_p = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\, \eta_{\perp p} \iint |\vec{H}_{\perp p}|^2 dS$

Зависимость плотности тока такая же от x как и в

TE_{10}, т.е. $\vec{E}(TE_{10}) = \vec{y_0} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - h_p z)}$

Пусть мы пронумеровали в порядке возрастания $\varkappa$,

тогда для TE_{10} $p=1$, $\Rightarrow h_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$

g совпадает с h_1, т.е.

g - const, но она

$g = \sqrt{\omega^2/c^2 - (\pi/a)^2} = h_1$

Условие ор-ти, в удовлетворяюв соб. функц

соб. моды, $\mathcal{I}_{p,g} = \begin{cases} 0, & p \neq -g \\ \neq 0 & p = -g \end{cases}$

$\iint\limits_{\perp\Sigma} (\vec{E}_p \cdot \vec{E}_q)\, dS = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \neq 0: & p = q \end{cases}$

по поперечному сечению

Речь идёт о невырожденных модах.

$a > b$

Сторонний ток, сосредоточенный внутри волн.

$\vec{j} = \vec{y_0} j_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i\omega t}$, $|z| < L$

и ток задан в виде бегущей волны

$|z| > L$ $\vec{j} = 0$

что $\vec{j}$ ...

$\uparrow \; \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \; \uparrow$

TE_{10}

т.к. $\vec{j}$ совпадает со структурой с TE_{10}, а в силу ортогональности получим

что $g \perp$ ко всем другим модам. =>

они не будут учитываться в коэф-ах

будет только E_1

=>

$$a_1 \sim \int_V \sin^2\frac{\pi x}{a}\, \cancel{e^{-ih_1 z}} \cdot \cancel{e^{+ih_1 z}}\, dV =$$

$dV = dx\,dy\,dz$

$$= \frac{a}{2} \cdot b \cdot 2L$$

$$a_{-1} \sim \frac{1}{N_1} \int_V \sin^2\frac{\pi x}{a}\, e^{-ih_1 z} e^{-ih_1 z}\, dV = \frac{a}{2} \cdot b \int_{-L}^{L} e^{-2ih_1 z}\, dz$$

$$\frac{P_+}{P_-} = \frac{|a_1|^2}{|a_{-1}|^2} \qquad = \frac{ab}{2}\left(\frac{-1}{2ih_1}\right)\left(2i \sin 2h_1 L\right)$$

$$\frac{P_+}{P_-} = \frac{4L^2 h_1^2}{\sin^2(2h_1 L)} = \left(\frac{\xi_\varphi}{\sin \xi_\varphi}\right)^2 \quad \text{где } \xi_\varphi = 2h_1 L$$

$\vec{j} = \vec{j}_0 X_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{z-z_0}{L}\right) e^{j\omega t}$ ... №10.48.

Пусть $h_1 L \ll 1 \Rightarrow L \ll \lambda$

Если область очень узкая, то $\frac{P_+}{P_-} \approx \frac{\tilde{j}_+^2}{\tilde{j}_-^2} = 1$, то излучает одинаково в обе стороны.

Если в области $-L$ до L $\quad 2h_1 L = \pi n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$h_1 = \frac{\pi n}{2h L} \quad \rightarrow \quad L = \frac{n \lambda_8}{4}$

то мак-но излучение направлено больше по z (т.е. P_+ большое), а P_- почти ошибка нуль, т.е. $-z$ напр-нии не излучается.

Происходит полное фазирование источников. (поле складываются в фазе), когда волна тока бежит с той же скоростью, что и волна.

Наш ответ справедлив только если ω – мнимое (т.е. больше критического значения)

Коэффициент возбуждения $= 0$ у других мод, в силу ор-ти. $\int\limits_V \vec{j}^e \vec{E}_p dV = 0$, кроме TE_{10}

$$\int\limits_V (\vec{E}_1 \vec{E}_p) dV = \begin{cases} 0, & p = 2, 3, \ldots \\ \neq 0 & p = 1 \end{cases}$$

10.38. Внутри бесконечного прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения a и b (a>b) задано следующее распределение плотности тока: $j=y_0 j_0 \sin(\Pi x/a)\exp(i(wt-pz))$ при $|z|<L$, $j=0$ при $|z|>L$; здесь y_0 – единичный вектор, перпендикулярный широкой стенке волновода, x – расстояние до одной из узких стенок, z – продольная координата; $j_0=const$; частота ω и число p связаны соотношением $p^2=(\omega/c)^2-(\Pi/a)^2$. Найти отношение потоков энергии P_+/P_-, излучаемых данными токами в направлениях +z и −z.

ток задан в виде бегущей по „+z" направлению волны → несимметричность излучения

Мы знаем соб. моды и для C_1 из вида интегралов видно, что только мода TE_{10} возбуждается.

Тогда искомое поле $E^+_{10} = C^+_{10} y_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - pz)}$

$E^-_{10} = C^-_{10} y_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t + pz)}$ где

$$C^\pm = \frac{1}{N}\int j E_{10}(\pm p)\,dV$$

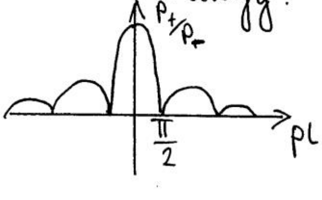
Получим $C^+ = \frac{1}{N}\int j y_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{ipz} = \frac{1}{N} j_0 \int_0^a\int_0^b\int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx\,dy\,dz = \frac{1}{N} j_0 abL$

$$C^- = \frac{1}{N}\int j y_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{-ipz} = \frac{1}{N} j_0 \int_0^a\int_0^b\int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-2ipz} dx\,dy\,dz = \frac{1}{N} j_0 \frac{a}{2} b \left.\frac{e^{-2ipz}}{-2ip}\right|_{-L}^{L} =$$

$$= \frac{1}{N} j_0 \frac{a}{2} bL \frac{e^{2ipL}-e^{-2ipL}}{2ipL} = \frac{1}{N} j_0 abL \frac{\sin 2pL}{2pL}$$

т.к. речь идет об одном и том же типе волн, то отношение мощностей равно отношению комплексных амплитуд:

$$\frac{P_+}{P_-} = \left(\frac{C_+}{C_-}\right)^2 = \left(\frac{2pL}{\sin 2pL}\right)^2$$



$P_- = 0$ при $2pL = \pi n$

причем $p = \frac{2\pi}{\lambda}$ – прод волновое число, т.е. при $2L = \frac{\lambda n}{2}$

Когда длина промежутка с током равна целому числу полуволн, то все излучение идет вперед

Из графика видно, что при $pL \gg 1$ либо $2L \gg \lambda$ тоже все излучение практически вперед

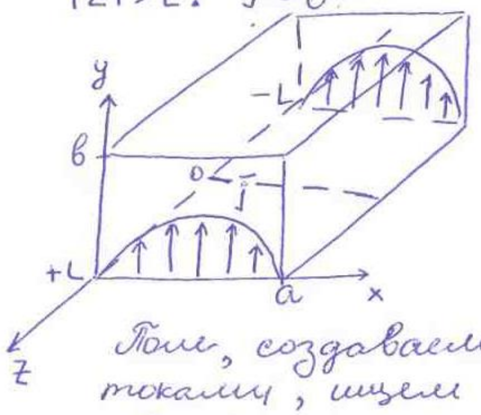
При $L \ll \lambda$ излучаемые мощности вправо и влево сравниваются, т.к. бегучесть не проявляется.

стр. 17

№ 10.38

$|z|<L: \quad \bar{j} = \bar{y}_0 \, j_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - hz)}, \quad h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$

$|z|>L: \quad \bar{j} = 0$



Данное распределение плотности тока возбуждает в волноводе волну TE_{10}:

$$\bar{E}_\perp = \bar{y}_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{i(\omega t - hz)},$$

$$h^2 = h_{10}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Поле, создаваемое заданными сторонними токами, ищем в виде суперпозиции собственных колебаний волновода:

$$z>L: \quad \bar{E} = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \bar{E}_p = a_{10}\bar{E}_{10}, \quad \bar{H} = a_{10}\bar{H}_{10}$$

$$z<-L: \quad \bar{E} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{-p}\bar{E}_{-p} = a_{-10}\bar{E}_{-10}, \quad \bar{H} = a_{-10}\bar{H}_{-10}$$

$$\bar{E}_{\pm 10} = \bar{y}_0 E_0 \sin\frac{\pi x}{a} e^{\mp i h_{10} z}, \quad \bar{H}_{\pm 10} = \frac{ic \, \mathrm{rot}\, \bar{E}_{\pm 10}}{\omega \mu}.$$

$$P_+ = \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\zeta_{\perp в}}\right) \iint |\bar{E}_{\perp +}|^2 dS = |a_{+10}|^2 \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\zeta_{\perp в}}\right) \iint |\bar{E}_{+10}|^2 dS$$

$$P_- = |a_{-10}|^2 \frac{c}{8\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\zeta_{\perp в}}\right) \iint |\bar{E}_{-10}|^2 dS$$

$$|\bar{E}_{+10}|^2 = |\bar{E}_{-10}|^2, \quad \frac{P_+}{P_-} = \frac{|a_{+10}|^2}{|a_{-10}|^2}$$

Определим коэф. возбуждения:

$$a_{+10} = \frac{1}{N_{10}} \iiint \bar{j}\, \bar{E}_{-10} dV = \frac{1}{N_{10}} \int_0^a \int_0^в \int_{-L}^{L} E_0 j_0 \sin^2\frac{\pi x}{a} dx dy dz =$$

$$= \frac{j_0 E_0}{N_{10}} \frac{a}{2} в 2L = \frac{a в L j_0}{N_{10}} E_0$$

$$a_{-10} = \frac{1}{N_{10}} \iiint \bar{j}\, \bar{E}_{+10} dV = \frac{j_0 E_0}{N_{10}} \int_0^a \int_0^в \int_{-L}^{L} \sin^2\frac{\pi x}{a} e^{-2ih_{10}z} dx dy dz =$$

$$= \frac{j_0 E_0}{N_{10}} \frac{a}{2} в \left. \frac{e^{-2ih_{10}z}}{-2ih_{10}} \right|_{-L}^{L} = \frac{j_0 E_0 a в L}{N_{10}} \cdot \frac{\sin 2hL}{2hL}$$

$$\frac{P_+}{P_-} = \left(\frac{2hL}{\sin 2hL}\right)^2; \text{ Если } \begin{matrix} hL \ll 1 \\ L \ll \lambda \end{matrix} \Rightarrow \frac{P_+}{P_-} = 1; \text{ Если } hL \gg 1 \quad \frac{P_+}{P_-} \gg 1$$

10.48

$\vec{j} = j_0 \vec{x}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{i\omega t}$ №10.48.

$\vec{E}_{011} = E \vec{x}_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{i\omega t}$

$\omega_0 = \omega_0' + \omega_0'' i$ – соб. частота $\omega_{011}' = c\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$

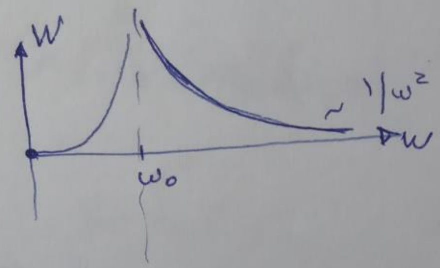
$$q_{011} = \frac{i}{(\omega^2 - \omega_0^2) N_0} \left(\omega \int_V \sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) e^{2i\omega t} \underset{dz\,dy\,dx}{\underset{\parallel}{dV}} \right) =$$

$$= \frac{i\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2) N_0} \frac{b}{2} \frac{L}{2} a e^{2i\omega t}$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_0^L dz \int_0^b dy \int_0^a dx \, |\vec{E}|^2$$

$\vec{E} = q_{011} \cdot \vec{E}_{011}$

$$W \sim \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$



10.48. Полный резонатор, представляющий собой прям. параллелипипед с ребрами a, b, L, возбуждается изнутри заданным объемным распределением плотности переменного тока j=x0j(y,z)exp(iwt). Оси x,y,z направлены соответственно влодь ребер a, b, L. Построить(кач) графики зависимости запасенной в резонаторе э/м энергии W от частоты ω для следующих распределений тока j(y,z):
а)j=j0sin(Πy/b)sin(Πz/L);(j0=const)
б)j=j0sin(Πy/b)[sin(Πz/L)+ sin(2Πz/L)].

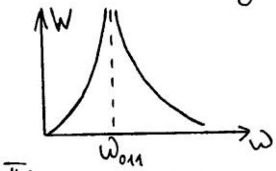
а) Из вида пл-ти тока $E = x_0 C \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{\pi z}{L} e^{i\omega t}$ где

$$C = \frac{i}{(\omega_{011}^2 - \omega^2)N} \int \omega j E dV \quad , \text{ где } \quad \omega_{011}^2 = c^2 \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\pi^2}{L^2}\right)$$

$$N = \frac{1}{4\pi}\int \varepsilon |E_0|^2 dV \text{ - норма}$$

При совпадении внешней частоты с собственной возникает резонанс $|E| \to \infty$

$$W = \frac{1}{8\pi}\int |E|^2 dV \sim |C|^2 = \frac{\omega^2}{(\omega_{011}^2 - \omega^2)^2}$$

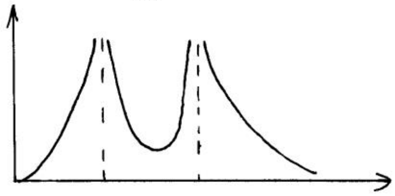


б) $E = x_0 C_{011} \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{\pi z}{L} e^{i\omega t} + x_0 C_{012} \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{2\pi z}{L} e^{i\omega t}$

Резонанс будет на двух частотах

$$\omega_{011}^2 = c^2 \left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right] \qquad \omega_{012}^2 = c^2 \left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + 4\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right]$$

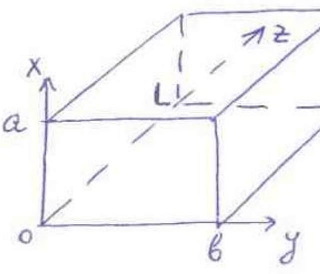
Полная энергия $W = \frac{1}{8\pi}\int \left(|C_{011}|^2 \sin^2\frac{\pi y}{b} \sin^2\frac{\pi z}{L} + |C_{012}|^2 \sin^2\frac{\pi y}{b} \sin^2\frac{2\pi z}{L}\right) dV$



N 10.48 (a)

стр 18

$\bar{j} = \bar{x}_0\, j(y,z)\, e^{i\omega t}$



а) $\bar{j} = \bar{x}_0 j_0 \sin\frac{\pi y}{б} \sin\frac{\pi z}{L} e^{i\omega t}$

такое распределение плотности тока возбуждает низшую моду TE_{101}:

$\bar{E}_{\perp}^{101} = \bar{x}_0 E_0 \sin\frac{\pi y}{б} \sin\frac{\pi z}{L} e^{i\omega t}$

$$\bar{E} = \bar{E}_{вих} + \bar{E}_{пот}\,; \quad \bar{E}_{вих} = \sum_{p=1}^{\infty} e_p \bar{E}_p = e_{101}\bar{E}_{101}$$

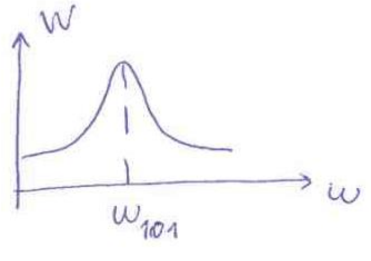
$$e_{101} = \frac{1}{(\omega^2-\omega_{101}^2)}\frac{1}{N_{101}} \iiint \omega \bar{j}\,\bar{E}_{101}\, dV =$$

$$= \frac{1}{(\omega^2-\omega_{101}^2)}\frac{1}{N_{101}} \int_0^a\int_0^б\int_0^L \omega j_0 E_0 \sin^2\frac{\pi y}{б}\sin^2\frac{\pi z}{L}\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \frac{\omega j_0 E_0\, a б L}{(\omega^2-\omega_{101}^2)\, 4 N_{101}}$$

$$W = \frac{\varepsilon}{8\pi} e_{101}^2 \iiint |\bar{E}_{101}|^2 dV = \frac{\varepsilon E_0^2}{8\pi} e_{101}^2 \int_0^a\int_0^б\int_0^L \sin^2\frac{\pi y}{б}\sin^2\frac{\pi z}{L}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \frac{\varepsilon\, e_{101}^2}{32\pi}\, a б L E_0^2$$



N 10.48 (б) стр 19

б) $\bar{j} = \underbrace{\bar{x}_0\, j_0 \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{\pi z}{L} e^{i\omega t}}_{\text{возбуждает моду } TE_{101}} + \underbrace{\bar{x}_0\, j_0 \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{2\pi z}{L} e^{i\omega t}}_{\text{возбуждает моду } TE_{102}}$

$$\bar{E}_{вых} = \sum_{p=1}^{\infty} e_p \bar{E}_p = e_{101}\bar{E}_{101} + e_{102}\bar{E}_{102}.$$

$$\bar{E}_{101} = \bar{x}_0 E_0 \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{\pi z}{L} e^{i\omega t}$$

$$\bar{E}_{102} = \bar{x}_0 E_0 \sin\frac{\pi y}{b} \sin\frac{2\pi z}{L} e^{i\omega t}$$

$$e_{101} = \frac{1}{(\omega^2-\omega_{101}^2)}\frac{1}{N_{101}} \iiint \omega\, \bar{j}\, \bar{E}_{101}\, dV =$$

$$= \frac{1}{(\omega^2-\omega_{101}^2)} \frac{j_0 E_0 \omega}{N_{101}} \int_0^a\int_0^b\int_0^L \left(\sin^2\frac{\pi y}{b}\sin^2\frac{\pi z}{L} + \sin^2\frac{\pi y}{b}\sin\frac{2\pi z}{L}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sin\frac{\pi z}{L}\right)dx\,dy\,dz = \frac{\omega j_0 E_0 a b L}{(\omega^2-\omega_{101}^2)\,4N_{101}}$$

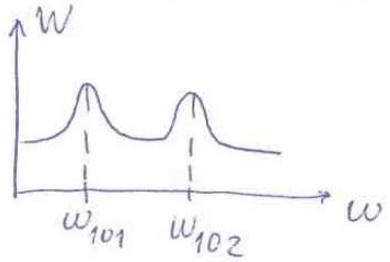
$$\int_0^L \sin\frac{2\pi z}{L}\sin\frac{\pi z}{L}\,dz = 0.\ !$$

$$e_{102} = \frac{1}{(\omega^2-\omega_{102}^2)}\frac{1}{N_{102}} \iiint \omega\, \bar{j}\, \bar{E}_{102}\, dV =$$

$$= \frac{1}{(\omega^2-\omega_{102}^2)} \frac{j_0 E_0 \omega}{N_{102}} \int_0^a\int_0^b\int_0^L \left(\sin^2\frac{\pi y}{b}\sin\frac{\pi z}{L}\sin\frac{2\pi z}{L} + \right.$$

$$\left.+ \sin^2\frac{\pi y}{b}\sin^2\frac{2\pi z}{L}\right)dx\,dy\,dz = \frac{\omega j_0 E_0 a b L}{(\omega^2-\omega_{102}^2)\,4N_{102}}.$$

$$W = \frac{\varepsilon}{8\pi}\iiint\left(|\bar{E}_{101}|^2_{e^2_{101}} + |\bar{E}_{102}|^2_{e^2_{102}}\right)dV = \frac{\varepsilon\, a b L E_0^2}{32\pi}\left(e_{101}^2 + e_{102}^2\right)$$



11.1(1,2,3)

№ 11.1.

Тело, помещ. в поле плоской монохром. волн, явл-ся источником расходящейся от него сферич. рассеянной волн. Пок-ть:

1) $S_{расс} = \sigma_d \frac{S_{пад}}{r^2}$; связь $E_{расс}$ и $E_{пад}$?

2) Каковы условие применимости?

3) $\sigma_{tot} = ?$

Решение:

1) $\sigma_d(\vec{n}) = \frac{dP(\vec{n})}{d\Omega}\cdot\frac{1}{S_{пад}}$ – отношение потока энергии, рассеиваемого в единицу тел. угла в данном напр-ии к средней плотности потока энергии в пад. волне.

Т.к. $dP(\vec{n}) = S_{расс}\cdot ds$, $d\Omega = \frac{ds}{r^2}$, то $\boxed{\sigma_d(\vec{n}) = \frac{S_{расс}}{S_{пад}}\cdot r^2}$, при этом $\sigma_d(\vec{n}) \equiv \sigma_d(\varphi,\theta)$, т.к. $S_{расс} \sim \frac{1}{r^2}$, $S_{расс} \sim |\vec{E}_{расс}|^2 \sim \frac{1}{r^2}$ (поле расх. сферич. волны).

Т.к. $S_{расс} = \frac{c}{8\pi}|\vec{E}_{расс}|^2$, $S_{пад} = \frac{c}{8\pi}|\vec{E}_{пад}|^2$, то

$$\sigma_d(\vec{n}) = \frac{|\vec{E}_{расс}|^2}{|E_{пад}|^2} r^2, \Rightarrow \boxed{|\vec{E}_{расс}|(r,\varphi,\theta) = \frac{E_{пад}}{r}\sqrt{\sigma_d(\varphi,\theta)}}$$

амплитуда расс. волны.

2) Условие применимости для $\sigma_d(\vec{n})$:

$$\begin{cases} r \gg L & \text{– дальняя зона} \\ r \gg \lambda & \text{– волнов. зона} \\ \sqrt{\lambda r} \gg L & \text{– зона Фр-ра} \end{cases}$$

3) Полное сечение рассеяния:

$$ds = r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$\sigma_{tot} = \int\limits_{(4\pi)} \sigma_d(\varphi,\theta)\, d\Omega = \int \sigma_d(\varphi,\theta)\frac{ds}{r^2} = \boxed{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma_d(\varphi,\theta) \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \sigma_{tot}}$$

σ_{tot} – это площадка, если её поставить ⊥-но напр-ию распр-я $\vec{k}_{пад}$, то полный поток энергии, прох-ий ч/з неё есть полный поток энергии рассеянной волны по всем направлениям.

$\sigma_d(\vec{n})$ – это площадка, если её поставить ⊥-но напр-ию распр-я $\vec{k}_{пад}$, то поток энергии падающей волны, проходящий ч/з неё есть поток энергии расс. излучения в единиц. тел. угле в данном напр-ии.