Интегралы, зависящие от параметров, и операционное исчисление

Глава I. Интегралы, зависящие от параметра.

1.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра.

Понятие собственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть $f(x,y)$ – функция, определенная в прямоугольнике $\Pi=[a,b]\times[c,d]$ и интегрируемая по x на отрезке $[a,b]$ для $\forall\, y\in[c,d]$. Тогда интеграл

$$\boxed{I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx} \qquad (1)$$

называется собственным интегралом, зависящим от параметра "y".

Свойства интеграла (1).

1) Теорема о непрерывности $I(y)$.
Если $f(x,y)\in\mathbb{C}(\Pi)$, то $I(y)\in\mathbb{C}([c,d])$.

Д-во: рассмотрим приращение функции $I(y)$ в произвольной точке $y\in[c,d]$

$$\Delta I = I(y+\Delta y)-I(y) = \int_a^b f(x,y+\Delta y)\,dx-\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b\left[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right]dx.$$

Согласно теореме Кантора: если функция $f(x,y)$ непрерывна на замкнутом множестве, то она и равномерно непрерывна на нем, т.е. $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall x: x\in[a,b]$ и $\forall\, y,\Delta y$: $y\in[c,d]$, $y+\Delta y\in[c,d]$ и таких, что $|\Delta y|<\delta$:

$$\boxed{|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|<\varepsilon.}$$

Отсюда имеем: $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall\, y, y+\Delta y\in[c,d]$ таких, что $|\Delta y|<\delta$:

$$|\Delta I|\le\int_a^b|f(x,y+\Delta y)-f(x,y)|\,dx<\varepsilon(b-a).$$

Это и означает, что $\Delta I \to 0$ при $\Delta y \to 0$, т.е. функция $I(y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$. ■

Следствие.

Поскольку, в силу непрерывности $I(y)$

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0),$$ то

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx.$$

Мы учли непрерывность $f(x,y)$ в прямоугольнике П. Таким образом, при непрерывности $I(y)$ предел можно подносить под знак собственного интеграла.

② Теорема об интегрируемости $I(y)$.

Если $f(x,y) \in C(\Pi)$, то функция $I(y)$ интегрируема на отрезке $[c,d]$ и справедлива формула

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy, \qquad (2)$$

т.е. интегралы можно менять местами (проводить интегрирование по параметру).

Д-во: согласно предыдущей теореме $I(y) \in C([c,d])$, значит она и интегрируема на отрезке $[c,d]$. Формула (2) равенства двух повторных интегралов вытекает из их равенства двойному интегралу

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy. \ ■$$

Замечание.

Вместо верхнего предела в формуле (2) можно брать $\forall y \in [c,d]$.

Пример.

Вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$, где $0<a<b$.

Интеграл является собственным, поскольку подынтегральная функция в т. $x=0$ обращается в нуль, а в т. $x=1$ равна $(b-a)$.

Замечая, что

$$\int_a^b x^y\,dy = \frac{x^y}{\ln x}\Big|_a^b = \frac{x^b - x^a}{\ln x},$$

имеем

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y\,dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Воспользовались непрерывностью функции x^y в области $0 \le x \le 1$, $a \le y \le b$.

3 <u>Теорема о дифференцируемости</u> <u>$I(y)$.</u>

Если $f(x,y), f'_y(x,y) \in C(\Pi)$, то <u>функция</u> $I(y)$ <u>дифференцируема</u> в интервале (c,d) и ее производная вычисляется по формуле

$$\boxed{I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx.} \qquad (3)$$

Формула (3) означает, что в условиях теоремы можно проводить дифференцирование под знаком интеграла по параметру.

<u>Д-во:</u> введем вспомогательную функцию

$$K(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

В силу непрерывности $f'_y(x,y)$ функция $K(y)$ непрерывна и интегрируема на отрезке $[c,d]$ по доказанным ранее теоремам.

Тогда,

$$\int_c^y K(t)\,dt = \int_c^y dt \int_a^b f'_t(x,t)\,dx =$$

для $\forall y \in [c,d]$

$$= \int_a^b dx \int_c^y f'_t(x,t)\,dt = \int_a^b [f(x,y) - f(x,c)]\,dx = \underline{I(y) - I(c)} = I(y)\Big|_c^y.$$

Отсюда следует, что $I(y)$ является первообразной от $K(y)$, т.е.

$$\exists\, I'(y)=K(y)=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx. \quad ▨$$

Пример.

Вычислим интеграл

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\ln(a^2-\sin^2x)\,dx \quad (a>1).$$

Применим дифференцирование под знаком интеграла. Тогда,

$$I'(a)=2a\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a^2-\sin^2x} =$$

операция законна, поскольку подынтегральная функция непрерывна в области $0\le x\le \frac{\pi}{2}$, $a>1$

$$= \left\{\operatorname{ctg}x=t\right\} = 2a\int_0^{+\infty}\frac{dt}{a^2(1+t^2)-1} = \frac{2a}{a^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+\frac{a^2t^2}{a^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\cdot$$

$$\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{at}{\sqrt{a^2-1}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Проинтегрируем полученное выражение $I(a)=\pi\int\frac{da}{\sqrt{a^2-1}} =$

$$= \pi\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)+C.$$

Осталось определить постоянную C. Для этого преобразуем исходный интеграл

$$I(a)=\int_0^{\pi/2}\left[\ln a^2+\ln\left(1-\frac{\sin^2x}{a^2}\right)\right]dx = \pi\ln a+\int_0^{\pi/2}\ln\left(1-\frac{\sin^2x}{a^2}\right)dx.$$

Сравнивая два получившихся выражения, имеем

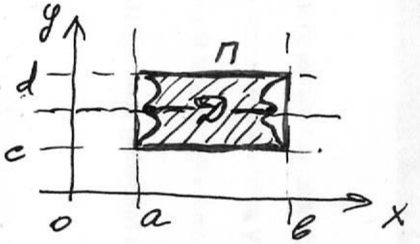
$$C=-\pi\ln\left(1+\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)+\int_0^{\pi/2}\ln\left(1-\frac{\sin^2x}{a^2}\right)dx.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу $a\to+\infty$. Учитывая непрерывность подынтегральной функции получаем $C=-\pi\ln 2$, и окончательно

$$\int_0^{\pi/2}\ln(a^2-\sin^2x)\,dx=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}$$

Общий случай зависимости от параметра.

Пусть функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $П$, в который входит область $D=\{(x,y): a(y)\le x\le b(y),\ c\le y\le d\}$: $D\subset П$. Если при $\forall y\in[c,d]$ $f(x,y)$ интегрируема по x на отрезке $[a(y), b(y)]$, то на отрезке $[c,d]$ определена функция



$$\boxed{I(y)=\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx} \qquad (4)$$

— собственный интеграл с зависящими от параметра пределами.

Подобная конструкция возникает при "расписывании" двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ через повторное, а именно

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx.$$

Свойства интеграла общего вида.

4 Теорема о непрерывности $I(y)$.

Пусть $f(x,y)\in \mathbb{C}(П)$, а $a(y), b(y)\in \mathbb{C}([c,d])$. Тогда $I(y)\in \mathbb{C}([c,d])$.

Д-во: зафиксируем некоторое $y_0\in[c,d]$ и представим $I(y)$ в силу свойства аддитивности в виде суммы трех интегралов

$$I(y) = \underbrace{\int\limits_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx}_{I_1(y)} + \underbrace{\int\limits_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx}_{I_2(y)} - \underbrace{\int\limits_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx}_{I_3(y)}. \qquad (5)$$

Первый интеграл с фиксированными пределами — непрерывная функция "y" по доказанной ранее теореме 1. Следовательно,

$$\boxed{\lim_{y\to y_0} I_1(y) = I(y_0).}$$

Оценим величину двух оставшихся интегралов $I_2(y)$ и $I_3(y)$. В силу непрерывности $f(x,y)$ на замкнутом множестве $П$, она ограничена на нем, т.е.

$$\exists M>0: \ |f(x,y)|\le M \ \text{ для } \forall (x,y)\in П.$$

Тогда,

$$|I_2(y)| = \left| \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right| \le \underline{\underline{M\,|b(y)-b(y_0)|}},$$

$$|I_3(y)| = \left| \int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx \right| \le \underline{\underline{M\,|a(y)-a(y_0)|}}.$$

В силу непрерывности функций $a(y)$ и $b(y)$ на отрезке $[c,d]$:

$$\boxed{\lim_{y\to y_0} I_2(y) = \lim_{y\to y_0} I_3(y) = 0,}$$

что и доказывает теорему:

$$\lim_{y\to y_0} I(y) = I(y_0).$$

■

5 Теорема о дифференцируемости $I(y)$.

Пусть $f(x,y),\ f'_y(x,y) \in C(\Pi)$, а функции $a(y)$ и $b(y)$ дифференцируемы в интервале (c,d). Тогда $I(y)$ дифференцируема в интервале (c,d) и справедливо правило Лейбница

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx + b'(y) f(b(y),y) - a'(y) f(a(y),y). \quad (6)$$

Д-во: зафиксируем $y_0 \in [c,d]$ и запишем $I(y)$ в форме (5). Первый интеграл в (5) имеет постоянные пределы интегрирования и по теореме 3 о дифф-ти $I(y)$ имеет производную в т. y_0 вида $\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f'_y(x,y_0)\,dx$. Докажем, что второе слагаемое в (5) имеет производную в т. $y=y_0$. Поскольку оно обращается в 0 при $y=y_0$, достаточно убедиться в $\exists$ предела

$$\lim_{y\to y_0} \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \Big/ (y-y_0),$$

который по определению и будет равен производной.

Применим формулу для среднего значения интеграла

$$\boxed{\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = f(\xi,y)[b(y)-b(y_0)],}$$

причем в силу непр-ти $f(x,y)$ ξ заключено между $b(y_0)$ и и $b(y)$. Подставляя это выражение в формулу для предела, имеем

$$\lim_{y\to y_0} \frac{b(y)-b(y_0)}{y-y_0} \cdot f(\xi, y). \Rightarrow \text{на произведение}$$

В силу ~~непрерывности~~ дифференцируемости предела $b(y)$ и непр-ти $f(x,y)$: $\lim\limits_{y\to y_0} \frac{b(y)-b(y_0)}{y-y_0} = b'(y_0)$,

$f(\xi, y) \to f(b(y_0), y_0)$ при $y \to y_0$.

Таким образом, рассматриваемый предел $\exists$ и равен

$$b'(y_0) f(b(y_0), y_0).$$

Аналогичным образом показывается, что и третье слагаемое в (5) имеет производную, равную

$$-a'(y_0) f(a(y_0), y_0).$$

Складывая все результаты, приходим к формуле Лейбница (6). ▨

Замечание.
Доказанная теорема справедлива и когда функция $f(x,y)$ определена только в D и удовл-ет необх. условиям.

Пример. Докажем формулу Коши.

Рассмотрим следующий интеграл, зависящий от параметра

$$\boxed{F(x) = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt,}$$

где $n \in \mathbb{N}$. Будем считать функцию $f(x)$ непрерывной. Тогда выполняются все условия теоремы о дифференцировании $F(x)$ и существует $F'(x)$. Вычислим ее по формуле Лейбница:

$$F'(x) = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}\, dt + \underbrace{f(x) \frac{(x-x)^{n-1}}{(n-1)!}}_{=0} = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}\, dt.$$

Этот интеграл снова можно дифференцировать по x в силу непрерывности подынтегральной функции и ее производной.

В результате, находим

$$F''(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-3}}{(n-3)!}\,dt.$$

Продолжая дифференцирование, имеем

$$F^{(n-1)}(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

и, наконец,

$$\boxed{F^{(n)}(x) = f(x).}$$

Таким образом, подынтегральная функция является "n"-ой производной $F(x)$. Интегрируя полученное соотношение "n" раз с учетом н.у.: $F(0)=F'(0)=\ldots=F^{(n-1)}(0)=0$, получаем

$$F(x) = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n.$$

Сопоставляя это соотношение с исходным, мы и получаем формулу Коши

$$\int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,dt_n.$$

1.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Определение.

Пусть в полуполосе $\Pi_\infty=[a,\infty)\times[c,d]$ задана функция $f(x,y)$, интегрируемая по x на полупрямой $a\le x<\infty$ при $\forall y\in[c,d]$. Тогда на отрезке $[c,d]$ определена функция

$$\boxed{\mathcal{I}(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx,}$$

называемая несобственным интегралом I-го рода, зависящим от параметра "y". При этом говорят, что интеграл $\mathcal{I}(y)$ сходится на $[c,d]$.

Определение равномерной сходимости.

Несобственный интеграл $\mathcal{I}(y)$ называется равномерно сходящимся отн-но параметра "y" на отрезке $[c,d]$, если он сходится на $[c,d]$ и по $\forall\varepsilon>0$ $\exists A=A(\varepsilon)\ge a:$ $\forall R>A(\varepsilon)$ и $\forall y\in[c,d]:$ $\left|\int_R^\infty f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$

Заметим, что равномерность заключена в том, что значение A зависит только от ε и не зависит от параметра "y".

Теорема.

Критерий Коши равномерной сходимости.

Для равномерной сходимости несобственного интеграла $I(y)$ отн-но параметра "y" на отрезке $[c,d]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) \geq a : \forall R', R'' > A(\varepsilon)$ и $\forall y \in [c,d]$:

$$\boxed{\left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.}$$

Д-во:

$\Rightarrow$ необходимость

Из соотношения

$$\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx = \int_{R'}^{\infty} f(x,y)\,dx - \int_{R''}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

и определения равномерной сходимости, получаем

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx \right| < 2\varepsilon.$$ ▨

$\Leftarrow$ достаточность

Поскольку R' и R'' произвольны, то можно положить в неравенстве $R'' \to +\infty$, и мы придём к определению равномерной сходимости. ▨

Применение данного критерия на практике вызывает затруднение, поскольку требует вычисление интеграла. Критерий Коши используют при доказательстве теорем и при установлении неравномерной сходимости (принцип отрицания).

Чаще применяют различные достаточные признаки равномерной сходимости несобственного интеграла I-го рода, зависящего от параметра.

Признак Вейерштрасса.

Если во всех точках полуполосы Π_∞ выполняется неравенство:

$$\boxed{|f(x,y)| \leq g(x),}$$

и несобственный интеграл $\int_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то интеграл $J(y)$ сходится равномерно относительно "y" на $[c,d]$.

Д-во:

записываем критерий Коши сходимости интеграла $\int_a^\infty g(x)\,dx$:

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists A = A(\varepsilon) \geq a : \ \forall R', R'' > A(\varepsilon)$ $(R'<R'')$:

$$\boxed{\int_{R'}^{R''} g(x)\,dx < \varepsilon.}$$

Тогда в силу условий теоремы справедлива очевидная оценка

$$\boxed{\left|\int_{R'}^{R''} f(x,y)\,dx\right| \leq \int_{R'}^{R''} |f(x,y)|\,dx < \varepsilon,}$$

и несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ равномерно сходится по критерию Коши. ▨

Следствие.

Пусть функция $\varphi(x,y)$ определена в полуполосе Π_∞, ограничена в ней и при $\forall y \in [c,d]$ интегрируема по x на $\forall$ отрезке $[a,R]$ $(\forall R>a)$. Тогда из абсолютной сходимости интеграла

$$\int_a^\infty h(x)\,dx$$

следует равномерная сходимость интеграла $\int_a^\infty \varphi(x,y)h(x)\,dx$ относительно параметра "y" на отрезке $[c,d]$.

Для доказательства достаточно воспользоваться признаком Вейерштрасса, положив

$$f(x,y) = \varphi(x,y)\,h(x),$$

и учесть, что в силу ограниченности $\varphi(x,y)$:

$$\exists M>0 \ : \ |\varphi(x,y)| \leq M, \ \forall (x,y)\in\Pi_\infty.$$

Тогда,

$$|f(x,y)| \leq M\,|h(x)|,$$

а $\int_a^\infty |h(x)|\,dx$ – сходится в силу абс. сх-ти $\int_a^\infty h(x)\,dx$.

Признак Вейерштрасса вместе с равномерной сходимостью гарантирует и абсолютную сходимость интеграла $I(y)$. К условно сходящимся интегралам применяют более тонкие достаточные признаки равномерной сходимости.

Признак Дирихле.

Пусть функция $f(x,y)$, определенная в полуполосе Π_∞, интегрируема по x на $\forall [a,R]$ при $\forall y \in [c,d]$, причем ее первообразная равномерно ограничена:

$$\boxed{\exists M>0: \left|\int_a^R f(x,y)\,dx\right| \le M \quad \text{для } \forall R>a \text{ и } \forall y\in[c,d].}$$

Пусть также функция $g(x)$, определенная при $x \ge a$, монотонно ~~стремится~~ к нулю при $x \to +\infty$. Тогда несобственный интеграл I-го рода

$$\int_a^\infty f(x,y)\,g(x)\,dx$$

сх-ся равномерно относительно параметра "y" на отрезке $[c,d]$.

Признак Абеля.

Если несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится, а функция $g(x,y)$, определенная в полуполосе Π_∞ и монотонная по x, равномерно ограничена в Π_∞, т.е.

$$\exists M>0: \quad |g(x,y)| \le M \text{ для } \forall y\in[c,d],$$

то несобственный интеграл I-го рода

$$\int_a^\infty f(x)\,g(x,y)\,dx$$

сходится равномерно относительно параметра "y" на отрезке $[c,d]$.

Заметим, что в признаках Дирихле и Абеля равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра, "скрыта" в равномерной ограниченности первообразной $f(x,y)$ и функции $g(x,y)$ соответственно

Докажем признак Абеля.

Д-во: запишем критерий Коши сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$: $\forall \varepsilon>0 : \exists A=A(\varepsilon) : \forall R', R''>A$ $(R'<R'')$: $\left|\int_{R'}^{R''} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Воспользуемся второй теоремой о среднем для интеграла $\int_{R'}^{R''} f(x)g(x,y)dx$ (монотонность $g(x,y)$ по x):

$$\int_{R'}^{R''} f(x)g(x,y)\,dx = g(R',y)\int_{R'}^{\xi} f(x)dx + g(R'',y)\int_{\xi}^{R''} f(x)dx,$$

где $R'<\xi<R''$.

Тогда в соответствии с условиями теоремы справедлива оценка:

$$\left|\int_{R'}^{R''} f(x)g(x,y)dx\right| \le M\left|\int_{R'}^{\xi} f(x)dx\right| + M\left|\int_{\xi}^{R''} f(x)dx\right| \le 2\varepsilon M$$

для $\forall y\in[c,d]$.

В итоге, интеграл сходится равномерно по критерию Коши. ▨

Теорема о непрерывности несобственного интеграла I-го рода, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в полуполосе Π_∞ и интеграл $J(y)$ сходится равномерно отн-но параметра "y" на отрезке $[c,d]$. Тогда $J(y)$ является непрерывной функцией "y" на отрезке $[c,d]$.

Д-во: рассмотрим последовательность функций

$$J_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx, \quad n\in \mathbb{N}.$$

Каждая из этих функций является собственным интегралом, зависящим от параметра "y" с непрерывной $f(x,y)$, и по теореме о непрерывности, доказанной ранее, непрерывна по "y" на $[c,d]$. Из равномерной сходимости $J(y)$ вытекает равномерная сходимость функциональной последовательности $\{J_n(y)\}$ к $J(y)$ при $n\to\infty$.

В самом деле. По определению равномерной сходимости функциональной последовательности $\{J_n(y)\}$ к предельной функции $J(y)$: $\forall \varepsilon>0 \;\; \exists N=N(\varepsilon) \; : \forall n>N(\varepsilon)$

$$|J(y)-J_n(y)|<\varepsilon$$

для $\forall y\in[c,d]$.

Подставляя в неравенство $J(y)$ и $J_n(y)$, имеем

$$\boxed{\left|\int\limits_{a+n}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.} \qquad (*)$$

В силу равномерной сходимости интеграла имеем:

$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists A=A(\varepsilon)>a \; : \forall R>A(\varepsilon):$
$\forall y\in[c,d] \;\; \left|\int\limits_{R}^{\infty} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$

$N(\varepsilon)=[A(\varepsilon)-a]$

Если положить $a+n=R$, то соотношение $(*)$ будет выполняться при $\forall n>A(\varepsilon)-a$.

Как известно, для равномерно сходящихся последовательностей $\{J_n(x)\}$ непр. ф-ций предельная функция $J(y)$ также является непрерывной. ▨

Следствие 1.

Доказанная теорема дает способ установления неравномерной сходимости несобственного интеграла. Если $f(x,y)\in \mathbb{C}(\Pi_\infty)$, а функция $J(y)$ имеет точки разрыва на отрезке $[c,d]$, то несобственный интеграл сходится неравномерно отн-но параметра "y" на отрезке $[c,d]$.

Следствие 2.

Если $f(x,y)\in \mathbb{C}(\Pi_\infty)$ и $J(y)\in \mathbb{C}([c,d])$, то будет ли интеграл сходиться равномерно? В общем случае нет.

Признак Дини.

Пусть функция $f(x,y)\in \mathbb{C}(\Pi_\infty)$ и $f(x,y)\geq 0$, для $\forall y\in[c,d]$ сходится несобственный интеграл

$$J(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx$$

и $J(y)\in \mathbb{C}([c,d])$. Тогда несобственный интеграл $J(y)$ сходится равномерно отн-но параметра "y" на $[c,d]$. (Без доказательства).

Следствие 3. В силу доказанной непрерывности

$$\lim_{y\to y_0} J(y) = J(y_0), \text{ т.е.}$$

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx.$$

Предел можно подносить под знак несобственного интеграла.

Теорема о дифференцируемости несобственного интеграла I-го рода, зависящего от параметра.

Пусть функции $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в полуполосе Π_∞. Для некоторого $y_0\in[c,d]$ сходится интеграл $J(y_0)$ [redacted] и $\int_a^{\infty} f'_y(x,y)\,dx$ — равномерно сходится отн-но "y" на отрезке $[c,d]$. Тогда функция $J(y)$ дифференцируема на (c,d), причем:

$$\boxed{J'(y) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.} \qquad (8)$$

Таким образом, при указанных условиях можно проводить дифференцирование под знаком несобственного интеграла.

Д-во: опять рассмотрим вспомогательную функциональную последовательность

$$J_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)\,dx.$$

Каждый элемент этой последовательности $\{J_n(y)\}$ является собственным интегралом, зависящим от параметра "y". В силу непрерывности функций $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ по теореме о дифференцируемости

$$\boxed{\exists\ J'_n(y) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.}$$

В силу равномерной сх-ти интеграла $\int_a^{\infty} f'_y(x,y)\,dx$ равномерно сходится последовательность $\{J'_n(y)\}$ к предельной функции $\int_a^{\infty} f'_y(x,y)\,dx$ (см. предыдущую теорему). Поскольку известно, что при некотором "y_0" $\{J_n(y_0)\} \to J(y_0)$ при $n\to\infty$, то и $\{J'_n(y)\}$ равн-но сх-ся.

$$\{J'_n(y)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} J'(y).$$

А пределы должны совпадать! ▨

Теорема об интегрировании несобственного интеграла I-го рода, зависящего от параметра.

Пусть функция $f(x,y) \in C(\Pi_\infty)$ и интеграл $J(y)$ [redacted] сходится равномерно отн-но "y" на $[c,d]$. Тогда $J(y)$ можно интегрировать по параметру "y" на отрезке $[c,d]$, причем

$$\boxed{\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)\,dy.} \qquad (9)$$

Таким образом, несобственный интеграл, зависящий от параметра, можно интегрировать под знаком несобственного интеграла.

Д-во: по условиям теоремы о непрерывности $J(y)$ является непрерывной функцией "y" на $[c,d]$, а, следовательно, и интегрируемой. Осталось доказать соотношение (9).

По определению [redacted] равномерной сходимости интеграла $J(y)$ [redacted] имеем:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A = A(\varepsilon) \geq a \; : \; \forall R > A(\varepsilon)$ и $\forall y \in [c,d]$:

$$\left| \int_R^\infty f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Далее можно записать цепочку очевидных равенств

$$\int_c^d J(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^R f(x,y)\,dx + \int_R^\infty f(x,y)\,dx \right] \cdot dy = \int_a^R dx \int_c^d f(x,y)\,dy + \int_c^d dy \left[\int_R^\infty f(x,y)\,dx \right],$$

поскольку в собственных интегралах порядок интегрирования можно менять. Из последних соотношений вытекает неравенство, справедливое для $\forall R > A(\varepsilon)$

$$\left| \int_c^d J(y)\,dy - \int_a^R dx \int_c^d f(x,y)\,dy \right| \leq \int_c^d dy \left| \int_R^\infty f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon (d-c).$$

Полученное неравенство свидетельствует о существовании предела

$$\lim_{R\to+\infty}\int_a^R dx\int_c^d f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d I(y)\,dy =$$

$$= \int_c^d dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx.$$

Это и доказывает равенство (9). ▨

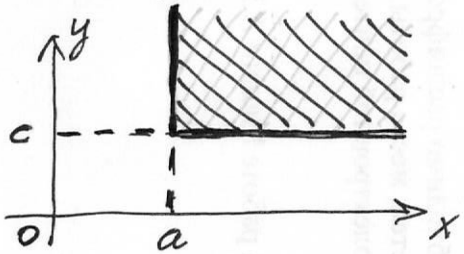
Замечание.

В формуле (9) вместо верхнего предела d можно выбирать $\forall y \in [c,d]$.

Приведем без доказательства две теоремы о возможности перестановки двух несобственных интегралов, которые понадобятся нам в дальнейших расчетах. При этом речь идет о несобственном интеграле, определенном уже не на отрезке $[c,d]$, а на бесконечном полуинтервале $[c,\infty)$.

Теорема 1.

Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна при $x \geq a$ и $y \geq c$, т.е. в бесконечном прямоугольнике, изображенном на рисунке.



Предположим, что несобственные интегралы

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad K(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$

сходятся равномерно относительно "y" и "x" соответственно на $\forall$ конечных отрезках $[c,d]$ и $[a,b]$. Тогда, если существует хотя бы один из повторных несобственных интегралов

$$\int_c^\infty I(y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx,$$

$$\int_a^\infty K(x)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)\,dy,$$

то существует и второй, равный первому:

$$\boxed{\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x,y)\,dy.}$$

Теорема Дини.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в бесконечном прямоугольнике $x \geq a,\ y \geq c$ и неотрицательна в нем: $f(x,y) \geq 0$. Пусть несобственные интегралы, зависящие от параметров,

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad K(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,dy$$

непрерывны при $y \geq c$ и $x \geq a$ соответственно. Тогда из сходимости одного из следующих двух несобственных интегралов

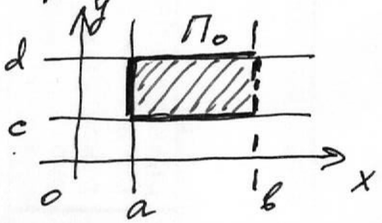
$$\int_c^\infty I(y)\,dy \quad \text{и} \quad \int_a^\infty K(x)\,dx$$

вытекает сходимость другого и равенство этих интегралов.

До сих пор мы рассматривали несобственные интегралы I-го рода, зависящие от параметра.

Определение.

Пусть функция $f(x,y)$ задана в открытом прямоугольнике $\Pi_0 = [a,b) \times [c,d]$ и неограничена при $x = b$ для $\forall\, y \in [c,d]$.



Допустим, что при $\forall\, y \in [c,d]$ несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$ сходится.

Тогда, на отрезке $[c,d]$ определена функция

$$\boxed{G(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx,}$$

называемая несобственным интегралом 2-го рода, зависящим от параметра "y".

Приведем и определение равномерной сходимости для данного интеграла.

Определение.

Несобственный интеграл $G(y)$ называется равномерно сходящимся отн-но параметра "y" на отрезке $[c, d]$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$\forall \alpha : 0 < \alpha < \delta(\varepsilon)$ и $\forall y \in [c, d]$:

$$\boxed{\left| \int_{b-\alpha}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \varepsilon.}$$

Замечание.

1. Для несобственного интеграла 2-го рода, зависящего от параметра, справедливы аналогичные критерии равномерной сходимости и теоремы о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости по параметру.

2. Несобственный интеграл 2-го рода $G(y)$, зависящий от параметра "y", с помощью замены переменной может быть сведен

к несобственному интегралу 1-го рода. В самом деле, если положить $t = \frac{1}{b - x}$, то

$x = b - \frac{1}{t}$; $dx = \frac{dt}{t^2}$, и интеграл принимает вид

$$G(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}, y\right) \frac{dt}{t^2}.$$

1.3. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению именных несобственных интегралов.

(a) Интеграл Дирихле.

Приведем примеры расчета так называемых "именных" несобственных интегралов, пользуясь ранее рассмотренными признаками и теоремами. Вычислим, прежде всего, интеграл Дирихле

$$\boxed{\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.}$$

Интеграл Дирихле относится к условно сходящимся несобственным интегралам.

Действительно, несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \text{ — расходится},$$

поскольку

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x} \quad (x \geq 0),$$

а интеграл снизу расходится:

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \overbrace{\int_0^1 \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx}^{<\infty} + \overbrace{\int_1^\infty \frac{dx}{2x}}^{\infty} - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$$

В то же время, по признаку Дирихле:

$$\left|\int_0^R \sin x\,dx\right| = |1-\cos R| \leq 2$$

для $\forall R > 0$,

а функция $\frac{1}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Поэтому интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \text{ — сходится условно}$$

по признаку Дирихле.

Следует сразу заметить, что существует много приемов вычисления данного интеграла. Например, с помощью вычетов, известных Вам по прошлому семестру. В то же время первообразная не выражается в элементарных функциях.

Хотя параметр явно не присутствует в данном интеграле, ничто не мешает нам ввести его искусственно, рассмотрев вспомогательный интеграл вида

$$\boxed{I(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,\frac{\sin x}{x}\,dx,}$$

где параметр $\alpha \geq 0$. Докажем, что $I(\alpha)$ сходится равномерно относительно α в указанной области прямо по определению. Сделаем некоторые предварительные оценки.

Вычислим неопределенный интеграл

$$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx,$$

используя интегрирование по

частям, но формулу Эйлера.

$$\underline{\underline{\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx}} = \mathrm{Im}\left\{\int e^{-\alpha x + ix}dx\right\} =$$

$$= \mathrm{Im}\left\{\frac{-e^{-\alpha x}(\cos x + i\sin x)}{+\alpha - i}\right\} + C =$$

$$= -\frac{e^{-\alpha x}(\cos x + \alpha\sin x)}{\alpha^2+1} + C.$$

Преобразуем ответ:

$$\cos x + \alpha\sin x = \sqrt{1+\alpha^2}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}}_{=\cos\varphi_0}\cos x + \underbrace{\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}_{=\sin\varphi_0}\sin x\right) = \sqrt{1+\alpha^2}\,(\cos\varphi_0\cos x +$$

$$+ \sin\varphi_0\cdot\sin x) = \sqrt{1+\alpha^2}\cos(x-\varphi_0),$$

где: $\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \alpha$. Величину $\sqrt{1+\alpha^2}$ называют <u>амплитудой колебание</u>, а φ_0 — <u>фазой колебание</u>. В результате имеем

$$\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \Phi(x,\alpha) + C,$$

где $\boxed{\Phi(x,\alpha) = -\frac{e^{-\alpha x}}{\sqrt{1+\alpha^2}}\cos(x-\varphi_0).}$

Найденная первообразная при <u>$\alpha \geq 0$</u> и <u>$x \geq 0$</u> ограничена. В самом деле,

$$\boxed{|\Phi(x,\alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \leq 1.}$$

Оценим теперь интеграл, входящий в определение равномерной сходимости

$$\int_A^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx$$

для $\forall A > 0$. Выполним интегрирование по частям:

$$\underline{\underline{\int_A^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx}} = \int_A^\infty \frac{1}{x}\,d\Phi(x,\alpha) =$$

$$= \left.\frac{\Phi(x,\alpha)}{x}\right|_A^\infty + \int_A^\infty \frac{\Phi(x,\alpha)}{x^2}dx =$$

$$= -\frac{\Phi(A,\alpha)}{A} + \int_A^\infty \frac{\Phi(x,\alpha)}{x^2}dx,$$

поскольку $\Phi(x,\alpha)$ ограничена при $x \geq 0$ и $\alpha \geq 0$, а функция $1/x \to 0$ при $x \to +\infty$.

Теперь есть все необходимое для оценки интеграла. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int_A^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{|\Phi(A,\alpha)|}{A} +$$

$$+\left|\int_A^\infty \frac{\Phi(x,\alpha)}{x^2}dx\right| \le \frac{1}{A}+\int_A^\infty \frac{|\Phi(x,\alpha)|}{x^2}dx \le$$

$$\le \frac{1}{A}+\int_A^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{A}-\frac{1}{x}\Big|_A^\infty = \frac{2}{A}.$$

Положим $\frac{2}{A}=\varepsilon$. Отсюда находим $A=A(\varepsilon)=2/\varepsilon$.

Для $\forall R>A(\varepsilon)$ имеем

$$\boxed{\left|\int_R^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \frac{2}{R} < \frac{2}{A}=\varepsilon.}$$

Но тогда по $\forall \varepsilon>0$ мы нашли число $A=A(\varepsilon)=2/\varepsilon>0$ такое, что для $\forall R>A(\varepsilon)$ и $\forall \alpha\ge 0$ выполняется вышеприведенное неравенство. Это означает, что интеграл $J(\alpha)$ сходится равномерно по параметру α в области $\alpha\ge 0$ (по определению).

Из равномерной сходимости интеграла $J(\alpha)$ и непрерывности подынтегральной функции в области $\alpha\ge 0$, $x\ge 0$ вытекает непрерывность функции $J(\alpha)$ по параметру α в области $\alpha\ge 0$. Но тогда, в частности,

$$J(0)=\lim_{\alpha\to+0}J(\alpha), \text{ т.е.}$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx.}$$

Наша дальнейшая задача состоит в отыскании функции $J(\alpha)$.

Применим метод интегрирования по параметру

$$J(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx\int_0^1 \cos tx\,dt \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=}\int_0^1 dt\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos tx\,dx.$$

Докажем возможность перестановки интегралов. Для этого нужно доказать равномерную сходимость несобственного интеграла относительно параметра t в интервале $(0,1)$. Применим признак Вейерштрасса.

$$\left|e^{-\alpha x}\cos tx\right| \le e^{-\alpha x} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} < \infty.$$

Вычислим несобственный интеграл, применив прием из теории функций комплексного переменного.

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos tx\,dx = \mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty e^{-\alpha x} e^{itx}\,dx\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\alpha - it}\right\} = \frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}.$$

В итоге, $J(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha\,dt}{\alpha^2+t^2} =$

$$= \mathrm{arctg}\,\frac{t}{\alpha}\Big|_0^1 = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\alpha}.$$

Отсюда находим значение интеграла Дирихле

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\alpha\to+0}\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}.}$$

Рассмотрим интеграл вида

$D(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx$. Если $\alpha>0$, то после замены $\alpha x = y$ получаем

$$\boxed{D(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \pi/2.}$$

Поскольку $D(\alpha)$ является нечетной функцией, то для $\alpha<0$ $D(\alpha) = -\pi/2$.

Наконец, для $\alpha = 0$ $D(0) = 0$, что проверяется непосредственной подстановкой.

Таким образом,

$$\boxed{D(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \begin{cases} \pi/2, & \alpha>0,\\ 0, & \alpha=0,\\ -\pi/2, & \alpha<0.\end{cases}}$$

Данный несобственный интеграл называют разрывным множителем Дирихле.

Поскольку

$$D(\alpha) = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,\alpha,$$

то отсюда получаем следующее аналитическое представление скачкообразной знаковой функции через интеграл от непрерывной

$$\boxed{\mathrm{sgn}\,\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx.}$$

(б) Интеграл Пуассона.

Вычислим интеграл Пуассона

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx,$$

встречающийся в различных задачах статистической механики, теории вероятностей и математической статистики.

Положим в интеграле $x=\alpha t$, где параметр $\alpha>0$. Тогда имеем

$$\Phi(\alpha)=\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha^2t^2}dt.$$

Умножим равенство на $e^{-\alpha^2}$ и проинтегрируем по "α" от [redacted] до ∞ ([redacted] >0)

$$\int_{\text{[redacted]}}^\infty \Phi(\alpha)e^{-\alpha^2}d\alpha=\int_{\text{[redacted]}}^\infty \alpha e^{-\alpha^2}d\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha^2t^2}dt.$$

Воспользуемся условиями сформулированной ранее [redacted] теоремы Дини.

Функция

$$f(\alpha,t)=\alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}$$

непрерывна при $\alpha\geq$ [redacted] и $t\geq 0$ и неотрицательна.

Функция

$$K(t)=\int_{\text{[redacted]}}^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}d\alpha=\frac{1}{2(1+t^2)}\ \text{[redacted]}$$

непрерывна при $t\geq 0$. Функция

$$I(\alpha)=\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}dt=e^{-\alpha^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

в области $\alpha\geq$ [redacted] также непрерывна.

Тогда по теореме Дини мы имеем право переставить [redacted] интегралы местами, изменив порядок интегрирования.

$$\int_{\text{[redacted]}}^\infty \alpha e^{-\alpha^2}d\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha^2t^2}dt=\int_0^\infty dt\int_{\text{[redacted]}}^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}d\alpha=$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{2(1+t^2)}\ \text{[redacted]}\ dt.$$

~~Перейдём в этом равенстве к пределу~~ [redacted]. В результате имеем

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Итак, окончательно

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

~~Переход к пределу под знаком несобственного интеграла возможен, поскольку он равномерно сходится относительно параметра ε в области $\varepsilon \geq 0$. В самом деле, по признаку Вейерштрасса:~~

$$\cancel{\left|\frac{e^{-\varepsilon^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \text{ и } \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} \text{ — сх-ся.}}$$

~~для $\forall \varepsilon \geq 0$.~~

(в) Интегралы Френеля.

В оптике при исследовании явления дифракции сталкиваются с необходимостью вычисления условно сходящихся интегралов

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \cos x^2 dx.$$

Вычислим, например, первый из них. Сделаем замену переменной $x^2 = t$. В результате, придем к

$$I = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Воспользуемся вычисленным интегралом Пуассона:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

А именно сделаем замену $x = \sqrt{t}\,y$, где параметр $t > 0$. Тогда

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^\infty e^{-ty^2}dy \cdot \sqrt{t} \quad \text{или}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-ty^2}dy.}$$

Подставляя это значение в интеграл, находим

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \sin t\, dt \int_0^\infty e^{-ty^2}dy.$$

По сформулированной выше первой теореме о перестановке н.и. можно поменять местами порядок интегрирования (докажите это самостоятельно). Тогда имеем

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-ty^2}\sin t\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\, Im\left\{\int_0^\infty e^{-ty^2+it}dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty Im\left\{\frac{1}{y^2-i}\right\}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty Im\left\{\frac{y^2+i}{y^4+1}\right\}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^4} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\pi}}\cdot\cancel{2}\pi i\sum_k \underset{\substack{z=z_k\\(Im\, z_k>0)}}{res}\frac{1}{1+z^4} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\pi}\, i\sum_k \underset{z=z_k}{res}\frac{1}{1+z^4}.}$$

Согласно теории вычетов, находим особые точки функции из уравнения: $z^4+1=0$ или

$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)}$, $k=0,1,2,3$.

Найденные точки являются простыми полюсами, и отбираем две $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ и $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Тогда

$$\underset{z=z_0}{res}\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{4} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{4}}}{4},$$

$$\underset{z=z_1}{res}\frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{e^{-\frac{9\pi i}{4}}}{4} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{4}.$$

В результате приходим к:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}\, i}{4}\left(e^{-\frac{\pi i}{4}} - e^{+\frac{\pi i}{4}}\right) = -\frac{2\sqrt{\pi}\, i}{4}\, i\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Итак окончательно

$$\boxed{\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Аналогичный результат получаем и для второго интеграла Френеля

$$\boxed{\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},}$$

поскольку

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos t\, dt\int_0^\infty e^{-ty^2}dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\int_0^\infty e^{-ty^2}\cos t\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dy\, Re\left\{\frac{y^2+i}{1+y^4}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{y^2dy}{1+y^4} = \left\{\begin{matrix}\frac{1}{y} = u\\ dy = -\frac{du}{u^2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4}.$$

(г) Интеграл Лапласа.

Для демонстрации еще одного приема вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра, найдем значение интеграла Лапласа

$$\boxed{I(a,b) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos 2bx \, dx,}$$

тесно связанного с интегралом Пуассона. В этом интеграле $a>0$, $-\infty<b<+\infty$. Далее без ограничения общности будем полагать $b \geq 0$.

Продифференцируем $I(a,b)$ по параметру "b", внося оператор производной под знак интеграла

$$\frac{\partial I}{\partial b} \overset{?}{=} -2 \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} \sin 2bx \, dx.$$

Докажем обоснованность подобного действия. Функции $e^{-ax^2}\cos 2bx$ и $x e^{-ax^2} \sin 2bx$ непрерывны в области $x>0$ и $b \geq 0$, а интеграл

$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} \sin 2bx \, dx$ сходится равномерно относительно параметра "b" в области $b \geq 0$. В самом деле, по признаку Вейерштрасса:

$$|x e^{-ax^2} \sin 2bx| \leq x e^{-ax^2}$$

для $\forall\ x>0$ и $b \geq 0$, а интеграл $\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2a}$ сходится.

Для вычисления $\frac{\partial I}{\partial b}$ применим интегрирование по частям.

$$\frac{\partial I}{\partial b} = -2 \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} \sin 2bx \, dx \;=$$

$$= \left\{ \begin{aligned} u &= \sin 2bx \\ dv &= -2x e^{-ax^2} dx \\ du &= 2b \cos 2bx \, dx \\ v &= \frac{1}{a} e^{-ax^2} \end{aligned} \right\} = \underbrace{\frac{1}{a} e^{-ax^2} \sin 2bx \Big|_0^{\infty}}_{=0} -$$

$$- \frac{2b}{a} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos 2bx \, dx = -\frac{2b}{a} I.$$

В результате мы пришли к дифференциальному уравнению 1-го порядка в частных производных:

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial b} + \frac{2b}{a} I = 0.}$$

Его можно решать как обычное уравнение с разделяющимися переменными, полагая "а" параметром. В результате приходим к

$$\boxed{I(a,b) = C(a)\, e^{-\frac{b^2}{a}}.}$$

Неизвестную функцию $C(a)$ находим из ранее вычисленного интеграла Пуассона, а именно

$$I(a,0) = C(a) = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

В итоге окончательно имеем

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{a}}.}$$

1.4. Интегралы Эйлера.

§4. Интегралы Эйлера.

Изучим свойства важных для практических приложений неэлементарных функций, называемых **интегралами Эйлера.** В последнее время они нашли также применение в аппарате дробного исчисления.

Эйлеровым интегралом первого рода или "бета-функцией" называют интеграл

$$\boxed{B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,} \qquad (15)$$

зависящий от двух параметров p и q. Если эти параметры удовлетворяют условиям $p<1$ и $q<1$, то интеграл (15) становится несобственным интегралом, зависящим от параметров p и q, причем особыми точками этого интеграла являются $x=0$ и $x=1$.

Эйлеровым интегралом второго

рода или "гамма-функцией" принято называть несобственный интеграл

$$\boxed{\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx,} \qquad (16)$$

зависящий от одного параметра p. Отметим, что в интеграле (16) имеется два вида особенностей: 1) интегрирование по полупрямой $0\le x<\infty$; 2) наличие при $p<1$ особой точки $x=0$ у подынтегральной функции.

а) Область ~~сходимости~~ определения интегралов Эйлера.

Докажем, что функция $B(p,q)$ определена для всех положительных значений параметров p и q, а функция $\Gamma(p)$ — для всех положительных значений p.

При $p\ge 1$ и $q\ge 1$ подынтегральная функция в выражении для $B(p,q)$ является непрерывной в области $x\in[0,1]$ и поэтому

интеграл является собственным. Следовательно, $B(p,q)$ определена в области $p\ge 1,\ q\ge 1$. Обратимся теперь к случаю, когда выполняются одно или оба из следующих неравенств

$$p<1, \quad q<1.$$

В этой ситуации одна или обе из точек $x=0$ и $x=1$ являются особыми точками подынтегральной функции. Имея это в виду, представим $B(p,q)$ в виде суммы

$$B(p,q)=\int_0^{1/2}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+$$

$$+\int_{1/2}^{1}x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=I_1(p,q)+I_2(p,q).$$

Очевидно, что каждый из интегралов I_1 и I_2 имеет лишь одну особую точку: I_1 — точку $x=0$, I_2 — точку $x=1$.

Заметим, что на отрезке $[0,1/2]$ функция $(1-x)^{q-1}$ непрерывна и

$$\boxed{x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1} \text{ при } x\to+0.}$$

Поскольку

$$\int_0^{1/2} x^{p-1}\,dx = \int_0^{1/2}\frac{dx}{x^{1-p}} \text{ сходится}$$

при $1-p<1$, т.е. $p>0$, то областью сходимости интеграла $I_1(p,q)$ является $0<p$ [redacted] и $\forall q$.

Аналогично на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$ непрерывной является функция x^{p-1} и

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1} \text{ при } x\to 1-0.$$

Интеграл

$$\int_{1/2}^{1} (1-x)^{q-1}\,dx = \int_{1/2}^{1}\frac{dx}{(1-x)^{1-q}} \text{ сходится}$$

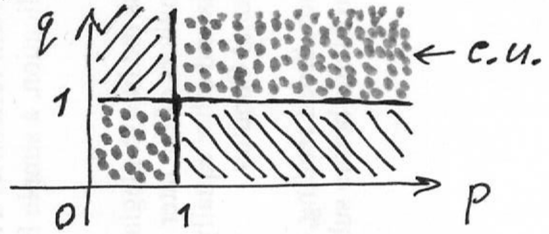
при $1-q<1$, т.е. $q>0$. Следовательно, областью сходимости несобственного интеграла $I_2(p,q)$ является: $0<q$ [redacted] и $\forall p$.

Объединяя найденные условия, находим область

сходимости несобственного интеграла $B(p,q)$:

$0<p<1, \quad q\geq 1$	I_1 – н.и.
$p\geq 1, \quad 0<q<1$	I_2 – н.и.
$0<p<1, \quad 0<q<1.$	I_1 и I_2 – н.и.

Итак, бета-функция $B(p,q)$ определена при $p>0$ и $q>0$.



Определим область определения гамма-функции $\Gamma(p)$. Разобьем интеграл на два

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx = J_1(p) + J_2(p).$$

Поскольку

$x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1}$ при $x\to+0$,

[redacted] то интеграл $J_1(p)$ сходится при $0<p$ [redacted], ~~а при $p>1$ он является собственным с непрерывной подынтегральной функцией.~~ Таким образом, $I_1(p)$ определен при $p>0$.

Интеграл $I_2(p)$ является сходящимся при $\forall p$, поскольку по предельному признаку сравнения:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-1}e^{-x}}{1/x^{r}}=\lim_{x\to+\infty}x^{r+p-1}e^{-x}=0$$

для $\forall r, p$ и, в частности, в области сходимости $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^r}$ — $r>1$.

Итак, областью определения гамма-функции $\Gamma(p)$ является полупрямая $p>0$.

б Непрерывность интегралов Эйлера.

Докажем, что функция $B(p,q)$ непрерывна в квадранте $p>0$,

4

$q>0$, а функция $\Gamma(p)$ непрерывна на полупрямой $p>0$.

Для доказательства непрерывности бета-функции $B(p,q)$ в квадранте $p>0, q>0$ необходимо убедиться в равномерной сходимости интеграла по этим параметрам в указанной области, поскольку непрерывность подынтегральной функции $x^{p-1}(1-x)^{q-1}$ очевидна.

Зафиксируем $p_0>0$ и $q_0>0$ и докажем равномерную сходимость интеграла в области $p\geq p_0$ и $q\geq q_0$. Поскольку $p-1\geq p_0-1$ и $q-1\geq q_0-1$, то для $0<x<1$ имеем оценку

$$\boxed{x^{p-1}(1-x)^{q-1}\leq x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}}.$$

В то же время $\int\limits_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}dx = B(p_0,q_0)$ — сходится. Тогда по признаку

Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла $B(p,q)$ по параметрам p и q в области $p \geq p_0$, $q \geq q_0$. Поскольку p_0 и q_0 можно выбирать сколь угодно близкими к нулю, то доказана равномерная сходимость интеграла в области $p>0$, $q>0$, а, следовательно, непрерывность бета-функции $B(p,q)$ в указанной области.

Для доказательства непрерывности гамма-функции $\Gamma(p)$ на полупрямой достаточно установить равномерную сходимость интеграла по параметру p в области $0<p_0 \leq p \leq p_1 < \infty$ для $\forall$ фиксированных значений p_0 и p_1, поскольку функция $x^{p-1}e^{-x}$ непрерывна на полупрямой $(0,\infty)$.

Используем очевидные неравенства

$$x^{p-1} \leq x^{p_0-1} \quad \text{для } 0<x\leq 1$$

и

$$x^{p-1} \leq x^{p_1-1} \quad \text{для } 1\leq x<\infty.$$

Тогда

$$\boxed{e^{-x}x^{p-1} \leq e^{-x}\left(x^{p_0-1}+x^{p_1-1}\right)}$$

в области $x\in(0,\infty)$.

В результате из сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x}\left(x^{p_0-1}+x^{p_1-1}\right)dx = \Gamma(p_0)+\Gamma(p_1)$$

вытекает по достаточному признаку Вейерштрасса равномерная сходимость интеграла

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx$$

по параметру p в области $p>0$.

В соответствии с теоремой о непрерывности имеем непрерывность $\Gamma(p)$ в области $p>0$. ∎

в) Свойства гамма-функции $\Gamma(p)$.

а) Докажем существование производной любого порядка у $\Gamma(p)$.

Возьмем производную по параметру "p" под знаком интеграла

$$\underbrace{\Gamma'(p) \overset{?}{=} \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \ln x \, dx.}$$

Для доказательства существование $\Gamma'(p)$ и равенства ее указанному интегралу необходимо проверить три условие: непрерывность подынтегральных функций $x^{p-1}e^{-x}$ и $x^{p-1}e^{-x}\ln x$, сходимость интеграла $\Gamma(p)$ для некоторого $p_0>0$ и равномерную сходимость рассматриваемого интеграла. Первые два требование оче-

видны. Потому остается доказать равномерную сходимость интеграла

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} \ln x \, dx. \qquad (*)$$

Применим достаточный признак Вейерштрасса. Зафиксируем p_0 и p_1, такие, что $0<p_0<p_1$. Тогда

$$\underbrace{|x^{p-1}e^{-x}\ln x| \le (x^{p_0-1}+x^{p_1-1})e^{-x}|\ln x|}$$

для $\forall p$: $p_0 \le p \le p_1$. Остается доказать сходимость интеграла

$$\int_0^\infty (x^{p_0-1}+x^{p_1-1})e^{-x}|\ln x| \, dx.$$

Разобьем его на два:

$$\int_0^\infty (x^{p_0-1}+x^{p_1-1})e^{-x}|\ln x|\,dx =$$

$$= \int_1^\infty (x^{p_0-1}+x^{p_1-1})e^{-x}\ln x \, dx \; +$$

$$+ \int_0^1 (x^{p_0-1}+x^{p_1-1})e^{-x}\ln\frac{1}{x}\,dx = G_1 + G_2.$$

65.

Для интеграла G_1 имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^{p_0-1}+x^{p_1-1})e^{-x}\ln x}{1/x^r}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{r+p_1-1}e^{-x}\ln x=\underline{\underline{0}}$$

для $\forall p_1, r$.

В частности, предел равен 0 и в области сходимости интеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^r}$ — $r>1$.

Поэтому интеграл G_1 сходится.

Для интеграла G_2 необходимо найти предел

$$+\lim_{x\to+0}\frac{(x^{p_0-1}+x^{p_1-1})e^{-x}\ln\frac{1}{x}}{1/x^r}=$$

$$=+\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{x^{1-r-p_0}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ для $1-r-p_0<0$

$$=+\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{(-1+r+p_0)x^{-r-p_0}}=\frac{1}{r+p_0-1}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to+0}x^{r+p_0-1}=\underline{\underline{0}}$$ для $\forall p_0, r$: $r>1-p_0$

66.

Предел равен нулю и в области сходимости интеграла $\int^{1}\frac{dx}{x^r}$ — $r<1$: $1-p_0<r<1\Rightarrow p_0>0$. Поэтому интеграл G_2 сходится, а, следовательно, сходится и интеграл, равный сумме G_1+G_2.

Тогда по признаку Вейерштрасса интеграл (*) сходится равномерно по параметру "p" на отрезке $[p_0,p_1]$. Поскольку мы выбрали параметры p_0 и p_1 произвольно, то можно взять p_0 близким к 0, а p_1 устремить на $+\infty$. Отсюда следует равномерная сходимость интеграла (*) в области $p>0$.

Итак, мы доказали существование производной гамма-функции в области ее определения:

$$\boxed{\Gamma'(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx.}$$

Аналогичным образом доказывается существование второй и всех высших производных $\Gamma(p)$. Для "n"-ой производной $\Gamma(p)$ имеем

$$\boxed{\Gamma^{(n)}(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln^n x\,dx,}$$

$$n=1,2,3,\dots$$

б) Формула приведения.

Преобразуем выражение для $\Gamma(p+1)$, применив метод интегрирования по частям,

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx=\left\{\begin{array}{l} u=x^p\\ du=px^{p-1}dx\\ dv=e^{-x}dx\\ v=-e^{-x}\end{array}\right\}=$$

$$=\underbrace{-x^pe^{-x}\Big|_0^\infty}_{=0}+p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx=p\Gamma(p),\quad p>0.$$

Итак, $\boxed{\Gamma(p+1)=p\Gamma(p).}$ (17)

Последовательно применяя (17), получим:

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma(p+1)&=p\Gamma(p)=p(p-1)\Gamma(p-1)=\dots=\\ &=p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-[p])\,\Gamma(p-[p]),\end{aligned}}\quad (18)$$

где $[p]$ – целая часть p.

Соотношение (17) называется формулой приведения для функции $\Gamma(p)$. С помощью формулы (18) гамма-функция для значений аргумента, больших 1, выражается через значения $\Gamma(p)$, лежащие в промежутке $(0,1]$.

Полагая в (18) $p=n\in\mathbb{N}$, находим

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot\Gamma(1)=n!,$$

поскольку

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=1.$$

Итак, $\boxed{\Gamma(n+1)=n!}$ (19)

Соотношение (19) позволяет рассматривать гамма-функцию в качестве обобщения факториала на случай вещественных p.

в) График функции $\Gamma(p)$.

Как мы уже установили, областью определения $\Gamma(p)$ является полупрямая $p>0$. На ней $\Gamma(p)$ непрерывна и дифференцируема бесконечное число раз, причем

$$\Gamma''(p)=\int_0^\infty e^{-x}(\ln x)^2 x^{p-1}\,dx>0.$$

Значит, график функции имеет выпуклость вниз. Заметим также, что $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$. Согласно теореме Ролля $\Gamma'(p)$ может иметь только один нуль. Ясно, что этот нуль достигается при $1<p<2$, и это — точка минимума функции. Приближенные вычисления дают

$$p_{min}\simeq 1.4616,\quad \Gamma(p_{min})\simeq 0.8856.$$

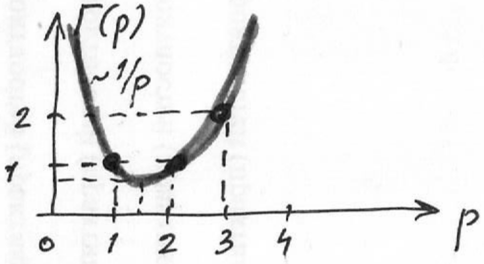
У графика функции $\Gamma(p)$ существует вертикальная асимптота $p=0$. Причем, согласно формуле (17),

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(1+p)}{p}\sim\frac{\Gamma(1)}{p}=\frac{1}{p}\to\infty,\ p\to+0.$$

Наклонных асимптот нет, поскольку

$$k=\lim_{p\to\infty}\frac{\Gamma(p)}{p}=\lim_{p\to\infty}\frac{(p-1)(p-2)\ldots}{p}=\infty.$$

Приведем теперь качественный вид графика $\Gamma(p)$, заметив, что $\Gamma(3)=2$, $\Gamma(4)=6$, $\Gamma(5)=24, \ldots$



② Свойства бета-функции.

а) Формула симметрии для $B(p,q)$.

Рассмотрим интеграл (15) и сделаем замену переменной $x=1-t$. Тогда,

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx =$$

$$=\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt)=B(q,p).$$

Итак, $\boxed{B(p,q)=B(q,p).}$ (20)

б) Формула приведения для $B(p,q)$.

Рассмотрим $B(p,q+1)$ для $p,q>0$. С одной стороны,

$$\underline{B(p,q+1)} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx = $$

$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx - \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \underline{B(p,q)-B(p+1,q)}.$$

С другой, можно взять интеграл по частям один раз

$$\underline{B(p,q+1)} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u=(1-x)^q, & du=-q(1-x)^{q-1}dx, \\ dv=x^{p-1}dx, & v=x^p/p \end{array} \right\} =$$

$$= \underbrace{\frac{x^p(1-x)^q}{p}\Big|_0^1}_{=0} + \frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \underline{\frac{q}{p}B(p+1,q)}.$$

Приравнивая полученные выражения, имеем

$$B(p,q) - B(p+1,q) = \frac{q}{p}B(p+1,q)$$

или

$$\boxed{B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q).} \quad (21)$$

Пользуясь симметрией бэта-функции, получаем из (21)

$$B(q,p+1) = \frac{p}{p+q}B(q,p).$$

Меняя в этом соотношении $q \Leftrightarrow p$, получаем еще одно равенство

$$\boxed{B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q).} \quad (22)$$

Формулы (21) и (22) называют <u>формулами приведения</u> для бэта-функции $B(p,q)$. Последовательное применение этих формул позволяет сводить вычисление $B(p,q)$ от больших аргументов к вычислению бэта-функции для значений аргументов из полуоткрытого квадрата: $\underline{0<p\le 1,\ 0<q\le 1}$.

в) Различные представления бэта-функции и следствия из них.

Существуют другие представления $B(p,q)$, которые бывают полезны при вычислении интегралов. Речь идет о представлениях в виде интеграла с бесконечным пределом и в форме тригонометрического интеграла.

Сделаем замену переменной $x = \sin^2 t$ в интеграле для $B(p,q)$:

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} x = \sin^2 t \\ 1-x = \cos^2 t, \end{matrix} \; dx = 2\sin t\cos t\,dt \right\} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t\cos^{2q-1} t\,dt.$$

Таким образом,

$$\boxed{B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} t\cos^{2q-1} t\,dt.} \quad (23)$$

Из тригонометрического представления мгновенно находим

$$\boxed{B(1/2, 1/2) = \pi.} \quad (24)$$

Заменим теперь в интеграле для $B(p,q)$ x на $\frac{1}{1+t}$. Тогда,

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx =$$

$$\left\{ x = \frac{1}{1+t};\ 1-x = \frac{t}{1+t};\ dx = -\frac{dt}{(1+t)^2} \right\}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt.$$

Итак, получаем еще одно представление бэта-функции в виде интеграла с бесконечным пределом

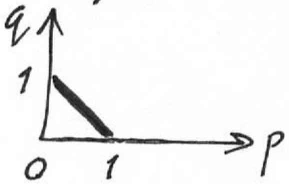
$$\boxed{B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}}.} \quad (25)$$

В формуле (25) мы воспользовались симметрией $B(p,q)$ по p и q.

Применяя представление (25), вычислим значение бэта-функции вида $B(p,1-p)$, где $0<p<1$; т.е.

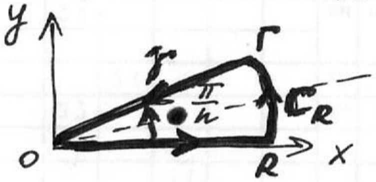
$$\boxed{B(p,1-p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{1+t}\,dt.}$$ [redacted]

Прежде всего заметим, что этот интеграл является непрерывной функцией параметра p в области [redacted] сходимости: $0<p<1$. В самом деле. Ранее мы доказали непрерывность $B(p,q)$ в области $p>0,\ q>0$. Отсюда, в частности, следует ее непрерывность на отрезке $q=1-p$.



Рассмотрим вспомогательный интеграл
$$\underbrace{\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}},$$
где m и n – натуральные числа: $m,n\in\mathbb{N}$, причем $m<n$. Для его вычисления применим теорему о вычетах.

Перейдем к комплексной переменной и выберем специальный контур интегрирования,



$$\oint\limits_\Gamma\frac{z^{2m}\,dz}{1+z^{2n}}$$

как показано на рисунке. Внутрь контура попадает лишь одна (!) особая точка: $z^{2n}=-1\Rightarrow z_0=e^{i\frac{\pi}{2n}}$.

По теореме о вычетах имеем

$$\int\limits_0^R\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}+\int\limits_0^{\pi/n}\frac{R^{2m}e^{2mi\varphi}\,iRe^{i\varphi}\,d\varphi}{1+R^{2n}e^{2ni\varphi}}-$$

$$-\int\limits_0^R\frac{\rho^{2m}e^{i\frac{2\pi m}{n}}e^{i\frac{\pi}{n}}\,d\rho}{1+\rho^{2n}\underbrace{e^{2\pi i}}_{=1}}=2\pi i\cdot\underset{z=e^{i\frac{\pi}{2n}}}{\mathrm{res}}\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}=$$

$$=2\pi i\,\frac{e^{i\frac{2\pi m}{2n}}}{2n\,e^{i\frac{\pi}{2n}(2n-1)}}=\frac{-\pi i}{n}\,e^{i\frac{\pi(2m+1)}{2n}}.$$

Переходя к пределу $R\to\infty$ в этом выражении, в силу обращения в нуль интеграла по дуге $\sim\frac{1}{R^{2(n-m)-1}}$ находим

$$\left[1-e^{i\frac{\pi}{n}(2m+1)}\right]\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{2m}\,dx}{1+x^{2n}}=-\frac{\pi i}{n}\,e^{i\frac{\pi}{2n}(2m+1)}.$$

Таким образом,

$$\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}} = \frac{\pi i}{n}\cdot\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2n}(2m+1)}-e^{-i\frac{\pi}{2n}(2m+1)}} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}(2m+1)}.$$

Заменим в вычисленном интеграле x на $t^{1/2n}$. Тогда, учитывая, что $dx=\frac{1}{2n}t^{1/2n-1}dt$, находим

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t}dt.$$

С учетом полученного результата

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2n}(2m+1)}.} \qquad (26)$$

Поскольку, к любому значению p $(0<p<1)$ можно приблизиться с помощью правильной несократимой дроби $\frac{2m+1}{2n}$ путем подбора подходящих натуральных чисел m и n, то переходя в (26) к пределу $\frac{2m+1}{2n}\to p$ и внося,

в силу непрерывности функции, предел под знак интеграла, окончательно приходим к

$$\boxed{B(p,1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}.} \qquad (27)$$

г) **Связь эйлеровых интегралов.**

Существует формула связи гамма- и бэта-функций. Для ее вывода сделаем сначала замену переменной $x=(1+t)y$ $(t>0)$ в выражении (16) для $\Gamma(p)$. Тогда имеем

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty}[(t+1)y]^{p-1}e^{-ty-y}(t+1)dy,$$

откуда

$$\frac{\Gamma(p)}{(1+t)^p} = \int_0^{+\infty}y^{p-1}e^{-ty-y}dy.$$

Заменим здесь p на $(p+q)$

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy$$

Теперь домножим обе части соотношение на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$. В результате найдем с учетом представление (25) для $B(p,q)$

$$\boxed{\Gamma(p+q)B(p,q)=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}(ty)^{p-1}y^q e^{-(1+t)y}\,dy.}$$

Проверим теперь, можно ли поменять порядок интегрирования. Воспользуемся теоремой, базирующейся на признаке Дини. Подынтегральная функция при $p>1,\ q>1$

$$f(t,y)=(ty)^{p-1}y^q e^{-(1+t)y}$$

непрерывна и неотрицательна в области $t\geq 0,\ y\geq 0$. Кроме того, функция

$$K(t)=\int_0^{+\infty}(ty)^{p-1}y^q e^{-(1+t)y}\,dy=$$

$$=\frac{t^{p-1}\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}$$

непрерывна при $t\geq 0$, а функция

$$J(y)=\int_0^{+\infty}(ty)^{p-1}y^q e^{-(1+t)y}\,dt=$$

$$=y^{q-1}e^{-y}\Gamma(p)$$

непрерывна при $y\geq 0$.

Все условие теоремы выполнены и поэтому

$$\int_0^{+\infty}K(t)\,dt=\int_0^{+\infty}J(y)\,dy=\Gamma(p)\int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}\,dy=$$

$$=\Gamma(p)\Gamma(q).$$

В результате для $p>1,\ q>1$ мы доказали формулу связи $B(p,q)$ и $\Gamma(p)$

$$\boxed{B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.\quad (28)}$$

Покажем справедливость формулы во всей области определения бета функции: $p>0,\ q>0$. Заменим в (28) p на $p+1$, q на $q+1$

$$B(p+1,q+1)=\frac{p\Gamma(p)\Gamma(q)q}{(p+q)(p+q+1)\Gamma(p+q)}.$$

Здесь мы воспользовались формулой приведения для гамма-функции. С другой стороны, в силу формулы приведения (21) и (22) для $B(p,q)$ имеем

$$\underline{B(p+1,q+1)} = \frac{p}{p+q+1} B(p,q+1) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)} B(p,q).$$

Сравнивая две получившиеся формулы, убеждаемся в справедливости формулы (28) во всей области $p>0, q>0$.

Рассмотрим некоторые следствия формулы связи бэта- и гамма-функций (28).

1 Полагая в (28) $p=m+1$, $q=n+1$, где $m,n \in \mathbb{N}$, находим

$$\underline{B(m+1,n+1)} = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} = \frac{1}{m+n+1} \cdot \frac{1}{C_{m+n}^{m}}.$$

Таким образом, если гамма-функция от натурального аргумента связана с факториалом, то бэта-функция от натуральных аргументов выражается через биномиальные коэффициенты или число сочетаний.

2 Полагая в формуле (28) $q=1-p$ и учитывая соотношение (27), получаем

$$B(p,1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

Отсюда в силу $\Gamma(1)=1$ имеем

$$\boxed{\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}.} \quad (29)$$

Формула (29), часто применяемая на практике, называется формулой дополнения для гамма-функции.

В частном случае $p=1/2$ из (29) находим

$$\Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi \Rightarrow \boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.}$$

Фактически вычислили интеграл Пуассона.

В качестве применения формулы дополнения (29) вычислим величину эйлерова произведения

$$E_n = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

для $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Переписывая это произведение в обратном порядке и домножая на E_n, имеем

$$E_n^2 = \prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-k}{n}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}}.$$

С другой стороны, уравнение $z^n = 1$ имеет "n" корней в комплексной плоскости вида $z_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Тогда,

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right)$$

или

$$\boxed{\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z - e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right).}$$

Устремляя в этом соотношении z к 1, получаем

$$\lim_{z\to 1}\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2\pi i k}{n}}\right)$$

или

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Приравнивая модули комплексных чисел, стоящих слева и справа, находим

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\left(1-\cos\frac{2\pi k}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi k}{n}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi k}{n}} = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}.$$

Таким образом, искомое произведение синусов таково

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.}$$

Подставляя это равенство в формулу для E_n^2, находим эйлерово произведение

$$E_n^2 = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n} \Rightarrow$$

$$\boxed{E_n = \prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.}$$

~~В итоге получаем значение ранее найденного интеграла Гауссона~~ $\cancel{\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

1.5. Вычисление определенных интегралов с помощью гамма- и бета-функций.

Приведем примеры расчета определенных интегралов с помощью интегралов Эйлера.

(1)
$$I = \int_0^{\infty} x^{1/4}(1+x)^{-2}\,dx.$$

Сравнивая интеграл с представлением (25) бета-функции, получаем: $p-1=1/4$, $p+q=2$. Отсюда, $p=5/4$, $q=3/4$. Тогда,

$$I = B\left(5/4, 3/4\right) \overset{(23)}{=} \frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\underbrace{\Gamma(2)}_{=1}} =$$

$$= \frac{1}{4}\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) \overset{(29)}{=} \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(2)
$$I = \int_0^{2\pi} \sin^6 x \cos^4 x\,dx.$$

Учтем, что в силу четности степеней у $\sin x$ и $\cos x$,

$$I = 4\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x\,dx.$$

Сравнивая этот интеграл с представлением бета-функции (31), определяем p и q из соотношений $2p-1=6$, $2q-1=4$. Это дает $p=7/2$, $q=5/2$. В результате

$$I = 2B\left(7/2, 5/2\right) \overset{(23)}{=} \frac{2\Gamma(7/2)\Gamma(5/2)}{\Gamma(6)} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma^2(1/2)}{\cancel{5}\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot 2} =$$

$$= \frac{3\Gamma^2(1/2)}{128} = \frac{3\pi}{128}.$$

При вычислении использована формула приведения (17) и формула (32).

③ Интеграл Раабе.

⑦ Вычислим интеграл

$$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)\,dx\,,\quad a\geq 0.$$

При $a>0$ интеграл является собственным и является непрерывной функцией параметра "a".

При $a=0$

$$R(0)=\int_0^1\ln\Gamma(x)\,dx$$

интеграл является несобственным, но сходящимся, поскольку

$$\ln\Gamma(x)\sim\ln\frac{1}{x}\sim-\ln x$$

при $x\to+0$,

а интеграл

$$\int_0^1\ln x\,dx \text{ — сходится.}$$

В силу непрерывности $R(a)$ имеем

$$\boxed{\lim_{a\to+0}R(a)=R(0).}$$

Продифференцируем функцию $R(a)$ по параметру "a", используя правило Лейбница:

$$R'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=$$

$$=\ln\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)}=\ln a.$$

Интегрируя, находим

$$R(a)=\int\ln a\,da=a\ln a-\int\frac{a}{a}\,da=$$

$$=a(\ln a-1)+C.$$

Устремляя в этом соотношении "a" к $+0$, определяем постоянную C:

$$C=R(0)=\int_0^1\ln\Gamma(x)\,dx.$$

Осталось вычислить интеграл:

$$J=\int_0^1\ln\Gamma(x)\,dx.$$

Заменяя в нем x на $1-t$, получаем

$$J=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)\,dt.$$

Складывая эти два интеграла, находим

$$2J=\int_0^1\ln\left[\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right]dx=$$

$$=\int_0^1\ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\,dx=\ln\pi-\int_0^1\ln\sin\pi x\,dx$$

Отсюда после преобразований

$$\underline{J} = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\sin\pi x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \ln\sin y\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi/2} \ln\sin y\,dy}_{I}.$$

Производя в интеграле I замену переменной $y = \frac{\pi}{2} - x$, получаем

$$\underline{I = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx}.$$

Тогда,

$$\underline{2I} = \int_0^{\pi/2} (\ln\sin x + \ln\cos x)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \ln\sin 2x\,dx -$$

$$- \frac{\pi}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin y\,dy - \frac{\pi}{2}\ln 2 =$$

$$= \underline{I - \frac{\pi}{2}\ln 2}.$$

В результате, $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$;

$J = \frac{1}{2}\ln\pi + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2\pi$ и окончательно

$$\boxed{R(a) = a(\ln a - 1) + \ln\sqrt{2\pi}.}$$

Глава II. [redacted] Операционное исчисление.

В XIX веке многие математики (в том числе и в России) занимались символическим исчислением, в основе которого лежит построение математического анализа как система формальных операций над символом $p = \frac{d}{dt}$ (t — независимая переменная). Символическое исчисление оказалось довольно удобным для решения различных задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями. Его популяризации в XX веке в значительной мере способствовал английский ~~инженер~~ физик и математик ~~инженер~~ О. Хевисайд, использовавший это исчисление в электротехнических расчетах. При этом он особо не заботился об обос-

новании применяемых им методов и в ряде случаев получал неверные результаты.

Обоснование символического, или, как теперь его называют, операционного метода было дано в двадцатых годах XX века Бромвичем и Карсоном. Они связали этот метод с известным из теории функций комплексного переменного методом интегральных преобразований, которым с успехом пользовались Коши, Лаплас и другие математики. При этом символ (оператор) "p" получил новое толкование, как комплексное переменное $p = s + i\sigma$, а вместе с ним новую трактовку получил и сам операционный метод.

2.1. [redacted] Преобразование Лапласа. Определение, область существования изображения.

Определение.

Изображением по Лапласу комплексно-значной функции $f(t)$ ~~[illegible]~~ называют функцию комплексного переменного $p=s+i\sigma$, определяемую соотношением

$$\boxed{F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt.} \qquad (1)$$

Для преобразования (1) используют символическую запись

$$\boxed{f(t)\fallingdotseq F(p) \quad \text{или} \quad F(p)\risingdotseq f(t).}$$

При этом $f(t)$ называют функцией-оригиналом или просто оригиналом.

Предполагается, что оригинал $f(t)$ удовлетворяет следующим

трем условиям:

(a) $f(t)=0$ для $t<0$.

(в) $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица-Гёльдера всюду на оси $t>0$ за исключением отдельных точек, где она имеет разрывы первого рода. Считается, что на каждом конечном интервале таких точек конечное число. Итак, для $\forall t>0$ $\exists A>0$, $0<\alpha\le 1$ и $\tau_0>0$ такие, что

$$|f(t+\tau)-f(t)|\le A|\tau|^\alpha$$

для $\forall\tau: |\tau|\le\tau_0$.

(c) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. $\exists M>0$, $s_0\ge 0$ такие, что для $\forall t\ge 0$

$$\boxed{|f(t)|<Me^{s_0 t}.} \qquad (2)$$

Нижняя грань чисел s_0 называется показателем роста функции $f(t)$. Для ограниченных функций можно положить $s_0=0$.

С физической точки зрения

условие ⓐ оправдано, поскольку в физике решаются дифференциальные уравнения с заданными начальными условиями. Поэтому история процесса до момента начала наблюдения "зашита" в начальных условиях.

Условию ⓑ с $\alpha=1$ удовлетворяет любая непрерывно-дифференцируемая функция. Условие ⓒ также выполняется для физических процессов.

Простейшим оригиналом является единичная функция Хевисайда

$$\boxed{\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases}}$$

Очевидно, что умножение любой функции $\varphi(t)$ на $\eta(t)$ "гасит" эту функцию для $t<0$ и оставляет неизменной для $t>0$. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям ⓑ и ⓒ, то новая функция $\varphi(t)\eta(t)$

является оригиналом для преобразования Лапласа.

Таким образом, реальный класс функций может быть расширен: $\eta(t)\sin\omega t$, $\eta(t)t^n$, $\eta(t)e^{\lambda t}$, ... Для простоты далее мы будем опускать множитель $\eta(t)$, условившись, что все функции равны 0 для $t<0$.

Заметим также, что изображение по Лапласу является несобственным интегралом, зависящим от комплексного параметра p. Поэтому, для изучения свойств этого преобразования необходимо использовать ранее рассмотренные критерии равномерной сходимости интеграла по параметру p.

Теорема (об области существования изображения

Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\boxed{\mathrm{Re}\,p>s_0}$, где s_0 - показатель роста $f(t)$, и являетсястае в этой полуплоскости **аналитической функцией.**

Д-во: докажем сначала **абсолютную сходимость** интеграла (1) в области $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)|e^{-st}\,dt \le (\text{см. (2)})$$

$$\le \int_0^\infty Me^{-(s-s_0)t}\,dt = \frac{M}{s-s_0} \quad \text{для } s>s_0.$$

Итак,

$$\boxed{\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\right| \le \frac{M}{s-s_0}.} \qquad (3)$$

Продифференцируем интеграл (1) по параметру p и докажем **равномерную сходимость** интеграла

$$J(p) = -\int_0^\infty t f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Рассмотрим полуплоскость: $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$. Тогда,

$$|tf(t)e^{-pt}| \le t|f(t)|e^{-s_1 t} \le$$

$$\le Mte^{-(s_1-s_0)t} \quad \text{для } \forall\, t>0.$$

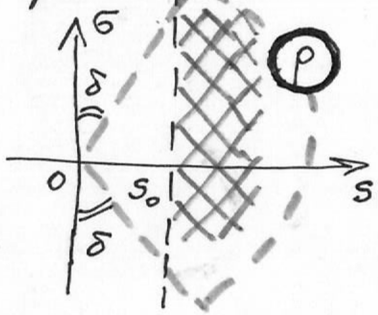
В то же время,

$$M\int_0^\infty te^{-(s_1-s_0)t}\,dt = \frac{M}{(s_1-s_0)^2}, \text{ т.е.}$$

сходится. Тогда по достаточному признаку Вейерштрасса вытекает **равномерная сходимость** исходного интеграла $J(p)$ и существование $F'(p)$ в области $\operatorname{Re} p \geq s_1$ для $\forall\, s_1 > s_0$

$$\boxed{F'(p) = \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-pt}\,dt.} \qquad (4)$$

Таким образом, мы доказали существование и непрерывность производной $F'(p)$ в любой точке полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, т.е. **аналитичность** изображения в этой области. ▨



Замечания.

а) Интеграл Лапласа (1) определяет изображение $F(p)$ лишь в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p > s_0$ (см. рисунок). Однако в большинстве практических задач область определения изображения значительно шире этой полуплоскости. Поэтому часто оперируют с аналитическими продолжениями изображений за прямую $\mathrm{Re}\,p = s_0$ и пользуются тем, что соотношения между различными изображениями при таком продолжении сохраняются.

б) Если точка p стремится к бесконечности так, что $\mathrm{Re}\,p = s$ неограниченно нарастает, то $F(p)$ стремится к нулю:

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty} F(p) = 0.} \qquad (5)$$

Это утверждение вытекает из неравенства (3), использованного при доказательстве теоремы об области существования.

Отсюда следует, что $F(p)\to 0$ при

$p\to\infty$, оставаясь внутри любого угла: $-\frac{\pi}{2}+\delta < \arg p < \frac{\pi}{2}-\delta$, где $\delta>0$ сколь угодно мало. Если же $F(p)$ аналитична в бесконечно удаленной точке, то $F(p)\to 0$ при $p\to\infty$ по любому пути.

2.2. [redacted] Свойства преобразования Лапласа.

Приведем далее ряд простых соотношений, составляющих аппарат операционного метода. Будем обозначать через $F(p), G(p), \dots$ изображения по Лапласу оригиналов $f(t), g(t), \dots$

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt, \quad G(p)=\int_0^\infty g(t)e^{-pt}\,dt.$$

Найдем также изображения по Лапласу простейших оригиналов $\eta(t)$ и $e^{p_0 t}\eta(t)$, где $\eta(t)$ – функция Хэвисайда:

$$\int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}; \quad \int_0^\infty e^{p_0 t}e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p-p_0}.$$

Таким образом,

$$\boxed{1 \doteqdot \frac{1}{p}\,; \qquad e^{p_0 t} \doteqdot \frac{1}{p-p_0}.} \qquad (6)$$

① Свойство линейности.

Для $\forall$ комплексных постоянных α и β

$$\boxed{\alpha f(t)+\beta g(t) \doteqdot \alpha F(p)+\beta G(p).} \qquad (7)$$

Соотношение (7) является следствием линейности интеграла (1).

Примеры.

$$\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

$$\operatorname{sh}\alpha t \doteqdot \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$$

$$\operatorname{ch}\alpha t \doteqdot \frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

② Теорема подобия.

Для $\forall\, \alpha>0$

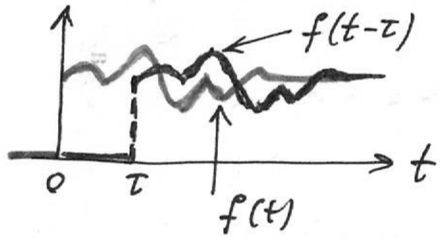
$$\boxed{f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).} \qquad (8)$$

$$\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\,dt = \left\{\begin{matrix}\alpha t=\tau\\ dt=\frac{d\tau}{\alpha}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\alpha}\cdot\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p\tau}{\alpha}}\,d\tau = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad ▨$$

③ Теорема запаздывания.

Для $\forall\, \tau>0$

$$\boxed{f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau}F(p).} \qquad (9)$$



Поскольку $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$ (см. рис.), то

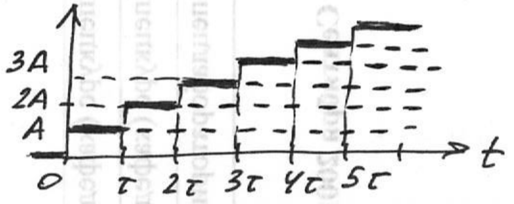
$$\underbrace{\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\,dt} = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-pt}\,dt = \left\{\begin{matrix}t-\tau=t_1\\ dt=dt_1\end{matrix}\right\} = \int_0^\infty f(t_1)e^{-p(\tau+t_1)}\,dt_1 =$$

$$= e^{-p\tau}\int_0^\infty f(t_1)e^{-pt_1}\,dt_1 = \underbrace{e^{-p\tau}F(p)}. \quad ▨$$

Эту теорему удобно применять для функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

Примеры.

(а) Найдем изображение ступенчатой функции



Очевидно, что

$$\boxed{f(t)=A[\eta(t)+\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)+\dots].}$$

Тогда по теореме запаздывания

$$F(p)=A\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-p\tau}+\frac{1}{p}e^{-2p\tau}+\dots\right]=$$

$$=\frac{A}{p}\left(1+e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}+\dots\right).$$

Мы имеем дело со сходящейся геометрической прогрессией, т.к. знаменатель

$$|e^{-p\tau}|<e^{-s_0\tau}\leq 1.$$

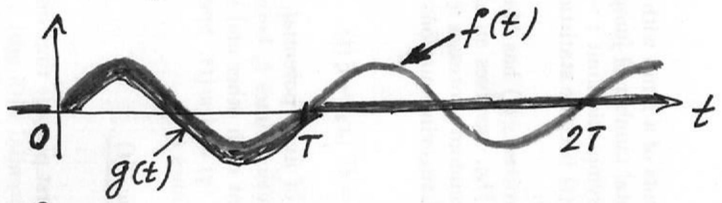
Поэтому,

$$F(p)=\frac{A}{p}\cdot\frac{1}{1-e^{-p\tau}}=\frac{Ae^{\frac{p\tau}{2}}}{p\left(e^{\frac{p\tau}{2}}-e^{-\frac{p\tau}{2}}\right)}=$$

$$=\frac{A\left(\operatorname{sh}\frac{p\tau}{2}+\operatorname{ch}\frac{p\tau}{2}\right)}{2p\operatorname{sh}\frac{p\tau}{2}}=\frac{A}{2p}\left(1+\operatorname{cth}\frac{p\tau}{2}\right).$$

8

(б) Изображение периодической функции.



Рассмотрим периодическую функцию $f(t)$ с периодом T:

$$f(t+T)=f(t).$$

Если ввести вспомогательную функцию — импульс

$$g(t)=\begin{cases} f(t), & 0\leq t\leq T,\\ 0, & t>T,\end{cases}$$

то периодическую функцию $f(t)$ можно записать как

$$\boxed{f(t)=g(t)+g(t-T)+g(t-2T)+\dots}$$

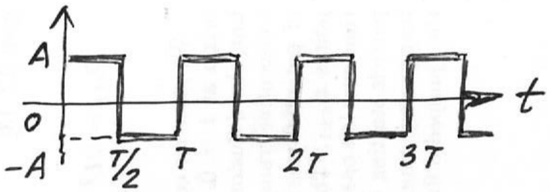
Тогда, согласно теореме запаздывания,

$$F(p)=G(p)+e^{-pT}G(p)+e^{-2pT}G(p)+\dots=$$

$$=G(p)\left(1+e^{-pT}+e^{-2pT}+\dots\right)=\frac{G(p)}{1-e^{-pT}}$$

$$\cancel{=G(p)\frac{1+\operatorname{cth}\frac{pT}{2}}{2}}, \text{ где } G(p)=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt$$

В частности, для меандра



имеем

$$G(p)=\int_0^{T/2} Ae^{-pt}\,dt-\int_{T/2}^{T}Ae^{-pt}\,dt=$$

$$=\frac{A}{p}\left(1-e^{-p\frac{T}{2}}\right)+\frac{A}{p}\left(e^{-pT}-e^{-p\frac{T}{2}}\right)=$$

$$=\frac{A}{p}\left(1-e^{-p\frac{T}{2}}\right)^2.$$

В результате,

$$F(p)=\frac{A}{p}\cdot\frac{\left(1-e^{-p\frac{T}{2}}\right)^2}{1-e^{-pT}}=$$

$$=\frac{A}{p}\cdot\frac{1-e^{-p\frac{T}{2}}}{1+e^{-p\frac{T}{2}}}=\frac{A}{p}\operatorname{th}\frac{pT}{4}.$$

Свойства преобразования Лапласа симметричны — каждому свойству оригиналов соответствует аналогичное ("двойственное") свойство изображений. Так, теореме запаздывания соответствует следующая теорема.

④ Теорема смещения.

Для ∀ ~~комплексного~~ $p_0\in\mathbb{C}$

$$\boxed{e^{p_0t}f(t)\doteqdot F(p-p_0).}\qquad(10)$$

Д-во:

$$\int_0^\infty e^{p_0t}f(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-p_0)t}\,dt=$$

$$=F(p-p_0).$$

Примеры.

$$e^{-\lambda t}\sin\omega t\doteqdot\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2},$$

$$e^{-\lambda t}\cos\omega t\doteqdot\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}.$$

⑤ Дифференцирование оригинала.

Если $f(t)$ непрерывна при $t>0$ и $f'(t)$, или вообще, $f^{(n)}(t)$ является оригиналом, то

$$\boxed{f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0)}\qquad(11)$$

или

$$\boxed{f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0),}\qquad(12)$$

где под $f^{(k)}(0)$ понимается предел справа в т. $t=0$: $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

Докажем сначала формулу (11).

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Поскольку $\operatorname{Re} p = s > s_0$, то:

$$|f(t)e^{-pt}| \le Me^{-(s-s_0)t} \to 0 \quad \text{при } t\to\infty.$$

Поэтому [redacted] подстановка $t=\infty$ дает 0, а подстановка $t=0$ — $[-f(0)]$. Второе слагаемое дает $pF(p)$. Поэтому

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0).$$

Применяя формулу (11) дважды, находим

$$f''(t) = [f'(t)]' \risingdotseq p[pF(p)-f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Далее

$$f'''(t) = [f''(t)]' \risingdotseq p[p^2F(p)-pf(0)-f'(0)] - f''(0) = p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0).$$

И т.д. по математической индукции

$$f^{(n)}(t) = [f^{(n-1)}(t)]' \risingdotseq p\left[p^{n-1}F(p) - p^{n-2}f(0) - p^{n-3}f'(0) - \dots - f^{(n-2)}(0)\right] - f^{(n-1)}(0) =$$

$$= p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

В частности, при $f(0)=0$

$$\boxed{f'(t) \risingdotseq pF(p)}$$

и дифференцирование оригинала сводится к умножению изображения на p!

Двойственным к свойству 5 является следующее.

6 Дифференцирование изображения.

Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-t)$, т.е.

$$\boxed{F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t).} \qquad (13)$$

Как мы уже доказали, $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ является аналитической функцией, и ее можно дифференцировать по p по правилам дифференцирования интеграла, зависящего от параметра p. Таким образом,

$$F'(p) = \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-pt}\,dt,$$

$$F''(p) = \int_0^\infty (-t)^2 f(t)e^{-pt}\,dt, \ldots,$$

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-1)^n t^n f(t)e^{-pt}\,dt. \quad ▨$$

Примеры.

а) $1 \risingdotseq \frac{1}{p}$. Дифференцируя изображение "n" раз, имеем

$$\frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}} \risingdotseq (-t)^n \quad \text{или} \quad t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Из теоремы смещения получаем

б) $\cancel{e^{p_0 t} \risingdotseq \frac{1}{p-p_0}}$

$$t^n e^{p_0 t} \risingdotseq \frac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

~~в) Из формул, которые мы раньше установили~~ $\cancel{\sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$

7) Предельная (тауберова) теорема.

а) Если $f(t)$ является оригиналом вместе со своей производной $f'(t)$, то

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0),}$$

где: $p\to\infty$ внутри угла $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$ для $\forall \delta > 0$ и $f(0) = \lim_{t\to+0} f(t)$.

б) Если $f(t)$ является оригиналом вместе со своей производной $f'(t)$ и $\exists \lim_{t\to+\infty} f(t) = f(\infty)$, то

$$\boxed{\lim_{p\to 0} pF(p) = f(\infty),}$$

где $p\to 0$ внутри угла $|\arg p| < \frac{\pi}{2} - \delta$ для $\forall \delta > 0$, т.к. $s_0 = 0$ (показатель роста).

Д-во а):

в силу теоремы о дифференцировании оригинала (свойство 5)

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

а по свойству изображение от

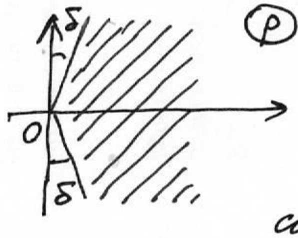
любого оригинала получаем, что

$$\boxed{\lim_{p\to\infty}[pF(p)-f(0)]=0.}$$

Это и дает соотношение первой предельной теоремы. ▨

Д-во (в):

из существования предела $f(t)$ при $t\to\infty$ вытекает ограниченность оригинала $f(t)$, т.е. равенство нулю его показатель роста $s_0=0$. В результате область существования изображение сдвигается влево, что позволяет рассматривать предел: $p\to 0$ внутри угла $|\arg p|<\frac{\pi}{2}-\delta$ для $\forall\,\delta>0$, т.е. $F(p)$



(p) определено в области $\operatorname{Re} p>0$.

Запишем очевидное соотношение для изображение по Лапласу производной $f'(t)$:

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = pF(p)-f(0)$$

и перейдем в нем к пределу $p\to 0$. Тогда левая часть перейдет в

$$\lim_{p\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt \overset{?}{=} \int_0^\infty \lim_{p\to 0} f'(t)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^\infty f'(t)dt = f(t)\Big|_0^\infty = f(\infty)-f(0).$$

Предел можно подносить под знак интеграла, если ~~он~~ последний сходится равномерно по параметру "p" в области $\operatorname{Re} p>0$.

Докажем равномерную сходимость по признаку Вейерштрасса для $\operatorname{Re} p = s \geqslant s_1 > 0$.

$$|f'(t)e^{-pt}| = |f'(t)|e^{-st} < Ne^{-s_1 t},$$

а $\int_0^\infty Ne^{-s_1 t}dt = \frac{N}{s_1} < \infty$ — сходится.

В итоге получаем

$$f(\infty)-f(0)=\lim_{p\to 0}[pF(p)-f(0)],$$

что и доказывает вторую теорему. ▨

Примеры.

Преобразование Лапласа очень эффективно при решении дифференциальных уравнений. Оно позволяет сводить дифференциальное уравнение к алгебраическому или к дифференциальному уравнению меньшего порядка.

① Явление резонанса в физике описывается дифференциальным уравнением вида

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y = A\cos\omega t},$$

где частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний маятника ω. Определим вынужденное решение данного уравнения, полагая начальные условия нулевыми: $y(0)=\dot{y}(0)=0$.

Переходя к изображению по Лапласу $Y(p)$ от $y(t)$ в уравнении, имеем (см. свойство 5):

$$p^2Y(p)-p\overset{0}{\overset{\parallel}{y(0)}}-\overset{0}{\overset{\parallel}{\dot{y}(0)}}+\omega^2Y(p)=\frac{Ap}{p^2+\omega^2}$$

или

$$\boxed{Y(p)=\frac{Ap}{(p^2+\omega^2)^2}}.$$

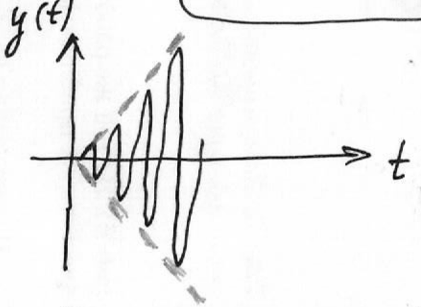
Для перехода к $y(t)$ заметим, что

$$Y(p)=-\frac{A}{2\omega}\cdot\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)\overset{(6)}{\doteqdot}$$

$$\doteqdot-\frac{A}{2\omega}(-t)\cdot\sin\omega t=\frac{At}{2\omega}\sin\omega t.$$

Итак,

$$\boxed{y(t)=\frac{At}{2\omega}\sin\omega t.}$$



— линейная раскачка колебаний.

Рассмотренный метод имеет прямое отношение к операторному методу, применяемому при решении линейных дифференциальных с постоянными коэффициентами.

② Преобразование Лапласа может с успехом применяться и при решении линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Уравнение Бесселя

При изучении колебаний круглой мембраны в математической физике приходят к необходимости решения следующего линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\boxed{\ddot{y}+\frac{1}{t}\dot{y}+y=0,}$$

решением которого при начальных условиях $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=0$ является функция Бесселя нулевого порядка $J_0(t)$.

Применяя свойства (5-7), найдем изображение по Лапласу $Y_0(p)$ функции Бесселя, переписав уравнение в более удобной форме

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(t\frac{dy}{dt}\right)+ty=0.}$$

Тогда, (6)

$$ty \doteqdot -\frac{d}{dp}Y_0(p);$$

$$(ty')' \underset{(5)}{\doteqdot} pG(p)-0 \underset{(5)}{\overset{(6)}{=}} -p\frac{d}{dp}[Y_0(p)p-y(0)]=$$

$$=-p\frac{d}{dp}[pY_0(p)-1]=$$

$$=-pY_0(p)-p^2\frac{d}{dp}Y_0(p).$$

Подстановка в уравнение дает

$$\boxed{(1+p^2)\frac{dY_0}{dp}=-pY_0(p).}$$

В итоге пришли к дифференциальному уравнению 1-го порядка с разделяющимися переменными (!)

$$\frac{dY_0}{Y_0}=-\frac{p\,dp}{1+p^2}.$$

Интегрирование дает

$$\ln Y_0=-\frac{1}{2}\ln(1+p^2)+\ln C$$

или

$$\boxed{Y_0(p)=\frac{C}{\sqrt{1+p^2}}.}$$

Неизвестную постоянную "C" можно определить с помощью

1-ой тауберовой теоремы (7)

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0).$$

Подставляя полученное соотношение, находим

$$c\cdot\lim_{p\to\infty}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = y(0) = 1.$$

Отсюда $c=1$, и таким образом изображением по Лапласу функции Бесселя нулевого порядка является элементарная функция

$$\boxed{J_0(t) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.}$$

Д3 Однако, не всегда дело обстоит так просто. Рассмотрите самостоятельно дифференциальное уравнение 2-го порядка, встречающееся в акустике,

$$\boxed{y'' - ty = 0.}$$

Решениями его являются функции Эйри.

(8) Интегрирование оригинала.

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p, т.е. если сходится $\int_0^t f(\tau)d\tau$, то

$$\boxed{\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}.}$$

Д-во:

проверим, что функция

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

является оригиналом, если интеграл сходится.

(а) $g(t)=0$ для $t<0$, поскольку $f(t)=0$ при $t<0$.

(с) $$\left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| \le \int_0^t |f(\tau)|d\tau < M\int_0^t e^{s_0\tau}d\tau = \frac{M}{s_0}\left(e^{s_0 t}-1\right) < \frac{M}{s_0}e^{s_0 t} = Ne^{s_0 t}.$$

Таким образом, $g(t)$ имеет тот же показатель роста, что и $f(t)$.

(в) Функция $g(t)$ непрерывна и $\exists\, g'(t)=f(t)$. Следовательно, условие Липшица-Гёльдера выполняется.

(9) В результате имеем

$$\underline{f(t)} = g'(t) \risingdotseq pG(p) - g(0) = \underline{pG(p)}.$$

Но, с другой стороны,

$$f(t) \risingdotseq F(p).$$

Поэтому получаем

$$\boxed{G(p) = \frac{F(p)}{p}.}$$

Двойственным к свойству (8) является следующее.

(9) Интегрирование изображения.

Если интеграл $\int_p^\infty F(q)\,dq$ сходится, то он служит изображением функции $f(t)/t$, т.е.

$$\boxed{\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\,dq.} \qquad (17)$$

Д-во:

Для доказательства (17) заметим, что

$$\int_p^\infty F(q)\,dq = \int_p^\infty dq \int_0^\infty f(t)e^{-qt}\,dt.$$

~~Предполагаем~~ Очевидно, что путь интегрирования (p,∞) должен целиком лежать в полуплоскости $\operatorname{Re} q \geq s_1 > s_0$, ~~и~~ ~~конкретно~~ сделаем

оценку внутреннего интеграла

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-qt}\,dt\right| \leq M\int_0^\infty e^{-(s_1-s_0)t}\,dt = \frac{M}{s_1-s_0} < \infty.$$

Отсюда по признаку Вейерштрасса следует его равномерная сходимость по q в области $\operatorname{Re} q > s_0$. Тогда можно изменить порядок интегрирования:

$$\int_p^\infty F(q)\,dq = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_p^\infty e^{-qt}\,dq = \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-pt}}{t}\,dt.$$

Примеры.

(a) Из свойства (1) имеем

$$e^{bt} - e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-b} - \frac{1}{p-a},$$

~~По формуле (...)~~ и далее по свойству (9)

$$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \left(\frac{1}{q-b} - \frac{1}{q-a}\right)dq = \ln\frac{q-b}{q-a}\Big|_p^\infty = \ln\frac{p-a}{p-b}.$$

(6) Определим изображение интегрального синуса

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau.$$

Согласно ранее полученной формуле

$$\sin\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Rightarrow \sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1}.$$

Тогда в силу (17)

$$\frac{\sin t}{t} \overset{(9)}{\doteqdot} \int_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q\Big|_p^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Наконец, пользуясь соотношением (16), приходим к

$$\boxed{\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = \operatorname{si} t \overset{(8)}{\doteqdot} \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}.}$$

(10) Теорема о свертке (Э. Борель).

Определение.

Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называют функцию

$$f(t) \circledast g(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t-\tau)\,d\tau.$$

Для функций-оригиналов $f(t)$ и $g(t)$, которые обращаются в нуль при $t<0$, имеем

$$\boxed{f(t) \circledast g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.}$$

Теорема о свертке.

Свертке оригиналов соответствует произведение изображений, т.е.

$$\boxed{f(t) \circledast g(t) \doteqdot F(p)G(p).}$$

Д-во:

сначала проверим, удовлетворяет ли свертка условиям, налагаемым на оригинал.

(a) Как видно из определения $f(t) \circledast g(t) = 0$ при $t<0$, поскольку $f(\tau)=0$ при $\tau<0$.

(в) Поскольку интегрирование увеличивает гладкие свойства функций, то неравенство Липшица Гельдера также должно иметь место. Покажем это строго.

Рассмотрим разность ($\Delta t > 0$)

$$f(t+\Delta t) \circledast g(t+\Delta t) - f(t) \circledast g(t) =$$

$$= \int_0^{t+\Delta t} f(\tau) g(t+\Delta t-\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_0^{t+\Delta t} f(\tau) g(t+\Delta t-\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) g(t+\Delta t-\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t f(\tau) g(t+\Delta t-\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} f(\tau) g(t+\Delta t-\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau)[g(t+\Delta t-\tau) -$$

$$- g(t-\tau)] d\tau \;(=)$$ { применим теорему о среднем для первого интеграла }

$$(=)\; C\Delta t + \int_0^t f(\tau)[g(t+\Delta t-\tau) - g(t-\tau)] d\tau,$$

где $\inf\limits_{\tau\in(t,t+\Delta t)} f(\tau) g(t+\Delta t-\tau) \le C \le \sup\limits_{\tau\in(t,t+\Delta t)} f(\tau) g(t+\Delta t-\tau)$.

Теперь сделаем оценку этой разности по модулю.

$$|f(t+\Delta t) \circledast g(t+\Delta t) - f(t) \circledast g(t)| \le$$

$$\le |C||\Delta t| + \int_0^t |f(\tau)||g(t+\Delta t-\tau) - g(t-\tau)| d\tau \le$$

воспользуемся неравенством Липшица-Гельдера для оригинала $g(t)$

$$\le |C||\Delta t| + A|\Delta t|^\alpha \int_0^t |f(\tau)| d\tau \le$$

$$\le |C||\Delta t| + M|\Delta t|^\alpha \le |\Delta t|^\alpha (M + |C| t_0^{1-\alpha}) \le$$

поскольку $0 < \alpha \le 1$, то отсюда имеем

$$\le N|\Delta t|^\alpha, \text{ где } 0 < |\Delta t| \le t_0.$$

(c) Докажем, что свертка имеет показатель роста. В силу 3-го свойства оригиналов $f(t)$ и $g(t)$

$$|f(t)| < Me^{s_0 t} \le Me^{\beta t}$$

$$|g(t)| < Ne^{s_1 t} \le Ne^{\beta t}, \text{ где } \beta = \max(s_0, s_1).$$

Тогда

$$|f(t) \circledast g(t)| \le$$

$$\le \int_0^t |f(\tau)||g(t-\tau)| d\tau \le MN \int_0^t e^{\beta\tau} \cdot e^{\beta(t-\tau)} d\tau =$$

$$= MN\int_0^t e^{\beta t}\,d\tau = MNte^{\beta t} \le \underline{Qe^{(\beta+\varepsilon)t}},$$

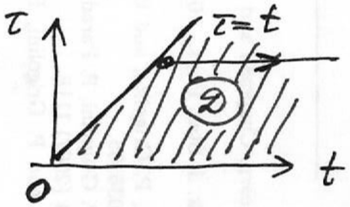
где ε – любое положительное число.

Перейдем теперь к отысканию изображения от свертки. По определению

$$\underline{f(t)\circledast g(t)} \doteqdot \int_0^\infty f(t)\circledast g(t)\,e^{-pt}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}\,dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \iint_D e^{-pt} f(\tau)g(t-\tau)\,dt\,d\tau \;(=)$$



получили двойной интеграл по области D плоскости (t,τ).

Меняя местами переменные интегрирования, приходим к

$$(=) \int_0^\infty f(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty g(t-\tau)e^{-pt}\,dt = \left\{ \begin{matrix} t-\tau=\theta \\ dt=d\theta \end{matrix} \right\}$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau \int_0^\infty g(\theta)e^{-p\theta}\,d\theta = \underline{F(p)G(p)}.$$

Рассмотрим некоторые примеры применения основного свойства преобразования Лапласа.

① Попытаемся найти частное решение линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\boxed{\frac{d^n y}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dt} + a_n y = f(t).}$$

Поскольку мы интересуемся частным решением, будем полагать начальные условия нулевыми:

$$y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

Тогда применяя к уравнению преобразование Лапласа и учитывая свойство ⑤, находим

$$M(p)Y(p) = F(p) \quad \text{или}$$

$$\boxed{Y(p) = \frac{1}{M(p)}F(p),}$$

где $M(p) = p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$.

В итоге получили образ частного решения в виде произведения изображений, что соответствует свертке в оригиналах. Осталось определить, что является оригиналом изображения $\frac{1}{M(p)}$.

Это несложно сделать. Если искать решение однородного уравнения

$$\boxed{M\left(\frac{d}{dt}\right)h(t)=0}$$

с н.у. $h(0)=h'(0)=\ldots=h^{(n-2)}(0)=0$, $h^{(n-1)}(0)=1$, то после преобразования Лапласа с учетом

$$\frac{d^n h}{dt^n} \doteqdot p^n H(p)-h^{(n-1)}(0)=p^n H(p)-1$$

$$\frac{d^k h}{dt^k} \doteqdot p^k H(p),\ k<n$$

получим:

$$M(p)H(p)-1=0 \quad \text{или}$$

$$H(p)=\frac{1}{M(p)}.$$

Таким образом, по свойству (10) частное решение линейного дифференциального уравнения

n-го порядка с постоянными коэффициентами может быть найдено с помощью свертки:

$$\boxed{y(t)=\int_0^t h(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,}$$

где функция $h(t)$ называется функцией Грина.

В частности, для осциллятора

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=f(t)$$

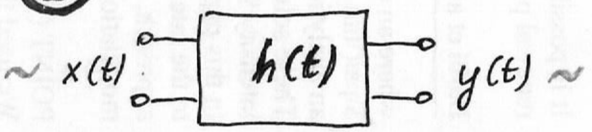
ф-я Грина имеет вид

$$\boxed{h(t)=\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0}} \Leftarrow \boxed{\frac{1}{M(p)}=\frac{1}{p^2+\omega_0^2}},$$

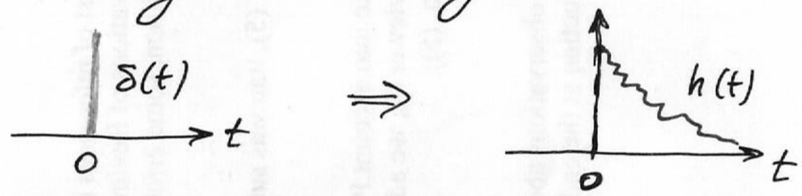
а частное решение таково

$$\boxed{y(t)=\int_0^t f(t-\tau)\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\,d\tau.}$$

(2)



В радиотехнических задачах имеют дело с линейными 4-х полюсниками (фильтрами), которые описываются импульсной переходной характеристикой $h(t)$. Она представляет собой отклик фильтра на короткий входной импульс.



Сигнал на выходе фильтра выражается через входное возмущение интегралом Дюамеля:

$$y(t)=\int_0^t h(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau,$$

представляющим собой свертку двух функций. Для изображений по Лапласу получаем произведение

$$\boxed{Y(p)=K(p)\,X(p)},$$

где $K(p) \doteqdot h(t)$ носит название коэффициента передачи фильтра.

При расчете коэффициента передачи инерционные элементы (индуктивности и емкости) можно

считать обычными сопротивлениями. Действительно,

$$u(t)=L\,\frac{di}{dt} \quad (5) \quad \Rightarrow V(p)=Lp\,I(p), \text{ т.е.}$$

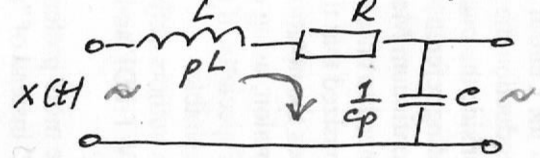
$$R_L(p)=Lp.$$

Напряжение на емкости C рассчитывается по-другому.

$$u(t)=\frac{Q(t)}{C}=\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau \quad (8) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(p)=\frac{1}{pC}\,I(p), \text{ т.е. } R_C(p)=\frac{1}{pC}.$$

Поэтому легко найти, например, коэффициент передачи обычного RLC-фильтра



Заменяя индуктивность и емкость на эквивалентные сопротивления, приходим к

$$K(p)=\frac{\frac{1}{Cp}}{pL+R+\frac{1}{Cp}}=\frac{1}{p^2LC+pRC+1}.$$

Таким образом электротехник Хэвисайд рассчитывал весьма сложные схемы.

③ Теорема о свертке эффективно применяется и при решении интегральных уравнений. Так, например, интегральное уравнение Вольтерра II-го рода с разностным ядром имеет вид

$$\boxed{y(t) + \lambda \int_0^t g(t-\tau) y(\tau) d\tau = f(t),}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ – заданные функции, а $y(t)$ – неизвестное решение. Применяя к уравнению преобразование Лапласа и учитывая теорему о свертке, мгновенно получаем

$$Y(p) + \lambda G(p) Y(p) = F(p).$$

Отсюда находим изображение по Лапласу искомого решения:

$$\boxed{Y(p) = \frac{F(p)}{1+\lambda G(p)}.}$$

2.3. Обращение преобразования Лапласа. Формула Римана-Меллина.

Перейдем к основной теореме операционного исчисления, связанной с правилом отыскания оригинала по изображению. Как мы уже видели на примерах, многие дифференциальные и интегральные уравнения легко решаются методом преобразования Лапласа, но возникает задача обратного восстановления оригинала по изображению.

Теорема Римана-Меллина.

Если функция $f(t)$ является оригиналом, удовлетворяющим трем условиям, а $F(p)$ служит её изображением, то в $\forall$ точке t, где оригинал $f(t)$ удовлетворяет условиям

Липшица– Гёльдера, справедливо равенство

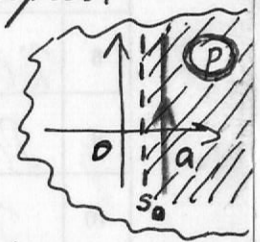
$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp,} \qquad (23)$$

~~где~~ причем интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = a > s_0$ и понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\boxed{\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}F(p)\,dp.}$$

Д-во: рассмотрим интеграл

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}F(p)\,dp =$$



$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}\left[\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau\right]dp.$$

Так как в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a$ интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau$ сходится равномерно относительно p (по признаку Вейерштрасса), то

можно изменить порядок интегрирования. В результате мы придем к

$$f_b(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int\limits_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)}\,dp =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty f(\tau)\,d\tau\,\frac{e^{a(t-\tau)}\left[e^{ib(t-\tau)}-e^{-ib(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty f(\tau)e^{a(t-\tau)}\frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau = \{\tau-t=\theta\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-t}^\infty f(t+\theta)e^{-a\theta}\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta.$$

Полагая $g(t)=f(t)e^{-at}$ и учитывая, что $g(t)=0$ для всех $t<0$, приходим к

$$f_b(t)=\frac{1}{\pi}e^{at}\int\limits_{-\infty}^\infty g(t+\theta)\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{at}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}f(t)\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta.$$

С учетом ранее найденного интеграла Дирихле

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\pi \quad \text{для } b>0,$$

имеем

$$\boxed{f_b(t)=\frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta + f(t).}$$

Теперь наша задача свелась к доказательству того, что первое слагаемое стремится к 0 при $b\to\infty$.

Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Для любой функции $\varphi(x)$, интегрируемой на отрезке $[\alpha,\beta]$,

$$\boxed{\lim_{b\to\infty}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin bx\,dx=0.}$$

Д-во: а) Пусть $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируема на $[\alpha,\beta]$. Тогда,

интегрирование по частям дает

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin bx\,dx=\left\{\begin{array}{l}u=\varphi(x)\\ dv=\sin bx\,dx\end{array}\right\}=$$

$$=-\varphi(x)\frac{\cos bx}{b}\Big|_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta\varphi'(x)\frac{\cos bx}{b}\,dx\to 0$$

при $b\to\infty$ в силу ограниченности $\cos bx$: $|\cos bx|\le 1$.

б) Пусть $\varphi(x)$ — произвольная интегрируемая функция. Тогда для $\forall\,\varepsilon>0$ найдется непрерывно дифференцируемая функция $\varphi_\varepsilon(x)$ такая, что

$$\boxed{\int_\alpha^\beta|\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|\,dx<\varepsilon/2.}$$

В силу доказанного в п. а) по $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\, b_0=b_0(\varepsilon)$ такое, что для $\forall\, b\ge b_0(\varepsilon)$:

$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta\varphi_\varepsilon(x)\sin bx\,dx\right|<\varepsilon/2.}$$

Тогда,

$$\left|\int_\alpha^\beta\varphi(x)\sin bx\,dx\right|=\left|\int_\alpha^\beta[\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\sin bx\,dx\right.$$

$$+\int_\alpha^\beta \varphi_\varepsilon(x)\sin bx\,dx\Big| \le \Big|\int_\alpha^\beta[\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)]\cdot \sin bx\,dx\Big| + \Big|\int_\alpha^\beta \varphi_\varepsilon(x)\sin bx\,dx\Big| \le$$

$$\le \int_\alpha^\beta|\varphi(x)-\varphi_\varepsilon(x)|\,dx + \Big|\int_\alpha^\beta\varphi_\varepsilon(x)\sin bx\,dx\Big| <$$

$$< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Последнее означает, что

$$\boxed{\lim_{b\to\infty}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin bx\,dx=0.}$$

Закончим доказательство большой теоремы об обращении преобразования Лапласа.

Разобьем несобственный интеграл на три:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta =$$

$$= \int_{-T}^{T}\frac{g(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta +$$

$$+ \int_{|\theta|>T}\frac{g(t+\theta)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta - \int_{|\theta|>T}\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta\cdot g(t)$$

Второй и третий интегралы сходятся. Второй — поскольку

$$|g(t+\theta)| = |f(t+\theta)|\,e^{-a(t+\theta)} \le$$

$$\le M e^{-(a-s_0)(t+\theta)} \le M, \quad t+\theta\ge 0$$

а $\int_{|\theta|>T}\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta$ — сх-ся. (признак Абеля)

Это означает, что всегда можно выбрать T таким большим, что

$$\Big|\int_{|\theta|>T}\frac{g(\theta+t)}{\theta}\sin b\theta\,d\theta\Big|<\varepsilon/3,$$

$$\Big|\int_{|\theta|>T} g(t)\,\frac{\sin b\theta}{\theta}\,d\theta\Big|<\varepsilon/3.$$

В первом ~~сомножит.~~ интеграле множитель перед $\sin b\theta$ — интегрируемая на отрезке $[-T,T]$ функция, ибо

$$\Big|\frac{g(\theta+t)-g(t)}{\theta}\Big| \le \frac{A|\theta|^\alpha}{|\theta|} = \frac{A}{|\theta|^{1-\alpha}},$$ где $\alpha>0$,

в силу неравенства Гёльдера.

Значит $\exists \int_{-T}^{T} \frac{g(\theta+t)-g(t)}{\theta}\,d\theta$. Тогда по доказанной лемме по заданному $\varepsilon>0$ [redacted] $\exists b_0 = b_0(\varepsilon): \forall b > b_0(\varepsilon)$:

$$\left|\int_{-T}^{T} g\,\frac{(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\, d\theta\right| < \varepsilon/3.$$

Отсюда следует, что для достаточно больших "b" ($b>b_0(\varepsilon)$)

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} g\,\frac{(t+\theta)-g(t)}{\theta}\sin b\theta\, d\theta\right| < \varepsilon.$$

А это означает, что

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} f_b(t) = f(t).}$$ ■

Из только что доказанной теоремы следует еще одна.

Теорема.

Оригинал $f(t)$ вполне определяется своим изображением $F(p)$ с точностью до значений в точках разрыва $f(t)$.

В самом деле. Значение оригинала в точке непрерывности определяется через изображение по формуле обращения. Значение

$f(t)$ в точках разрыва не влияют на изображение в силу операции интегрирования.

Приведем еще условие, достаточное для того, чтобы заданная функция комплексного переменного $F(p)$ служила изображением некоторого оригинала.

Теорема.

Если функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, стремится к нулю при $|p|\to\infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ равномерно относительно $\arg p$ и интеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,dp$$

абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp.}$$

Без док-ва.

24. [redacted] Теоремы разложения.

Докажем несколько теорем, относящихся к разложению в ряды оригиналов или изображений.

Первая теорема разложения.

Если $F(p)$ правильна в бесконечно удаленной тоже и имеет в ее окрестности $|p| \geq R$ лорановское разложение

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k},$$

то оригиналом $F(p)$ служит (целая ф-я)

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!}\, t^{k-1}.} \qquad (*)$$

При этом понимается, что $f(t)=0$ при $t<0$.

Док-во: положим $p=\frac{1}{q}$ и обозначим $F(\frac{1}{q})=\Phi(q)$. Тогда новая функция $\Phi(q)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k q^k$ будет аналитична в круге $|q| \leq \frac{1}{R}$. Тогда из неравенств

Коши имеем

$$\boxed{|c_k| < MR^k.}$$

В результате для $\forall t$ (даже комплексного)

$$|f(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \frac{|t|^{k-1}}{(k-1)!} \leq MR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(R|t|)^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= MR \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R|t|)^k}{k!} = MRe^{R|t|}.$$

Отсюда следует, что ряд $(*)$ сходится для $\forall$ комплексных t, т.е. является целой функцией. С другой стороны, $|f(t)| < Me^{Rt}$ для положительных t. Таким образом, функция $f(t)\eta(t)$ действительно является оригиналом.

В силу равномерной сходимости ряда $(*)$ в любом конечном круге $|t| \leq a$ мы можем домножить его на e^{-pt} и проинтегрировать почленно по t от 0 до [redacted] ∞, если при этом $\mathrm{Re}\, p > R$. Тогда, поскольку

$$\boxed{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \risingdotseq \frac{1}{p^k}},$$

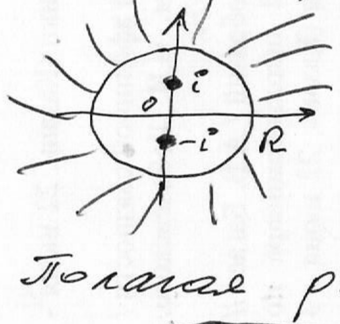
приходим к разложению для $F(p)$.

Пример.

Пользуясь доказанной теоремой разложение, ~~которое~~ получим выражение для функции Бесселя нулевого порядка $J_0(t)$. Ранее мы нашли из уравнения ее изображение по Лапласу

$$\boxed{Y_0(p) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}}.$$

Функция $Y_0(p)$ является правильной в окрестности $|p| \geq R$ б/у точки, поскольку ее особыми точками являются $p = \pm i$.



Разложим эту функцию по степеням $1/p$ в указанной окрестности.

Полагая $p = 1/q$, приходим к

$$\boxed{Y_0\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} = q\,(1+q^2)^{-1/2}}.$$

Воспользуемся стандартным разложением в ряд Тейлора

$$\boxed{(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n}$$

$(|z|<1)$.

Полагая $\alpha = -\frac{1}{2}$, имеем

$$Y_0\left(\frac{1}{q}\right) = q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{n!} q^{2n+1} =$$

$$= q + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n \cdot n!} q^{2n+1}.$$

Возвращаясь к переменной "p", приходим к

$$\boxed{Y_0(p) = \frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n n!} \cdot \frac{1}{p^{2n+1}}},$$

где $\left|\frac{1}{p}\right| < 1 \Rightarrow |p| > 1$.

Применяя теорему разложения, получаем

$$J_0(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!\, 2^n n!} t^{2n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!\, 2^n n!} t^{2n} =$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.$$

Таким образом, одно из решений дифференциального уравнения Бесселя

$$y''+\frac{1}{t}y'+y=0$$

представляется суммой степенного ряда

$$\boxed{J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n}.}$$

Вторая теорема разложения.

Пусть функция $F(p)$:

1°. Правильная в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$,

2°. $\exists$ система окружностей C_n: $|p|=R_n$, где $R_1<R_2<\ldots$, на которой $F(p)\to 0$ при $R_n\to\infty$ равномерно относительно $\arg p$,

3°. Для $\forall\, a>s_0$ абсолютно сходится $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(p)\,dp$.

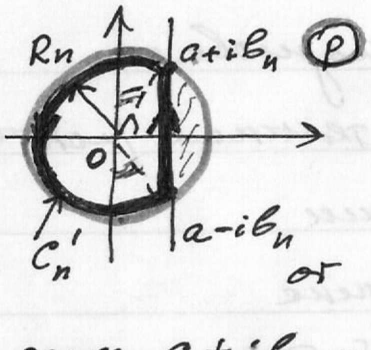
Тогда оригиналом изображения $F(p)$ служит функция

$$\boxed{f(t)=\sum_k \operatorname*{res}_{p=p_k}F(p)e^{pt},\quad t>0.}$$

где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$ в порядке неубывания их модулей.

Док-во: в силу условий 1°–3° справедлива сформулированная ранее теорема, согласно которой $F(p)$ является изображением функции

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp.}\quad(**)$$



Обозначим через C_n' часть окружности C_n, лежащую слева от прямой $\operatorname{Re} p=a$, через $a\pm ib_n$ – точки пересечения C_n с этой прямой, а через Γ_n – замкнутый контур, составленный из отрезка $(a-ib_n, a+ib_n)$ и C_n' и проходимый против хода часовой стрелки. Для оценки интеграла $\int_{C_n'}e^{pt}F(p)\,dp$ докажем

(11) вспомогательную лемму.

Лемма Жордана.

Пусть Γ_R — дуга окружности $|p|=R$: $|\arg p-\varphi_0|\le \frac{\pi}{2\nu}$, а функция $G(p)$ удовлетворяет на этой дуге неравенству

$$|G(Re^{i\varphi})|\le \varepsilon(R)e^{-\alpha R^{\nu}\cos\nu(\varphi-\varphi_0)},\quad \alpha>0.$$

Если $\varepsilon(R)R^{1-\nu}\to 0$ при $R\to\infty$, то

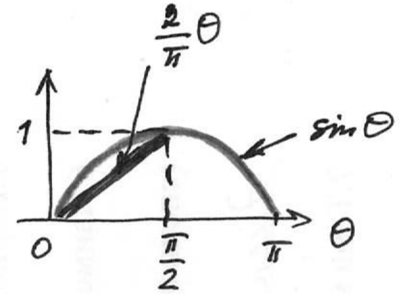
$$\boxed{\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}G(p)\,dp=0.}$$

Д-во: уравнение дуги Γ_R таково: $p=Re^{i\varphi}$, где $|\varphi-\varphi_0|\le\frac{\pi}{2\nu}$. [redacted] Оценим интеграл

$\left|\int_{\Gamma_R}G(p)\,dp\right|\le\int_{\Gamma_R}|G(p)|$ [redacted] $dl\le$

$$\le\int_{\varphi_0-\frac{\pi}{2\nu}}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2\nu}}\varepsilon(R)e^{-\alpha R^{\nu}\cos\nu(\varphi-\varphi_0)}R\,d\varphi=\left\{\begin{array}{l}d\varphi=-\frac{d\theta}{\nu}\\ \nu(\varphi-\varphi_0)=\\ =\frac{\pi}{2}-\theta\end{array}\right\}$$

$$=R\varepsilon(R)\int_0^{\pi}e^{-\alpha R^{\nu}\sin\theta}\frac{d\theta}{\nu}=\frac{2}{\nu}R\varepsilon(R)\int_0^{\pi/2}e^{-\alpha R^{\nu}\sin\theta}\,d\theta.$$



Поскольку

$$\sin\theta\ge\frac{2}{\pi}\theta$$

при $0\le\theta\le\pi/2$,

то

$\left|\int_{\Gamma_R}G(p)\,dp\right|\le\frac{2}{\nu}R\varepsilon(R)\frac{\pi}{2R^{\nu}\alpha}e^{-\alpha R^{\nu}}$ [redacted] $\frac{2\theta}{\pi}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}\le$

$$\le\frac{\pi}{2\nu}R^{1-\nu}\varepsilon(R).$$

В силу условия $R^{1-\nu}\varepsilon(R)\to 0$ при $R\to\infty$ отсюда и получается доказываемый результат. ■

Применим лемму Жордана для [redacted] нашего интеграла

$$\int_{C_n'}e^{pt}F(p)\,dp.$$

В силу условия 2° теоремы:

$$|F(R_ne^{i\varphi})|\le\varepsilon(R_n),\quad\forall\varphi;$$

причем $\varepsilon(R_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Оценим величину

$$\left|e^{R_ne^{i\varphi}\cdot t}\right|=e^{R_nt\cos\varphi}.$$

Таким образом,

$$|F(R_n e^{i\varphi}) e^{R_n e^{i\varphi} t}| \le \varepsilon(R_n) e^{-R_n t \cos(\pi+\varphi)}.$$

На окружности C_n' угол $(\varphi-\pi)$ меняется в следующих пределах:

$$\boxed{|\varphi-\pi| \le \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{a}{R_n}.}$$

При $n\to\infty$ имеем $|\varphi-\pi| \le \frac{\pi}{2}$, и полагая в лемме Жордана $\nu=1$, имеем для $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_n'} e^{pt}F(p)\,dp = 0,$$

поскольку $\varepsilon(R_n)\to 0$ при $R_n\to\infty$ $(n\to\infty)$.

Поскольку в силу условия теоремы 3°

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,\text{[redacted]}\,dp$$

абсолютно сходится, то

$$\boxed{f(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} F(p)e^{pt}\,dp.}$$

В силу условия 1° теоремы функция $F(p)$ — правильная в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, т.е. не имеет там особых точек. Тогда по основной теореме о вычетах, находим

$$f(t) = \lim_{b_n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib_n}^{a+ib_n} F(p)e^{pt}\,dp =$$

$$= \lim_{b_n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n} F(p)e^{pt}\,dp =$$

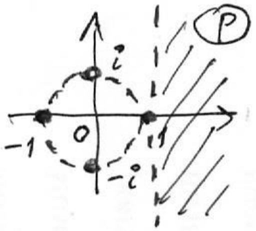
$$= \lim_{b_n\to\infty}\sum_k \operatorname*{res}_{\substack{p=p_k\\(|p_k|<R_n)}} F(p)e^{pt} =$$

$$= \sum_k \operatorname*{res}_{p=p_k} F(p)e^{pt},$$

где вычеты берутся во всей комплексной плоскости. ■

Пример.

Найдем оригинал, соответствующий изображению $F(p) = \frac{1}{p^4-1}$. Функция $F(p)$ имеет 4 особые точки, лежащие на единичной окружности $|p|=1$: $p_{1,2}=\pm 1$, $p_{3,4}=\pm i$.



Поскольку все они являются простыми полюсами, то

$$\operatorname*{res}_{p=p_k} \frac{e^{pt}}{p^4-1} = \frac{e^{p_k t}}{4p_k^3}.$$

В результате по теореме разложения имеем:

$$\underline{\underline{f(t)}} = \frac{e^t}{4} - \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{it}}{-4i} + \frac{e^{-it}}{4i} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\operatorname{sh} t - \sin t}{2}}}.$$

2.5. Изображение по Лапласу оператора дробного дифференцирования.

В последние лет 30 повышенное внимание стало уделяться аппарату дробного исчисления в связи с нуждами физических приложений — открытию аномальной диффузии. Был написан целый ряд монографий (см., например, Учайкина В.В.). Однако нельзя сказать, что это новая область анализа.

Упоминание о дробных дифференциалах встречается в переписке Лейбница с де-Лопиталем в конце XVII века.

Как, например, найти значение $\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} t$? Можно поступить следующим образом. Для натуральных "m" и "n" ($m<n$) имеем:

$$\frac{d^m}{dt^m} t^n = n(n-1)\dots(n-m+1)\, t^{n-m} =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!} t^{n-m} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} t^{n-m}.$$

Полагая здесь $m=1/2$, $n=1$, приходим к

$$\frac{d^{1/2}}{dt^{1/2}} t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} \sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}.$$

Возникает вопрос: как определить дробную производную от произвольной функции $f(t)$? На первый взгляд, можно поступить так же. Разложим $f(t)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторой т. t_0

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t-t_0)^n,}$$

где существуют все производные, а затем применим к этому разложению оператор $\frac{d^\beta}{dt^\beta}$ $(0<\beta<1)$. В результате с учетом вышесказанного придем к

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{\Gamma(n+1)} \frac{d^\beta}{dt^\beta}(t-t_0)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{\Gamma(n-\beta+1)} (t-t_0)^{n-\beta}. \qquad (1)$$

Подобное определение, хотя и является правильным, неудобно для практического использования в силу произвольности выбора t_0 и необходимости каждый раз подсчитывать сумму. (Адамар, 1892).

К более удобному определению можно прийти путем следующих рассуждений. Рассмотрим интегральный оператор $(t>0)$

$$I_t = \int_0^t \{\dots\} d\tau.$$

Применяя этот оператор "n" раз к функции $f(t)$, получаем

$$I_t^n f(t) = \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n)\, d\tau_n$$

или с учетом ранее установленной формулы Коши

$$\boxed{I_t^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\, d\tau.} \qquad (2)$$

Если в формуле (2) заменить $(n-1)!$ на $\Gamma(n)$, то можно ввести оператор дробного интегрирования соотношением

$$\boxed{I_t^\alpha f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)\, d\tau.} \qquad (3)$$

Совершенно понятно, что достаточно определить этот оператор для $0<\alpha<1$. В указанной области интеграл (3) является несобственным и сходится, если $f(t)$ – ограниченная функция.

Поскольку

$$\frac{d}{dt} I_t f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)\, d\tau = f(t),$$ то

$$\frac{d}{dt} = I_t^{-1},$$ казалось бы

$$(4)\quad \boxed{\frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}} f(t) = I_t^{-\beta} f(t),} \quad 0<\beta<1.$$

Но оператор дробного интегрирование определен лишь для положительных степеней.

Поэтому дробную производную нужно ввести более корректно

$$\frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}} f(t) = \frac{d}{dt} I_t \cdot I_t^{-\beta} f(t) = \frac{d}{dt} I_t^{1-\beta} f(t) =$$

$$(5)\qquad = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}\, d\tau, \quad 0<\beta<1.$$

Это соотношение называется дробной производной Римана-Лиувилля и не требует от $f(t)$ существования всех производных.

Можно показать, что это определение эквивалентно определению через степенной ряд, если положить в нем $t_0 = 0$.

Найдем теперь изображение по Лапласу оператора дробного

Найдем изображение по Лапласу дробной производной (5). По теоремам о дифференцировании оригинала и теореме о свертке имеем

$$(6)\quad \boxed{\frac{d^{\beta}}{dt^{\beta}} f(t) \risingdotseq \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\, p\, G(p) F(p),}$$

где $\qquad G(p) \risingdotseq t^{-\beta}.$

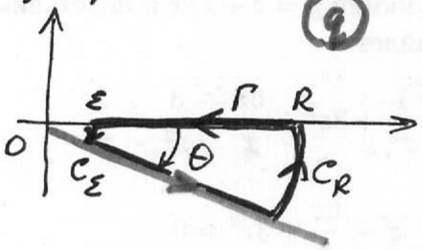
Осталось найти функцию $G(p)$. Применим для этой цели прием, основанный на определении гамма-функции,

$$\Gamma(1-\beta) = \int_0^{\infty} t^{-\beta} e^{-t}\, dt \qquad (0<\beta<1).$$

Сделаем замену переменного $q = \frac{t}{p}$, где $p = re^{i\theta}$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ - комплексное число. Тогда интеграл сводится к интегралу по лучу $L:\ \arg q = -\theta$ в комплексной плоскости q:

$$\boxed{\Gamma(1-\beta)=p^{1-\beta}\int_L \frac{e^{-pq}}{q^\beta}\,dq.}$$

Рассмотрим замкнутый контур, изображенный на рисунке.



Внутри контура Γ подынтегральная функция не имеет особых точек и поэтому

$$\oint_\Gamma \frac{e^{-pq}}{q^\beta}\,dq=0.$$

Оценим интеграл по дугам окружностей.

C_ε: $|q|=\varepsilon$, $q=\varepsilon e^{i\varphi}$

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{-pq}}{q^\beta}\,dq\right|\le \varepsilon^{1-\beta}\int_{-\theta}^{0}\left|e^{-\varepsilon r e^{i(\theta+\varphi)}}\right|d\varphi=$$

$$=\varepsilon^{1-\beta}\int_0^\theta e^{-\varepsilon r\cos\varphi}\,d\varphi\to 0$$ при $\varepsilon\to 0$,

поскольку $0<\beta<1$.

Аналогично для дуги

C_R: $|q|=R$, $q=Re^{i\varphi}$

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{-pq}}{q^\beta}\,dq\right|\le R^{1-\beta}\int_0^\theta e^{-Rr\cos\varphi}\,d\varphi\to 0$$

при $R\to\infty$, поскольку $r>0$ и $\cos\varphi\geqslant\cos\theta>0$.

В пределе $\varepsilon\to 0$, $R\to\infty$ интеграл по лучу L будет совпадать с интегралом по положительной части полуоси, т.е.

$$\int_L \frac{e^{-pq}}{q^\beta}\,dq=\int_0^\infty\frac{e^{-pt}}{t^\beta}\,dt.$$

В результате имеем

$$\frac{\Gamma(1-\beta)}{p^{1-\beta}}=\int_0^\infty t^{-\beta}e^{-pt}\,dt,$$ т.е.

$$\boxed{G(p)=\frac{\Gamma(1-\beta)}{p^{1-\beta}}.}\qquad(7)$$

Подставляя соотношение (7) в формулу (6), приходим окончательно к

$$\boxed{\frac{d^\beta}{dt^\beta}f(t)\doteqdot p^\beta F(p).}\qquad(7')$$

~~Для производной Капуто (5) получаем~~ $\cancel{D_t^\beta f(t)\doteqdot\frac{1}{p^{1-\beta}}\left[pF(p)-f(0)\right]=}$

$\cancel{=p^\beta F(p)-\frac{f(0)}{p^{1-\beta}}.}$

2.6. Другие приложения операционного исчисления.

① Операционный метод может быть с успехом применен для решения нестационарных задач математической физики, а именно уравнений гиперболического и параболического типа. Для одномерной задачи переменная, описывающая состояние системы, является функцией координаты и времени $u(x,t)$. Применяя преобразование Лапласа, т.е. переходя к изображению

$$\boxed{u(x,t) \risingdotseq V(x,p)},$$

можно исходное дифференциальное уравнение в частных производных преобразовать в обыкновенное дифференциальное уравнение для $V(x,p)$. Решая полученное уравнение и возвращаясь к оригиналу $u(x,t)$, получаем решение исходной задачи.

Продемонстрируем эффективность операционного метода на двух примерах.

Первая краевая задача для гиперболического уравнения.

Решить задачу о колебаниях струны длины l с жестко закрепленными концами $x=0$ и $x=l$, возбуждаемой начальным отклонением

$$\boxed{u(x,0) = A \sin\frac{\pi x}{l}, \quad 0 \le x \le l.}$$

Решение.

Отклонение сечения x струны в момент времени $t \to u(x,t)$ описывается волновым уравнением

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{xx},} \quad 0 \le x \le l, \quad 0 \le t < \infty.$$

Запишем начальные и граничные условия к нему:

(Н.У.) $u(x,0) = A \sin\frac{\pi x}{l}$, $u_t(x,0) = 0$, гр. у. $u(0,t)=0$, $u(l,t)=0$.

Перейдем от оригинала $u(x,t)$ к изображению по Лапласу $V(x,p)$. Применяя свойство о дифференцировании оригинала, находим:

$$\underline{\underline{u_{tt}}} \risingdotseq p^2 V(x,p) - p\,u(x,0) - u_t(x,0) =$$
$$= p^2 V(x,p) - pA\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Таким образом, начальные условие уже учтены.

$$u_{xx} \risingdotseq V_{xx}(x,p).$$

В итоге волновое уравнение переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$\boxed{V_{xx} - \frac{p^2}{a^2}V = -\frac{pA}{a^2}\sin\frac{\pi x}{l}.}$$

Два условие к этому уравнению получаются из граничных:

$$\boxed{V(0,p)=0, \quad V(l,p)=0.}$$

Общее решение однородного уравнение можно записать в виде

$$V_{oo}(x,p) = c_1 e^{\frac{px}{a}} + c_2 e^{-\frac{px}{a}}$$

или как

$$\boxed{V_{oo}(x,p) = c_3\,\mathrm{ch}\frac{px}{a} + c_4\,\mathrm{sh}\frac{px}{a}.}$$

Частное решение ищем методом неопределенных коэффициентов в виде

$$V_{чн}(x,p) = B\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Подставляя его в исходное уравнение, приходим к

$$-B\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \frac{p^2}{a^2}B = -\frac{pA}{a^2},$$

откуда

$$B = \frac{pA}{p^2 + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}.$$

Окончательное решение имеет вид

$$\boxed{V(x,p) = c_3\,\mathrm{ch}\frac{px}{a} + c_4\,\mathrm{sh}\frac{px}{a} + \frac{pA}{p^2+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\sin\frac{\pi x}{l}.}$$

Из условий к уравнению, определяем постоянные c_3 и c_4: $c_3 = 0$, $c_4 = 0$.

Итак,

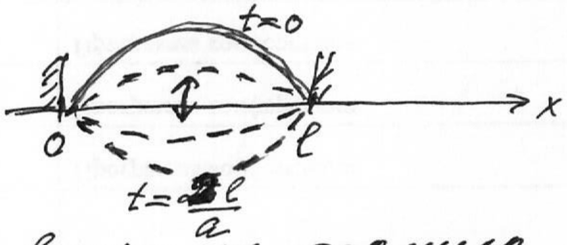
$$\boxed{\bar V(x,p) = \frac{p}{p^2+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\, A\sin\frac{\pi x}{l}.}$$

С учетом ранее найденного изображения

$$\cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

приходим окончательно к

$$\boxed{u(x,t) = A\cos\frac{\pi a t}{l}\sin\frac{\pi x}{l}.}$$



Как видно из формулы, струна колеблется на одной частоте $\omega = \frac{\pi a}{l}$. С учетом выражения для скорости $a=\sqrt{T/\rho}$, где T – натяжение струны, ρ – ее линейная плотность, получаем

$$\boxed{\omega = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.}$$

Функция Грина уравнения теплопроводности.

Решим задачу о распространении тепла в одномерной структуре – бесконечном стержне малого сечения, у которого в т. $x=x_0$ помещен единичный источник тепла в начальный момент времени.

Уравнение для температуры сечения стержня x в момент времени t имеет вид

$$\boxed{u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \le t < \infty}$$

Начальным условием к нему служит

$$\boxed{u(x,0) = \delta(x-x_0).}$$

Применяя аналогичную технику, придем к следующему уравнению 2-го порядка в обыкновенных производных для изображения по Лапласу $\bar V(x,p)$

$$\boxed{\bar V_{xx} - \frac{p}{a^2}\bar V = -\frac{1}{a^2}\delta(x-x_0).}$$

уравнение необходимо решать на всей числовой оси, учитывая физические условия ограниченности решения.

В области $\underline{\underline{x<x_0}}$ уравнение является $\underline{\underline{\text{однородным}}}$ и его решение таково

$$V(x,p)=c_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+c_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \quad x<x_0.$$

Поскольку комплексная переменная p имеет $\underline{\text{положительную}}$ действительную часть, то второе слагаемое при $x\to-\infty$ является неограниченным. Поэтому $c_2=0$.

Аналогично для $\underline{x>x_0}$ находим

$$V(x,p)=c_3 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+c_4 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \quad x>x_0.$$

Из соображений ограниченности решения получаем, что $c_3=0$ и

$$\boxed{V(x,p)=c_4 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \quad x>x_0.}$$

Теперь остается сшить решения в т. $x=x_0$. Интегрируя обе части уравнения для $V(x,p)$ от $x_0-\varepsilon$ до

$x_0+\varepsilon$, получаем

$$V_x(x,p)\Big|_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}-\frac{p}{a^2}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}V(x,p)\,dx=-\frac{1}{a^2}.$$

Воспользовавшись свойством δ-функции

$$\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\,dx=1.}$$

Переходя в полученном равенстве к пределу $\varepsilon\to0$, находим

$$\boxed{V_x(x_0-0,p)-V_x(x_0+0,p)=\frac{1}{a^2}.}$$

Подставляя в уравнение найденные решения в областях $x<x_0$ и $x>x_0$, имеем

$$\boxed{c_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x_0}+c_4 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x_0}=\frac{1}{a\sqrt{p}}.}$$

Второе уравнение для неизвестных констант c_1 и c_4 получаем из непрерывности самого решения $V(x,p)$ в точке $x=x_0$:

$$V(x_0-0,p)=V(x_0+0,p) \quad \text{или}$$

$$\boxed{c_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x_0}=c_4 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x_0}.}$$

В итоге имеем

$$\boxed{c_1=\frac{e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x_0}}{2a\sqrt{p}}, \quad c_4=\frac{e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x_0}}{2a\sqrt{p}}.}$$

С учетом найденных постоянных решение для областей $x<x_0$ и $x>x_0$ таковы:

$$V(x,p)=\frac{1}{2a\sqrt{p}}\,e^{\frac{\sqrt{p}}{a}(x-x_0)},\quad x<x_0$$

$$V(x,p)=\frac{1}{2a\sqrt{p}}\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}(x-x_0)},\quad x>x_0.$$

Их можно объединить в одно

$$\boxed{V(x,p)=\frac{1}{2a\sqrt{p}}\,e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}|x-x_0|}.}$$

Теперь остается "обратить" данное соотношение. Сложность заключается в том, что теоремы разложения здесь не помогут. Во-первых, функцию не удается разложить по степеням $1/p$ в окрестности бесконечно-удаленной точки. Во-вторых, вторую теорему разложения также не применишь, поскольку особая точка $p=0$ является точкой ветвления, а в ней вычет не существует. Поэтому вопрос об обращении нетривиален.

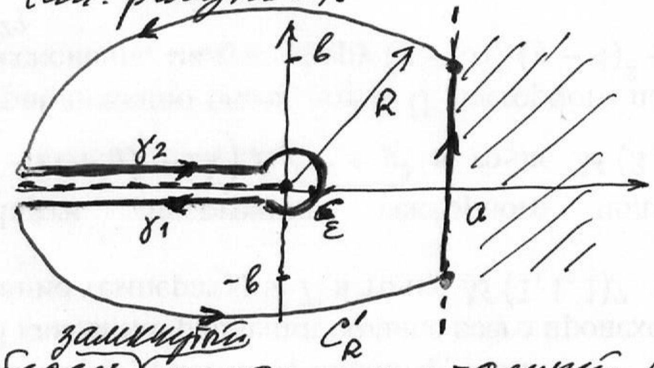
Будем исходить из теоремы Римана-Меллина об обращении изображения

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\int_{a-ib}^{a+ib}F(p)e^{pt}\,dp.}$$

Рассмотрим для простоты изображение

$$F(p)=\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}},\quad \text{где } \alpha>0.$$

Функция $F(p)$ – аналитическая на плоскости p с разрезом на отрицательной части действительной оси (см. рисунок).



Выберем замкнутый контур, состоящий из отрезка от $a-ib$ до $a+ib$, части окружности большого радиуса R, верхнего и нижнего берегов разреза γ_2 и γ_1 и окружности малого радиуса ε с центром в точке ветвления $p=0$.

Внутри этого составного контура Γ нет особых точек функции $F(p)$. Поэтому по теореме о вычетах

$$\boxed{\oint_\Gamma F(p)e^{pt}\,dp=0.}$$

Разобьем этот интеграл на 5 частей.

$$\int_{C_R'} F(p)e^{pt}\,dp \to 0$$ при $R\to\infty$ по доказанной ранее лемме Жордана.

Оценим по модулю интеграл по малой окружности, окружающей начало координат $C_\varepsilon: p=\varepsilon e^{i\varphi}$, $-\pi\le\varphi<\pi$.

$$\left|\int_{C_\varepsilon} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt p}}{\sqrt p}\,dp\right| \le \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\varepsilon t\cos\varphi}\frac{e^{-\alpha\sqrt\varepsilon\cos\varphi/2}}{\sqrt\varepsilon}\,\varepsilon\, d\varphi$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} e^{\varepsilon t}\sqrt\varepsilon\, d\varphi = 2\pi\sqrt\varepsilon\, e^{\varepsilon t} \quad (t>0).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt p}}{\sqrt p}\,dp=0.$$

Вычислим интеграл по верхнему берегу разреза $(R\to\infty)$: $\gamma_2: p=\rho e^{i\pi}=-\rho$, $\rho>0$. Тогда $\sqrt p=\sqrt\rho\, e^{i\frac{\pi}{2}}=i\sqrt\rho$.

$$\int_{\gamma_2} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt p}}{\sqrt p}\,dp = -\int_\infty^0 e^{-\rho t}\frac{e^{-i\alpha\sqrt\rho}}{i\sqrt\rho}\,d\rho =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{e^{-i\alpha\sqrt\rho}}{i\sqrt\rho}\,d\rho.$$

Интеграл по нижнему разрезу γ_1 дает

$$\int_{\gamma_1} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt p}}{\sqrt p}\,dp = \left\{ \begin{aligned} p&=\rho e^{-i\pi}=-\rho \\ \sqrt p&=\sqrt\rho\, e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i\sqrt\rho \end{aligned}\right\} =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{e^{i\alpha\sqrt\rho}}{-i\sqrt\rho}\,d\rho = \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{e^{i\alpha\sqrt\rho}}{i\sqrt\rho}\,d\rho.$$

Складывая интегралы приходим к

$$\int_{\gamma_1} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt p}}{\sqrt p}\,dp + \int_{\gamma_2} e^{pt}\frac{e^{-\alpha\sqrt p}}{\sqrt p}\,dp =$$

$$= \frac{2}{i}\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{\cos\alpha\sqrt\rho}{\sqrt\rho}\,d\rho = \left\{ \begin{aligned} &\rho t=x^2, \ \sqrt\rho=\frac{x}{\sqrt t}, \\ &d\rho=\frac{2x\,dx}{t} \end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{4}{i}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos\frac{\alpha x}{\sqrt t}\,\frac{dx}{\sqrt t} = \left\{ \text{в силу четности} \right\} =$$

$$= \frac{2}{i}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos\frac{\alpha x}{\sqrt t}\,\frac{dx}{\sqrt t} = \frac{2}{i\sqrt t}\,\mathrm{Re}\left\{\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}e^{i\frac{\alpha x}{\sqrt t}}\,dx\right\}.$$

$$= \frac{2}{i\sqrt{t}} \operatorname{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2 - i\frac{\alpha x}{\sqrt{t}}\right)} dx \right\} =$$

$= \left\{ \text{дополним в показателе до полного квадрата} \right\} \overset{(=)}{}$

$$\overset{(=)}{} \frac{2}{i\sqrt{t}} \operatorname{Re}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x - \frac{i\alpha}{2\sqrt{t}}\right)^2} \cdot e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{i\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy}_{\text{“}\sqrt{\pi}\text{” — интеграл Пуассона}} = \boxed{\frac{2\sqrt{\pi}}{i\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}.$$

В результате, приходим к

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} dp + \int_{\gamma_1} e^{pt} \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} dp +$$

$$+ \int_{\gamma_2} e^{pt} \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} dp = 0 \quad \text{или}$$

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} dp = -\frac{2\sqrt{\pi}}{i\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}.$$

Подставляя результат в формулу Римана-Меллина, имеем

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}.$$

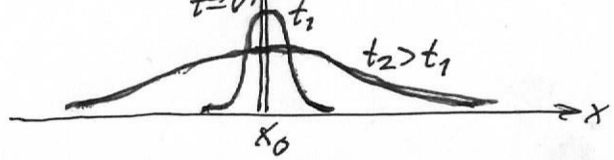
Таким образом,

$$\boxed{\frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \fallingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}}.$$

Полагая в этом выражении $\alpha = \frac{|x-x_0|}{a}$, находим решение задачи о распространении тепла по бесконечному стержню

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}}.$$

Это решение называется <u>функцией Грина</u>.



② <u>Приложение операционного исчисления к вычислению несобственных интегралов.</u>

Если необходимо вычислить интеграл вида $\int_a^{\infty} f(x,t)dx$, где t — положительный параметр, то, принимая интеграл за оригинал $g(t)$, можно найти его изображение по Лапласу и придти к

$$\boxed{G(p) = \int_a^{\infty} F(x,p)dx,}$$

где $f(x,t) \risingdotseq F(x,p)$.

Полученный интеграл во многих случаях вычисляется проще. Потом нужно вернуться к оригиналу, применяя известные изображения элементарных функций.

Пример.

Вычислить операционным методом

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{1-\cos tx}{x^2}\,dx.}$$

Без ограничения общности полагаем $t>0$ (четность косинуса).

$$f(t)=\int_0^\infty \frac{1-\cos tx}{x^2}\,dx \risingdotseq \int_0^\infty \frac{dx}{x^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+x^2}\right)=$$

$$=\int_0^\infty \frac{dx}{p(p^2+x^2)} = \frac{1}{p^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{p}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2p^2}.$$

Применяя ранее полученный результат

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n\in N,$$

имеем окончательно

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{1-\cos tx}{x}\,dx = \frac{\pi t}{2}.} \quad (t>0)$$

Вычисление интегралов с использованием формулы Парсеваля.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $g(t) \risingdotseq G(p)$, то справедливо равенство

$$\boxed{\int_0^\infty f(x)G(x)\,dx = \int_0^\infty F(y)g(y)\,dy.}$$

Д-во:

$$\int_0^\infty f(x)G(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx\int_0^\infty g(y)e^{-xy}\,dy =$$

$$= \int_0^\infty g(y)\,dy\underbrace{\int_0^\infty f(x)e^{-xy}\,dx}_{=F(y)} = \int_0^\infty F(y)g(y)\,dy.$$

■

Пример.

Вычислим интеграл

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^m}\,dx \quad (a>0).}$$

Сначала определим его область существования. Разделим его на 2:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^m}\,dx = \underbrace{\int_0^{\pi/a} \frac{\sin ax}{x^m}\,dx}_{=I_1} + \underbrace{\int_{\pi/a}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^m}\,dx}_{=I_2}$$

Интеграл I_1 с особой точкой $x=0$ от знакопостоянной функции.

Применим признак сравнения

$$\frac{\sin ax}{x^m} \underset{x\to+0}{\sim} \frac{ax}{x^m} = \frac{a}{x^{m-1}}$$

$$\int_0^{\pi/a} \frac{a}{x^{m-1}} = a\,\frac{x^{2-m}}{2-m}\Big|_0^{\pi/a} < \infty \text{ при } 2-m>0.$$

Отсюда находим $m<2$.

Для выяснения сходимости интеграла I_2 от знакопеременной функции применим признак Дирихле:

(a) $$\left|\int_{\pi/a}^{R} \sin ax\,dx\right| = \frac{1}{a}\left|\cos aR-\cos\pi\right| = \frac{1}{a}\left|1+\cos aR\right| \le \frac{2}{a} \text{ для } \forall R>\pi/a.$$

(в) $\frac{1}{x^m}\to 0$ при $x\to\infty$, если $m>0$.

Окончательная область сходимости:

$$0<m<2.$$

Теперь применим равенство Парсеваля, взяв за $f(t)=\sin at$, а за $G(p)=\frac{1}{p^m}$.

Из ранее найденных изображений элементарных функций

$$\boxed{\frac{1}{t^\beta} \risingdotseq \frac{\Gamma(1-\beta)}{p^{1-\beta}}} \qquad (0<\beta<1)$$

и $\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ найдем изображение $F(p)$ и оригинал $g(t)$.

$$\boxed{F(p)=\frac{a}{p^2+a^2}}.$$

Для отыскания $g(t)$ применим свойства преобразования

$$(-t)\frac{1}{t^\beta} = -t^{1-\beta} \risingdotseq \Gamma(1-\beta)\frac{d}{dp}\frac{1}{p^{1-\beta}} =$$

$$=\Gamma(1-\beta)(\beta-1)\frac{1}{p^{2-\beta}} = -\frac{\Gamma(2-\beta)}{p^{2-\beta}}.$$

Заменяя $2-\beta=m$, имеем

$$\boxed{t^{m-1} \risingdotseq \frac{\Gamma(m)}{p^m}}.$$

Отсюда находим

$$\boxed{g(t)=\frac{1}{\Gamma(m)}\,t^{m-1}}.$$

Подставим полученные соотношения

в равенство Парсеваля. Тогда

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^m}\,dx = \int_0^\infty \frac{a}{a^2+y^2}\cdot\frac{y^{m-1}}{\Gamma(m)}\,dy =$$

$$= \frac{a}{\Gamma(m)}\int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{a^2+y^2}\,dy =$$

для сведения интеграла к бета-функции сделаем замену переменного $y^2=a^2t \Rightarrow y=a\sqrt{t},\ dy=\frac{a\,dt}{2\sqrt{t}}$

$$= \frac{\cancel{a}}{2\Gamma(m)}\int_0^\infty \frac{a^{m-1}t^{\frac{m-1}{2}}\cancel{a}\,dt}{\cancel{a^2}(1+t)\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{a^{m-1}}{2\Gamma(m)}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{m}{2}-1}\,dt}{1+t} = \frac{a^{m-1}}{2\Gamma(m)}B\left(\frac{m}{2},1-\frac{m}{2}\right) =$$

учтем теперь, что согласно найденной области существования $0<m<2$

$$= \frac{a^{m-1}}{2\Gamma(m)}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right) =$$

и применим формулу дополнения для гамма-функции

$$= \frac{a^{m-1}}{2\Gamma(m)}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi m}{2}}.$$

Итак, окончательно $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x^m}\,dx = \frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m)\sin\frac{\pi m}{2}}}$ $(0<m<2,\ a>0)$.

Для вычисления ряда несобственных интегралов применяется следующая теорема.

Теорема.

Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ – сходится, то

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(p)\,dp.}$$

Д-во:

из свойства об интегрировании изображения имеем:

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty F(q)\,dq,$$

а далее применяем свойство об интегрировании оригинала

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau \doteqdot \frac{1}{p}\int_p^\infty F(q)\,dq.$$

Далее используем вторую предельную теорему, поскольку $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ сх-ся.

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau = \lim_{p\to 0} p\,\frac{1}{p}\int_p^\infty F(q)\,dq =$$

$$= \int_0^\infty F(q)\,dq.$$

∎

Пример.

Вычислим интеграл, встречавшийся нам при вычислении интеграла Дирихле.

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin\beta t}{t}\,dt \qquad (\alpha\geq 0,\ \beta>0).$$

Применяя теорему, имеем

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin\beta t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{\beta}{\beta^2+(p+\alpha)^2}\,dp =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{p+\alpha}{\beta}\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

При $\alpha=0$ получаем значение интеграла Дирихле: $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}\,dt = \pi/2.}$

Задача для самостоятельной работы.

Применим теорему к интегралу Фруллани

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = \int_0^\infty\left[\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)-\frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right)\right]dp.}$$

Здесь мы применили теорему подобия. Если $\int_0^\infty F(p)\,dp = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$ — сходится, то разбивая интеграл на два, получаем 0! Но интеграл Фруллани не равняется 0! В чем парадокс?

Если же интеграл $\int_0^\infty F(p)\,dp$ расходится, то разбивать интеграл

$$\boxed{\int_0^\infty\left[\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)-\frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right)\right]dp}$$

на 2 отдельных нельзя. Возникает резонный вопрос: как его вычислить и получить известные формулы Фруллани?

[redacted] Формула Стирлинга.

Исследуем поведение гамма-функции $\Gamma(p+1)$ при больших значениях аргумента p

$$\boxed{\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx.}$$

Докажем сначала вспомогательную теорему-лемму.

Лемма. Пусть функция $f(x)$, интегрируемая при некотором $a>0$ на отрезке $[-a,a]$ представима в виде

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k x^k + O(x^{2n}).} \qquad (31)$$

Тогда имеет место следующая формула для достаточно больших значений p

$$\boxed{\int_{-a}^{a} e^{-px^2} f(x)\,dx = \sum_{m=0}^{n-1} c_{2m}\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{p^{m+\frac{1}{2}}} + \frac{O(1)}{p^{n+1/2}}.} \qquad (32)$$

Д-во:

Подставим соотношение (31) в левую часть соотношения (32) и

учтем, что интегралы с нечетными степенями x^{2m+1} обращаются в нуль в силу интегрирования по симметричным пределам, а

$$\int_{-a}^{a} x^{2m} e^{-px^2}\,dx = 2\int_0^a x^{2m} e^{-px^2}\,dx.$$

Получившийся интеграл можно представить в виде

$$\int_0^a x^{2m} e^{-px^2}\,dx = \int_0^\infty x^{2m} e^{-px^2}\,dx - \int_a^\infty x^{2m} e^{-px^2}\,dx.$$

Рассмотрим сначала первый интеграл и произведем в нем замену переменного $t=px^2$.

Тогда,

$$\int_0^\infty x^{2m} e^{-px^2}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{t}{p}\right)^m e^{-t}\frac{dt}{2\sqrt{pt}} =$$

$$= \frac{1}{2p^{m+\frac{1}{2}}}\int_0^\infty t^{m-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{p^{m+\frac{1}{2}}}.$$

Оценим теперь второй интеграл.

Для этого сначала заметим, что для $p>1$ и $x \geq a$ справедливо неравенство

$$\boxed{e^{-px^2} \leq e^{-(p-1)a^2} e^{-x^2}.}$$

В самом деле,

$$e^{-px^2} = e^{-(p-1)x^2} e^{-x^2} \leq e^{-(p-1)a^2} e^{-x^2}.$$

Тогда,

$$\underbrace{\int_a^\infty x^{2m} e^{-px^2} dx} \leq e^{-(p-1)a^2} \int_a^\infty x^{2m} e^{-x^2} dx =$$

$$= ce^{-pa^2},$$

где c — некоторая положительная постоянная, зависящая от a.

В результате для интеграла от четных степеней x^{2m} получаем оценку

$$\boxed{2\int_0^a x^{2m} e^{-px^2} dx = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{p^{m+1/2}} + O(e^{-pa^2}).}$$

Таким образом,

$$\int_{-a}^{a} e^{-px^2} f(x) dx = \sum_{m=0}^{n-1} c_{2m} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{p^{m+\frac{1}{2}}} + \frac{O(1)}{p^{n+1/2}}.$$

Теперь вернемся к гамма-функции $\Gamma(p+1)$ и произведем в интеграл замену $x = p(1+t)$. В результате придем к

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx = p^{p+1} e^{-p} \cdot \int_{-1}^{\infty} (1+t)^p e^{-pt} dt =$$

$$= p^{p+1} e^{-p} \int_{-1}^{\infty} e^{-p[t - \ln(1+t)]} dt.$$

Обозначим через $g(t)$ следующую функцию, определенную при $t > -1$

$$\boxed{g(t) = \operatorname{sgn} t \cdot \sqrt{t - \ln(1+t)}.}$$

Тогда полученное равенство можно переписать как

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p^{p+1} e^{-p} \int_{-1}^{\infty} e^{-pg^2(t)} dt.}$$

Дальнейший анализ сводится к исследованию асимптотического поведения интеграла

$$I(p) = \int_{-1}^{\infty} e^{-pg^2(t)} dt.$$

Рассмотрим подробнее функцию $g(t)$. Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt}g^2(t) = \frac{d}{dt}[t-\ln(1+t)] =$$
$$= 1-\frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

Поэтому функция $g^2(t)$ строго убывает при $-1<t<0$ и строго возрастает при $t>0$. Поскольку $g(t)<0$ при $-1<t<0$, и $g(t)>0$ при $t>0$, то эта функция строго возрастает на полупрямой $t>-1$, причем областью ее значений является вся числовая прямая. В окрестности точки $t=0$ функция $g^2(t)$ имеет разложение

$$g^2(t) = t-\ln(1+t) = t-\left[t-\frac{t^2}{2}+o(t^3)\right] =$$
$$= \frac{t^2}{2}+o(t^3).$$

Отсюда следует, что существует строго положительная при $t>-1$

функция $h(t)$ такая, что

$$\boxed{g^2(t) = t^2h(t),}$$

т.к. $h(0)=1/2$. Функция $h(t)$ является бесконечно дифференцируемой при $t>-1$. Следовательно, бесконечно-дифференцируемой будет и функция $g(t)=t\sqrt{h(t)}$.

Тогда можно утверждать по теореме об обратной функции, что для функции $y=g(t)$ существует обратная функция $t=g^{-1}(y)$, строго возрастающая и бесконечно дифференцируемая на всей числовой оси и удовлетворяющая условию $g^{-1}(0)=0$. Обозначим эту обратную функцию через $t=\varphi(y)$.

Докажем для этой функции следующую теорему.

Теорема.

Пусть функция $t=\varphi(y)$ является

[redacted] 7.

обратной к функции $y=g(t)=$ $=\operatorname{sgn} t\cdot\sqrt{t-\ln(1+t)}$. Тогда для интеграла $I(p)$ при любом фиксированном p справедлива формула

$$\boxed{I(p)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(2m+1)}(0)}{(2m)!}\cdot\frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})}{p^{m+\frac{1}{2}}}+\frac{O(1)}{p^{n+1/2}}.} \quad (33)$$

Д-во: зафиксируем произвольное положительное число a и положим $b=\varphi(-a)$, $d=\varphi(a)$. Это означает, что $a=g(d)=-g(b)$. Но тогда, в силу свойств функции $g(t)$: $-1<b<0$, $d>0$. Оценим следующие два интеграла

$$J_1(p)=\int_{-1}^{b}e^{-pg^2(t)}dt;$$

$$J_2(p)=\int_{d}^{\infty}e^{-pg^2(t)}dt.$$

При оценке первого интеграла учтем, что при $-1<t<b$, выполняется неравенство:

$$g(t)<g(b)=-a, \text{ т.е.}$$

[redacted] 8.

$g^2(t)>a^2$. Следовательно,

$$e^{-pg^2(t)}<e^{-pa^2}$$

и

$$J_1(p)\le e^{-pa^2}\int_{-1}^{b}dt=(1-|b|)e^{-pa^2}.$$

Аналогично оценивается второй интеграл $J_2(p)$. При $t>d$ выполняется неравенство: $g(t)>g(d)=a$, т.е. $g^2(t)>a^2$. Тогда при $p>1$ и $t>c$ справедлива оценка

$$e^{-pg^2(t)}=e^{-(p-1)g^2(t)}e^{-g^2(t)}<$$

$$<e^{-(p-1)a^2}e^{-g^2(t)}.$$

Отсюда,

$$J_2(p)\le e^{-(p-1)a^2}\int_{a}^{\infty}e^{-g^2(t)}dt=c_1e^{-pa}.$$

В результате для интеграла $I(p)$ имеем

$$I(p)=\int_{-1}^{\infty}e^{-pg^2(t)}dt=\int_{-1}^{b}e^{-pg^2(t)}dt+$$

$$+\int_{b}^{d}e^{-pg^2(t)}dt+\int_{d}^{\infty}e^{-pg^2(t)}dt=$$

$$= \int_b^d e^{-pg^2(t)}\,dt + O(e^{-pa^2}).$$

Произведем в этом интеграле замену переменной $y = g(t)$, т.е. $t = \varphi(y)$. Это даст

$$I(p) = \int_{-a}^{a} e^{-py^2}\varphi'(y)\,dy + O(e^{-pa^2}).$$

Поскольку функция $\varphi'(y)$ является бесконечно дифференцируемой, разложим ее по формуле Маклорена

$$\boxed{\varphi'(y) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\varphi^{(k+1)}(0)}{k!} t^k + O(t^{2n}).}$$

Для получения доказываемой формулы (33) осталось применить ранее доказанную лемму к функции $f(y) = \varphi'(y)$. ▨

Укажем теперь простой способ вычисления производных $\varphi^{(k)}(0)$ в формуле (33). Из равенства $\frac{d}{dt} g^2(t) = \frac{t}{1+t}$ получаем

$$2g(t)g'(t) = \frac{t}{1+t} = \frac{\varphi(y)}{1+\varphi(y)}.$$

Отсюда,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{g'(t)} = 2g(t)\frac{1+\varphi(y)}{\varphi(y)} =$$

$$= 2y \cdot \frac{1+\varphi(y)}{\varphi(y)}.$$

[redacted] В результате получаем следующее равенство

$$\boxed{\varphi(y)\varphi'(y) = 2y + 2y\varphi(y).} \quad (34)$$

Последовательно дифференцируя это равенство по y и полагая $y=0$, можно определить все производные $\varphi^{(k)}(0)$, входящие в равенство (33). Найдем в качестве примера значение первых производных в нуле.

Продифференцировав (34) получим

$$\boxed{[\varphi'(y)]^2 + \varphi(y)\varphi''(y) = 2 + 2\times[\varphi(y) + y\varphi'(y)].} \quad (35)$$

Полагаем $y=0$ и учитываем, что $\varphi(0)=0$. Тогда, $[\varphi'(0)]^2=2$, т.е. $\boxed{\varphi'(0)=\sqrt{2}}$ (строго возрастающая функция).

После дифференцирования равенства (35) имеем

$$2\varphi'\varphi''+\varphi'\varphi''+\varphi\varphi'''=$$

$$=2[\varphi'+\varphi'+y\varphi''] \quad \text{или}$$

$$\boxed{3\varphi'\varphi''+\varphi\varphi'''=2(2\varphi'+y\varphi'').} \qquad (36)$$

Полагая здесь $y=0$, приходим к

$$3\sqrt{2}\,\varphi''(0)=4\sqrt{2} \quad \text{или} \quad \varphi''(0)=4/3.$$

Дифференцируя (36) еще раз, получаем

$$3\varphi''^2+3\varphi'\varphi'''+\varphi'\varphi'''+\varphi\varphi^{IV}=$$

$$=2(2\varphi''+\varphi''+y\varphi''') \quad \text{или}$$

$$\boxed{3\varphi''^2+4\varphi'\varphi'''+\varphi\varphi^{IV}=2(3\varphi''+y\varphi''').} \qquad (37)$$

Подстановка сюда $y=0$ приводит к

$$3\cdot\frac{16}{9}+4\sqrt{2}\,\varphi'''(0)=6\cdot\frac{4}{3} \Rightarrow \varphi'''(0)=\sqrt{2}/3.$$

Таким образом, формулу для $I(p)$ можно переписать в виде

$$I(p)=\sqrt{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{p}}+\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\Gamma(3/2)}{p\sqrt{p}}+\frac{O(1)}{p^2\sqrt{p}}$$

или с учетом того, что

$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2)=\frac{1}{2}\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}/2$$

$$I(p)=\sqrt{\frac{2\pi}{p}}+\sqrt{\frac{2\pi}{p}}\cdot\frac{1}{12p}+\frac{O(1)}{p^2\sqrt{p}}.$$

В итоге получаем результирующую формулу для $\Gamma(p+1)$ для больших значений p.

$$\boxed{\Gamma(p+1)=\sqrt{2\pi p}\,p^p e^{-p}\left(1+\frac{1}{12p}+\frac{O(1)}{p^2}\right).} \qquad (38)$$

Наконец, полагая здесь $p=n$, $n\in\mathbb{N}$ приходим к <u>формуле Стирлинга</u> – формуле для $n!$ при больших n

$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \Big[1+$ [redacted] $\alpha_n\Big),$ (39)

где $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$.

[redacted]