

1. Написать и объяснить физический смысл волнового уравнения и уравнения Гельмгольца в неоднородной линейной среде.

$$\Delta \tilde{U} + k^2 n^2(\vec{r}) \tilde{U} = 0, \quad (1)$$

где \tilde{U} – скалярная волновая функция, $k = (\omega / c) = (2\pi / \lambda)$ – волновое число, c – скорость распространения волн в однородной (эталонной) среде, $n(\vec{r})$ – коэффициент замедления скорости распространения волн в среде по отношению к эталонному значению (в электродинамике и оптике c – скорость света в вакууме, $n(\vec{r})$ – показатель преломления среды)

2. На примере решения уравнения Гельмгольца объяснить содержание понятий внутреннего и внешнего пространственных масштабов и сформулировать приближение геометрической оптики.

Если заметные изменения амплитуды $A(\vec{r})$ и направления распространения волны происходят на расстояниях Λ , то всё пространство, где определяется решение уравнения (1), можно разбить на участки с размерами

$$\lambda \ll l \ll \Lambda$$

В пределах каждого участка волну можно считать плоской, а направление её распространения можно определить как направление нормали к волновой поверхности. Это означает, что решение уравнения (1) следует искать в виде выражения

$$\tilde{U}(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot \exp\{-ik \Psi(\vec{r})\}$$

$$l |\nabla A(\vec{r})| \cong (l/\Lambda) |A(\vec{r})| \ll |A(\vec{r})|;$$

$$l |\nabla \Psi(\vec{r})| \cong (l/\Lambda) |\Psi(\vec{r})| \ll |\Psi(\vec{r})|$$

3. На примере решения уравнения Гельмгольца объяснить физический смысл эйконала и написать уравнение эйконала.

Подставляя $\tilde{U}(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot \exp\{-ik \Psi(\vec{r})\}$ в уравнение $\Delta \tilde{U} + k^2 n^2(\vec{r}) \tilde{U} = 0$ и используя последовательно две дифференциальные операции первого порядка (оператор Лапласа $\Delta = \text{div grad}$) (в области $\lambda \ll l \ll \Lambda$)

$$(\nabla \Psi)^2 = n^2(\vec{r}),$$

$$A \Delta \Psi + 2(\nabla \Psi \cdot \nabla A) = 0$$

Уравнение (1) через известное выражение коэффициента преломления $n(\vec{r})$ определяет фазу (или эйконал) и, следовательно, структуры волновых фронтов. Оно называется *уравнением эйконала*. Уравнение (2) определяет поведение амплитуды и называется *уравнением переноса*

4. Получить из уравнений Максвелла уравнение эйконала и уравнения го для электромагнитного поля.

В простейшем случае однородной ($\nabla \mu = \nabla \varepsilon = 0$) и изотропной ($|\vec{n}| = \bar{n} = \text{const}$) среды система имеет решение ($\vec{s}_0 = (\nabla \Psi / |\nabla \Psi|) \equiv (\nabla \Psi / n)$)

$$\vec{\tilde{E}} = \vec{E}_0 \exp \{ i [\bar{\varphi} - k \cdot \vec{n} (\vec{s}_0 \cdot \vec{r})] \}; \quad \vec{\tilde{H}} = \vec{H}_0 \exp \{ i [\bar{\varphi} - k \cdot \vec{n} (\vec{s}_0 \cdot \vec{r})] \}$$

$$\left\{ \begin{aligned} [\nabla \Psi \times \vec{E}_0] &= \mu \cdot \vec{H}_0; & [\nabla \Psi \times \vec{H}_0] &= -\varepsilon \cdot \vec{E}_0; & (\vec{E}_0 \cdot \nabla \Psi) &= 0; & (\vec{H}_0 \cdot \nabla \Psi) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

из которой следует взаимная перпендикулярность векторов \vec{E}_0, \vec{H}_0 и $\nabla \Psi$. Если из первого уравнения выразить \vec{H}_0 и подставить во второе, то с учётом третьего получится уравнение эйконала

$$(\nabla \Psi \cdot \nabla \Psi) = \varepsilon \mu \equiv n^2(\vec{r})$$

5. Используя уравнения го для электромагнитного поля, ввести понятие луча и определить свойства лучевого вектора.

Направление усреднённого по времени вектора Пойнтинга совпадает с нормалью к геометроптическому волновому фронту. Это означает, что световые лучи, по которым распространяется световая энергия, можно определить как траектории (Рис. 3), ортогональные к геометроптическим волновым фронтам $\Psi = const$. Мы будем приписывать геометроптическим световым лучам направление \vec{s}_0 , тем самым полагая, что в каждой точке оно совпадает с направлением усреднённого вектора Пойнтинга. Такое определение световых лучей безусловно справедливо в изотропных средах. (В анизотропной среде нормаль к волновому фронту в общем случае не совпадает с направлением вектора Пойнтинга.) Из определения луча становится понятным, что орт \vec{s}_0 можно назвать ортом лучевого вектора. Таким образом, линии, параллельные вектору \vec{s}_0 , называются лучами, а сам вектор \vec{s}_0 – ортом лучевого вектора.

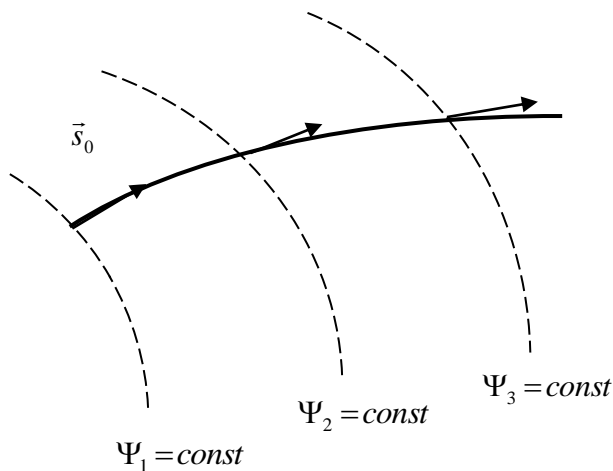


Рис. 3

6. Ввести понятие длины дуги и написать уравнения, описывающие изменения траектории луча.

Рассмотрим часть траектории луча на Рис. 4. Из рисунка следует определение вектора \vec{s}_0 как

$$\vec{s}_0 = \frac{d \vec{r}}{d s},$$

где радиус-вектор $\vec{r}(s)$ точки, расположенной на луче, рассматривается как функция длины s дуги луча. Для определения траектории луча и, следовательно, длины дуги s требуется знание эйконала

Ψ , который удовлетворяет нелинейному уравнению (1)

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \equiv \frac{d\vec{s}_0}{ds} = \nabla_{\perp} \ln n$$

Оно представляет собой закон изменения траектории луча, т.е. описывает

закономерности трансформации лучевого вектора.

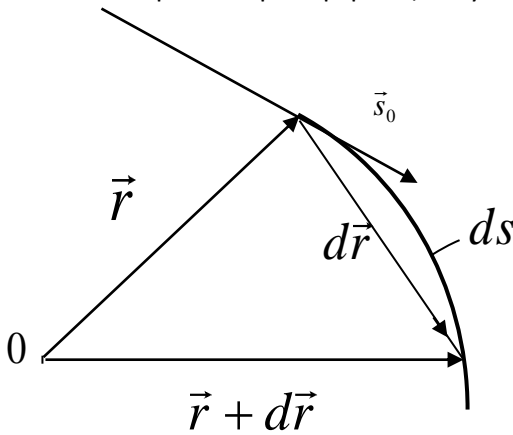


Рис. 4

7. Ввести понятие оптической длины между точками на траектории луча и сформулировать принцип Ферма.

$$\left(\frac{d\Psi}{ds} \right) = n \equiv \left(c / v_f \right)$$

Изменение эйконала может быть найдено в виде криволинейного интеграла вдоль траектории луча пересекающего волновые фронты

$$\Psi_2 - \Psi_1 \equiv \Delta\Psi_{12} = \int_{(1)}^{(2)} n(\vec{r}(s)) ds = c \int_{(1)}^{(2)} \frac{ds}{v_f(\vec{r}(s))} = c \cdot \Delta T_{12}$$

Величина этого интеграла, называемого оптической длиной пути луча, обратно пропорциональна фазовой скорости v_f волны и тем самым прямо пропорциональна времени ΔT_{12} распространения поля (света) между точками на волновых фронтах $\Psi_{1,2}$

в неоднородной среде оптическая длина между точками луча, находящимися на двух волновых фронтах, равна произведению скорости в эталонной среде (скорости света в вакууме) на время распространения волны (света) от одного волнового фронта до другого.

Оптический путь и траекторию луча между точками (1) и (2) можно определить из условия минимума интеграла (22) по произвольному контуру (Рис. 6). Согласно принципу Ферма (принципу наименьшего действия в механике) оптический путь между точками (1) и (2) по действительному лучу (Γ_s) короче оптического пути по любому другому контуру (Γ) между этими точками.

Γ_s по истинному лучу короче любого другого пути Γ . Поэтому траектория истинного луча может быть найдена с помощью решения вариационной задачи нахождения минимума определённого интеграла

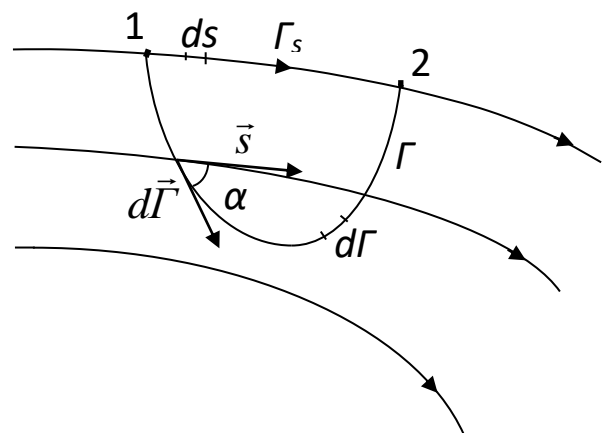


Рис. 6

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} n ds = 0 ,$$

в котором переменной является длина дуги s .

8. Написать уравнения для координат луча и градиента эйконала и сравнить их с уравнениями движения материальной частицы в классической механике.

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \vec{p} ;$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = n\nabla n = \frac{1}{2}\nabla n^2 \equiv \frac{1}{2}\nabla(\varepsilon\mu)$$

Если уравнение (32) интерпретировать как определение импульса частицы с массой $m=1$, то (33) можно рассматривать как уравнение движения этой частицы, в котором изменение импульса происходит под воздействием внешней силы. Её роль играет векторная функция

$$\vec{F} = \nabla\left(\frac{\varepsilon\mu}{2}\right) = \nabla\left(\frac{n^2}{2}\right) = -\nabla U_{nom} , \quad (34)$$

которая направлена по ∇n^2 . Из (32) и (33) следует, что лучи искривляются в сторону увеличения показателя преломления среды. Роли потенциальной энергии и гамильтониана классической частицы играют величины

$$U_{nom} = U_0 - \frac{\varepsilon\mu}{2} ; \quad H = \frac{1}{2}(\vec{p} \cdot \vec{p}) + U_0 - \frac{\varepsilon\mu}{2} . \quad (35)$$

Таким образом, движение луча представляется как движение частицы в потенциальном поле, что означает наличие полной аналогии между геометрической оптикой и классической механикой материальной точки.

9. Используя понятие интенсивности в го, написать закон сохранения энергии стационарного электромагнитного поля.

В электромагнитной теории интенсивностью света I называется поток энергии поля. Определяется I как абсолютное значение от среднего за период высокочастотного колебания вектора Пойнтинга:

$$\overline{\vec{P}}^T = \frac{c}{8\pi} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] = \left(\frac{c}{8\pi\mu}\right) (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \nabla\Psi = \left(\frac{cn}{8\pi\mu}\right) |\vec{E}_0|^2 \vec{s}_0 \equiv I \vec{s}_0 .$$

Из курса электродинамики известно выражение для средней за период высокочастотного колебания плотности энергии электромагнитного поля

$$\overline{w}^T = \frac{\varepsilon}{8\pi} |\vec{E}|^2 \equiv \frac{\varepsilon}{8\pi} |\vec{E}_0|^2 \equiv \frac{\varepsilon}{8\pi} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) . \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим полное определение интенсивности света (волны электромагнитного поля) в виде

$$\vec{\Pi}^T \equiv I \vec{s}_0 = \frac{c}{8\pi\mu} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) \nabla \Psi = \vec{w}^T (c/n) \vec{s}_0 \equiv \vec{w}^T v_f \vec{s}_0 .$$

При отсутствии потерь (в непроводящей среде) и сторонних источников энергии (например, механической работы) справедлив закон сохранения плотности энергии высокочастотного электромагнитного поля, медленно изменяющегося на периоде высокочастотного колебания, в форме дифференциального уравнения

$$\left(\partial / \partial t \right) \vec{w}^T + \text{div} \vec{\Pi}^T = 0 . \quad (8)$$

В стационарном случае форма закона упрощается до

$$\text{div} \vec{\Pi}^T \equiv \text{div} I \vec{s}_0 = 0$$

10. Написать и объяснить физическое содержание уравнения переноса для лучевой амплитуды решения уравнения Гельмгольца.

$$\text{div} \{ A_0^2 \nabla \Psi \} \equiv \text{div} \{ A_0^2 n \vec{s}_0 \} = 0$$

11. Ввести понятие интенсивности (плотности потока энергии) скалярного поля волны и сформулировать закон её изменения вдоль лучевых трубок.

Если считать, что $A \equiv A_0$ является решением уравнения переноса

$$A_0 \Delta \Psi + 2 (\nabla \Psi \cdot \nabla A_0) = 0 , \text{ то согласно } \text{div} \{ A_0^2 \nabla \Psi \} \equiv \text{div} \{ A_0^2 n \vec{s}_0 \} = 0$$

получим, что вектор $\vec{\Pi}$ удовлетворяет такому же уравнению (отсутствия источников)

$$\text{div} \vec{\Pi} = \text{div} \{ A_0^2 \nabla \Psi \} \equiv \text{div} \{ A_0^2 n \vec{s}_0 \} = 0 , \quad (13)$$

как и вектор Пойнтинга. Это означает, что вектор $\vec{\Pi}$ всегда можно принять в качестве меры плотности потока энергии или просто считать интенсивностью поля волны.

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2ik} (\tilde{U} \nabla \tilde{U}^* - \tilde{U}^* \nabla \tilde{U}) = A^2 \nabla \Psi \equiv A^2 n \vec{s}_0 \equiv I \vec{s}_0 \quad (14)$$

Проинтегрируем уравнение $\text{div} \{ A_0^2 \nabla \Psi \} \equiv \text{div} \{ A_0^2 n \vec{s}_0 \} = 0$ по объёму ΔV лучевой трубки.

Введём единичный вектор \vec{n}_0 нормали к поверхности $\Delta \Sigma$, внешний по отношению к рассматриваемому объёму. На торцах лучевой трубки имеем $(\vec{s}_0 \cdot \vec{n}_0)_{1,2} = \mp 1$, на боковой поверхности $(\vec{s}_0 \cdot \vec{n}_0) = 0$.

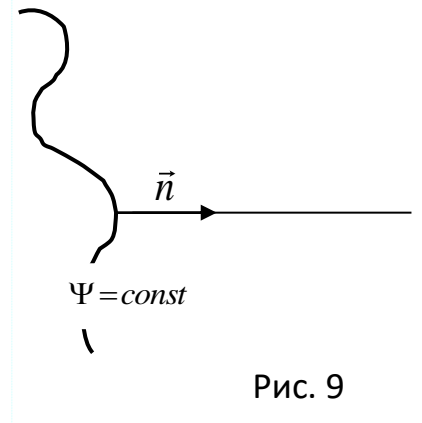
Поток энергии $I_1 d\Sigma_1 = I_2 d\Sigma_2 = I d\Sigma = const$, переносимой вдоль лучевой трубки, остается постоянным

12. Ввести в однородной среде фокусирующиеся поля в лучевых трубках и каустические поверхности в пространстве.

в однородной среде в соответствии с (16) интенсивность в лучевой трубке изменяется по закону

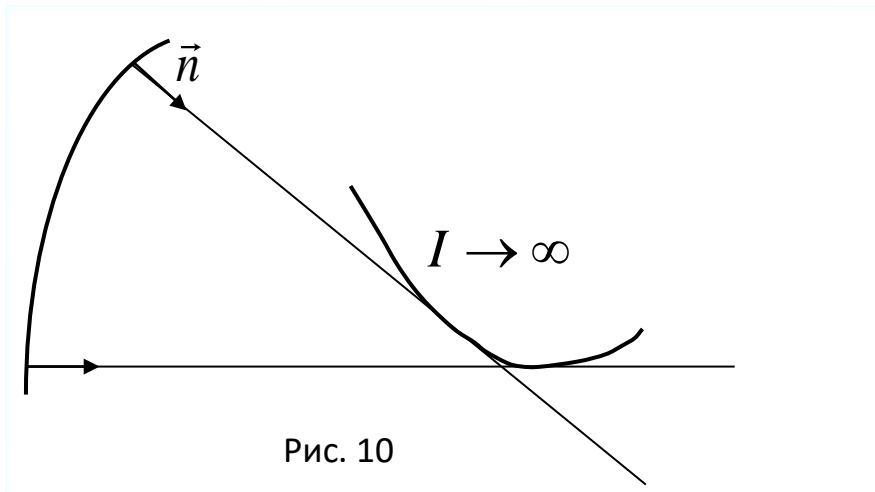
$$I = \frac{\text{const}_1}{d\Sigma} = \frac{\text{const}_2}{R_1 R_2} \equiv \text{const}_2 \cdot K$$

и обращается в ∞ в центрах кривизны волновых поверхностей при $R_1 = 0$ и $R_2 = 0$. Если иметь в виду некоторую часть поверхности волнового фронта (Рис. 9), то интенсивность волны обращается в ∞ на двух поверхностях, являющихся геометрическими местами двух главных центров кривизны каждой точки этой рассматриваемой части волновой поверхности. Эти поверхности называются *каустиками*. На *каустике* сечение лучевой трубки $d\Sigma \rightarrow 0$ и, следовательно, интенсивность



$I \rightarrow \infty$ ²⁾. На *каустике* соседние лучи касаются друг друга, поэтому *каустики* фактически являются огибающими *лучей* (Рис. 10). Это второе определение *каустики* более общее, т.к. оно годится и для неоднородной среды. Поскольку каустические поверхности являются огибающими *лучей*, то *лучи* за *каустикой* не проникают, и в приближении геометрической оптики поле за *каустикой* равно нулю.

При $R_1 = R_2$, когда оба радиуса кривизны совпадают, *каустики* пересекаются. Если на всей волновой поверхности $R_1 = R_2$, то пересечением обеих *каустик* оказывается единственная точка (*фокус*). Поле фокусируется в точку или выходит из фокуса в виде сферической волны



$$\tilde{U} = (C/R) \exp\{\mp i k R\}.$$

13. Объяснить содержание законов преломления и отражения лучей на границе раздела сред и сформулировать условия их корректности в го

$[\vec{n}_{12} \times (n_2 \vec{s}_{20} - n_1 \vec{s}_{10})] = 0$ - тангенциальная компонента лучевого вектора $(n\vec{s})_\tau$ непрерывна при переходе через границу раздела сред.

В плоскости падения луча граничное условие преобразуется в соотношение $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ - которое связывает показатели преломления обеих сред в точке падения с направлениями распространения падающего и проходящего через границу лучей

Как и в случае отражения плоских электромагнитных волн следует ожидать, что на границе появится отражённая волна физического поля. Для отраженных лучей необходимо положить $n_1 = n_2$. Тогда из (4) получим, что отражённый луч лежит в плоскости падения и его направление образует с нормалью \vec{n}_{12} угол β_R , связанный с углом падения соотношением

$$\sin \alpha = \sin \beta_R. \tag{5}$$

Формула (5) позволяет определить угол отражения

$$\beta_R = \pi - \alpha \quad (6)$$

и тем самым установить закон отражения в го.

14. Сформулировать закон (Бугера) расположения траектории луча в пространстве сферически-слоистой среды и привести примеры траекторий.

Рассмотрим поведение лучей в среде, обладающей центральной симметрией. В такой среде показатель преломления

$$n(\vec{r}) = n(r)$$

Вдоль каждого луча (Рис. 15) выполняется условие

$$n(r) r \sin \varphi \equiv n d \equiv |\vec{M}| = const ,$$

где φ – угол между радиус-вектором \vec{r} и касательной, а величина $d = r \sin \varphi$ равна расстоянию от начала координат до касательной. Луч идёт таким образом, что в любой точке луча постоянна величина $n d = |\vec{M}|$.

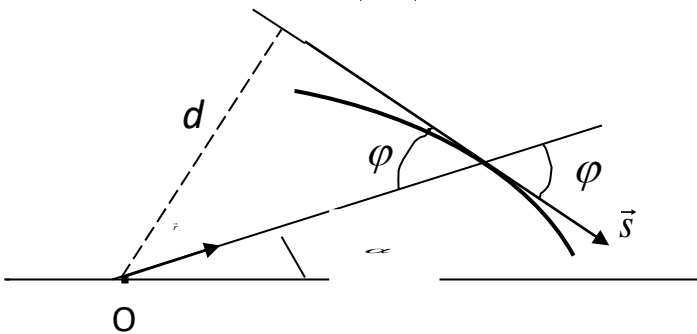


Рис. 15

15. Привести примеры траекторий лучей в плоскослоистой среде, найти точки поворота и каустические поверхности.

1) рассмотрим падение луча в плоскости $z = const$ на диэлектрический цилиндр (Рис. 16), имеющий постоянный показатель преломления $n > 1$. Полагая, что вне цилиндра среда отсутствует ($n = 1$), применим закон Бугера в форме (5) для определения дальнейшего хода луча.

Траектория **луча** изменится на двух границах элемента. Внутри цилиндра **луч** пойдет по прямой линии, и в каждой точке этой траектории будет справедлив закон Бугера (5). Когда траектория **луча** будет находиться на минимальном расстоянии от оси цилиндра (угол $\varphi = 90^\circ$), то расстояние до траектории будет $r_1 = (d / n)$. Можно сказать, что внутри цилиндра луч пойдет по касательной к окружности радиуса $r_1 = (d / n)$. В свободном

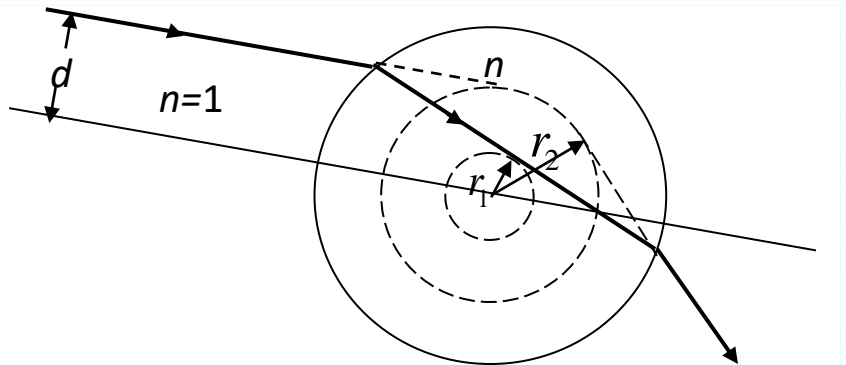


Рис. 16

пространстве после выхода из цилиндра **луч** пойдёт по траектории, продолжение которой будет касательной к окружности радиуса $r_2 = d$.

2) Рассмотрим лазерный активный элемент в виде цилиндрического стержня, диэлектрическая среда которого имеет коэффициент преломления n , в диффузном световом поле накачки и определим его освещённость в центре и на краях. Рассмотрим распределение лучей накачки в лазерном стержне в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. В точку A на поверхности цилиндра лучи накачки приходят из окружающего пространства со всех направлений с равномерной угловой плотностью (Рис. 17). В цилиндре эти лучи с равномерной плотностью распределяются внутри угла

$$\beta_{\max} = 2 \arcsin(\sin 90^\circ / n), \quad (10)$$

в который вписывается окружность радиуса $r_n = (R / n)$. В область внутри окружности попадают лучи из всех точек поверхности активного элемента.

В каждую точку B , находящуюся внутри цилиндра на расстоянии r от его оси (Рис. 18), попадают лучи из светящихся точек только двух дуг на поверхности цилиндра. Их границы определяют две хорды, касающиеся окружности радиуса r_n . Они, пересекаясь в точке B , образуют угол

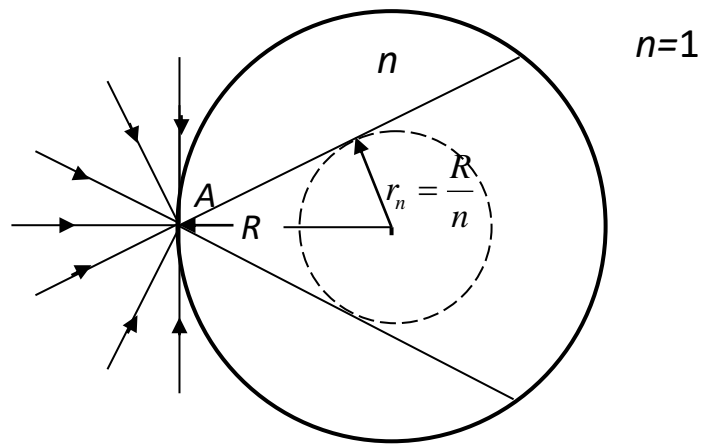


Рис. 17

$$\beta(r) = 2 \arcsin(r_n / r) \equiv 2 \arcsin(R / nr) \quad (11)$$

Таким образом, в точках центральной области цилиндра ($r \leq r_n$), куда лучи попадают из всех точек освещённой поверхности, плотность энергии световой накачки больше, чем в точках периферийной

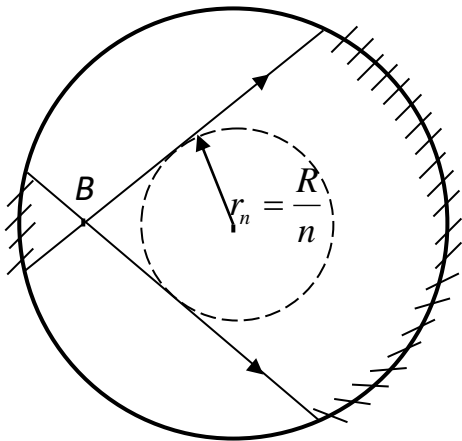


Рис. 18

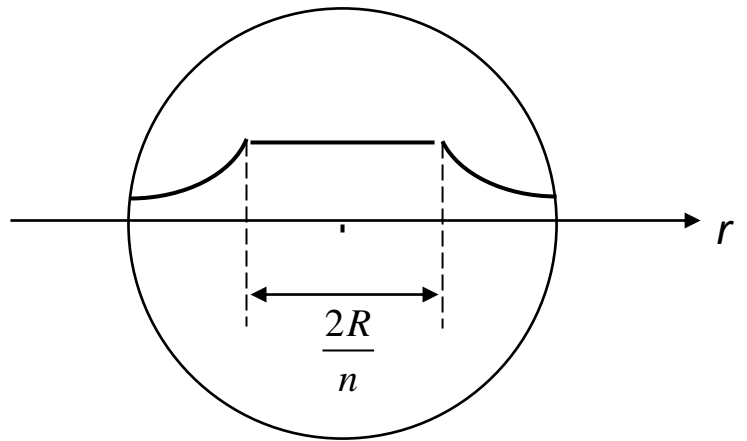


Рис. 19

области ($r > r_n$). В итоге,

освещённость внутри цилиндра (Рис. 19) изменяется по закону

$$I = [I_0 \cdot \beta(r) / 2\pi] \equiv (I_0 / \pi) \cdot \arcsin(R / nr), \quad (12)$$

который достаточно хорошо описывает реальное распределение плотности энергии накачки в активной среде твердотельного лазера.

16. Привести примеры траекторий лучей в аксиально-симметричной среде в плоскостях, перпендикулярных оси и содержащих ось симметрии.

17. Привести примеры траекторий лучей в линзоподобных (фокусирующих) средах в плоскости, содержащей ось симметрии.

18. Записать условия параксиальности и привести примеры уравнений для описания параксиальных лучей в различных аксиально-симметричных средах

Параксиальные лучи – это лучи, которые распространяются почти параллельно оптической оси системы. В каждой точке траектории **параксиального луча** угол наклона **лучевого вектора** к оси симметрии θ должен удовлетворять приближению **параксиальности**

$$\theta \ll 1$$

1) Весьма распространённым является случай, когда переменная часть коэффициента преломления

$$n(\rho, z) = \bar{n} + \tilde{n}(\rho, z) \quad (60)$$

оказывается много меньше постоянной составляющей:

$$|\tilde{n}(\rho, z)| \ll \bar{n}. \quad (61)$$

Подставляя (60) в (59) и пренебрегая в левой части малым членом, уравнение для координат луча в параксиальном приближении получим в виде

$$\bar{n} \frac{d^2 \vec{r}_\perp}{dz^2} \cong \nabla_\perp \tilde{n}(\rho, z). \quad (62)$$

2) Рассмотрим симметричные эйконалы $\Psi(|\vec{r}_\perp| \equiv \rho, z)$ и отвечающие им плоские траектории лучей. В этих случаях ($\varphi(z) = \text{const} \equiv \varphi_0$) лучевые векторы ($\nabla \Psi$) не содержат составляющих, направленных по азимутальному углу φ . Это означает, что векторное уравнение (59) можно записать в скалярной форме

$$\frac{d}{dz} \left(n \frac{d\rho}{dz} \right) \cong \frac{\partial n}{\partial \rho}. \quad (63)$$

3) Распространение параксиальных лучей в аксиально-симметричной среде с параболическим рельефом показателя преломления имеет ещё одну особенность. В приближении параксиальности (55) пространственный период изменения поперечной координаты траектории луча

$$\Lambda_{LM} = (2\pi / K_{LM}) \cong (2\pi / \beta) \sqrt{1 - \beta^2 \rho_0^2} \quad (64)$$

не зависит от направления θ_0 лучевого вектора в начальной точке (ρ_0, z_0) траектории и оказывается одинаковым для всех лучей, выходящих под малыми углами. Это значит, что все параксиальные лучи через период Λ_{LM} собираются в одну точку и для них выполняется условие идеальной фокусировки.

19. Сформулировать математические основы матричного метода описания распространения параксиальных лучей с участием вектора-столбца координат луча (поперечных компонентов лучевого вектора и вектора смещения луча от оси).

в параксиальном приближении выражение для орта лучевого вектора

$$\vec{s}_0 \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} \cong \frac{d}{dz} (z\vec{z}_0 + \vec{r}_\perp) = \vec{z}_0 + \frac{d\vec{r}_\perp}{dz} \equiv \vec{z}_0 + \vec{s}_\perp$$

внутри отдельного элемента центрированной системы изменение лучевого вектора $\nabla \Psi \equiv n \vec{s}_0$ можно полностью определить по изменению его поперечного компонента

$$n(d\vec{r}_\perp / dz) \equiv n \vec{s}_\perp$$

Поэтому в параксиальном приближении (5.55) вектор $n \vec{s}_\perp$ имеет свойства и смысл лучевого вектора. Вектор \vec{r}_\perp и вектор $n \vec{s}_\perp$ полностью определяют координаты луча и направление лучевого вектора (направление наибо́льшего изменения эйконала).

С помощью (3) из (5.59) можно получить модифицированное уравнение для параксиальных лучей

$$\frac{d}{dz}(n \vec{s}_\perp) \cong \nabla_\perp n, \quad (4)$$

которое описывает изменение лучевого вектора в неоднородной среде. Согласно (4) направление распространения луча не изменяется, если показатель преломления среды не зависит от поперечной координаты ($\nabla_\perp n = 0$).

Введем вектор-столбец координат точки траектории и поперечных компонентов лучевого вектора

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} n \vec{s}_\perp \\ \vec{r}_\perp \end{pmatrix}, \quad (5)$$

определяющий в каждом сечении положение и направление луча. Вектор-столбец в общем случае имеет 4 скалярные величины. Конкретные связи между входными и выходными координатами луча будем устанавливать с помощью матриц. Очевидно, что однозначную связь между 4-мя входными и 4-мя выходными координатами луча

$$\vec{Q}' \equiv \begin{pmatrix} (n \vec{s}_\perp)' \\ \vec{r}'_\perp \end{pmatrix} = \hat{S} \bullet \begin{pmatrix} n \vec{s}_\perp \\ \vec{r}_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A n \vec{s}_\perp + B \vec{r}_\perp \\ C n \vec{s}_\perp + D \vec{r}_\perp \end{pmatrix} \quad (6)$$

можно установить с помощью матрицы

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (7)$$

состоящей из 4-х действительных элементов.

20. Записать матрицу преобразования координат луча на участке свободного пространства (перемещения).

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (L/n) & 1 \end{pmatrix} \equiv \hat{G}_{(L/n)}$$

21. Записать матрицу преобразования координат луча на плоской границе раздела сред.

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

22. Записать матрицу преобразования координат луча на сферической границе раздела сред.

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & -[(n_2 - n_1)/R] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \hat{T}_{[(n_2 - n_1)/R]}$$

23. Записать матрицу преобразования координат луча тонкой линзой(сферическим зеркалом).

$$\hat{T}_{\frac{n}{F}} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{n_1}{F} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \hat{T}_b = \begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

где фокусное расстояние **тонкой линзы** F определяется выражением

$$\frac{1}{F} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

24. Сформулировать основные свойства матриц преобразования координат луча и объяснить их физическую природу.

1) Все S-матрицы имеют одинаковую норму

$$\|\hat{S}\| = AD - BC = 1.$$

2) Поскольку $\|\hat{S}\| = 1$, то нетрудно убедиться прямым расчётом, что каждая обратная матрица S^{-1} имеет вид

$$\hat{S}^{-1} = \begin{vmatrix} D & -B \\ -C & A \end{vmatrix}$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} 1. \hat{G}_a \hat{G}_b \equiv \hat{G}_{a+b} ; \quad 2. \hat{T}_a \hat{T}_b \equiv \hat{T}_{a+b} ; \quad 3. \hat{\Phi}_a \hat{\Phi}_b \equiv \hat{A}_{-b/a} ; \\ 4. \hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta \equiv \hat{A}_{\alpha\beta} ; \quad 5. \hat{A}_\alpha^{-1} \equiv \hat{A}_{1/\alpha} ; \quad 6. \hat{\Phi}_b \hat{A}_\alpha \equiv \hat{\Phi}_{\alpha b} ; \\ 7. \hat{T}_b \hat{\Phi}_a \equiv \hat{\Phi}_a \hat{G}_{ba^2} ; \quad 8. \hat{\Phi}_a \hat{T}_b \equiv \hat{G}_{ba^2} \hat{\Phi}_a , \quad 9. \hat{G}_a \equiv \hat{T}_{1/a}^{-1} \hat{\Phi}_a \hat{T}_{1/a}^{-1} ; \\ 10. \hat{\Phi}_a \hat{G}_b \equiv \hat{T}_{b/a^2} \hat{\Phi}_a ; \quad 11. \hat{\Phi}_{a_1} \hat{T}_b^{-1} \hat{\Phi}_{a_2} \equiv \hat{T}_{1/ba_1^2} \hat{\Phi}_{ba_1 a_2} \hat{T}_{1/ba_2^2} ; \\ 12. \hat{A}_\alpha \hat{T}_b \equiv \hat{T}_{b\alpha^2} \hat{A}_\alpha ; \quad 13. \hat{A}_\alpha \hat{\Phi}_b \equiv \hat{\Phi}_b / \alpha^2 \hat{A}_\alpha = \hat{\Phi}_b \hat{A}_{1/\alpha} = \hat{\Phi}_b / \alpha \end{array} \right.$$

28. Объяснить принципы (вторичные источники) Гюйгенса и Гюйгенса-Френеля и основанные на них расчёты в задачах дифракции волн скалярного

Каждый элемент волнового фронта можно рассматривать как центр вторичного возмущения, порождающего вторичные сферические волны. Волновым фронтом в любой последующий момент времени служит огибающая волновых фронтов вторичных сферических волн.

$R' = R_0 + c \Delta t$. По принципу Гюйгенса

положение волновой поверхности S'_R в момент времени t' полностью определяется состоянием поверхности S_R в предшествующий момент

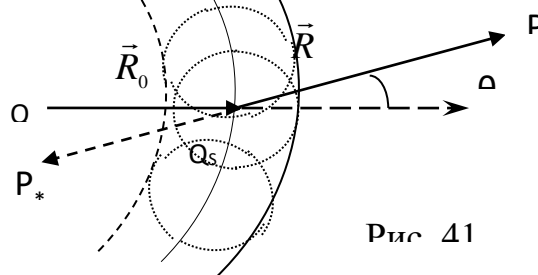


Рис 41

времени t и не зависит от предыстории волнового процесса, от волн в других областях пространства и пр.

По Френелю амплитуду поля \tilde{u} , создаваемую в точке Q_S волнового фронта S_R точечным источником Q , можно представить в виде

$$\tilde{u}(Q_S) = (\tilde{u}_0 / R_0) \exp(-ik R_0), \quad (2)$$

где \tilde{u}_0 – амплитуда поля на расстоянии единицы длины от источника Q . Вклад, вносимый в поле $\tilde{u}(P)$ в точке наблюдения P элементом площади волнового фронта dS вблизи точки Q_S , определяется как

$$d\tilde{u}(P) = (\tilde{u}_0 / R_0) \exp(-ik R_0) \{ \exp(-ik R) / R \} f(\theta) dS. \quad (3)$$

Функция $f(\theta)$, называемая коэффициентом наклона, определяет зависимость амплитуды вторичных сферических волн от угла θ между направлением вектора \vec{R} и нормалью к волновой поверхности в точке Q_S (вектором \vec{R}_0) и фактически имеет смысл диаграммы направленности вторичного источника. Наличие в (3) коэффициента наклона по существу является вторым важнейшим теоретическим вкладом Френеля в содержание принципа Гюйгенса.

Полное поле в точке наблюдения P находится как интеграл

$$\tilde{u}(P) = \iint_{S_R} (\tilde{u}_0 / R_0 R) \exp\{-ik(R_0 + R)\} f(\theta) dS \quad (4)$$

по замкнутой поверхности S_R волнового фронта (которая в рассмотренном на Рис. 41 случае является сферой). Надлежащим выбором функции $f(\theta)$ можно добиться, чтобы вторичные источники излучали только в одну сторону и чтобы поле отсутствовало в точках P_* внутри поверхности S_R ($\tilde{u}(P_*) = 0$). Френелю не удалось дать убедительного обоснования тому или иному выбору функции $f(\theta)$ и, следовательно, отсутствию волны, распространяющейся назад. Однако оказалось, что результаты расчёта поля волны, распространяющейся вперёд, практически не зависят от конкретного выбора функции $f(\theta)$. Достаточно считать, что $f(\theta)$ уменьшается с ростом θ .

29. Объяснить принцип (вторичные источники поля) Гюйгенса-Кирхгофа и основанные на нём расчёты в задачах дифракции волн скалярного поля.

$$\tilde{u}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \tilde{u} \left(\vec{n} \cdot \nabla' \left[\frac{\exp(-ikR)}{R} \right] \right) - \left[\frac{\exp(-ikR)}{R} \right] (\vec{n} \cdot \nabla' \tilde{u}) \right\} dS' \quad (11)$$

В поверхностном интеграле (11) величины $(\partial \tilde{u} / \partial n)_{S_0}$ и $(\tilde{u})_{S_0}$ играют роль вторичных поверхностных источников, а именно плотности поверхностного заряда и плотности поверхностного дипольного слоя соответственно. По своему действию эти вторичные поверхностные источники полностью эквивалентны реальным объёмным источникам, находящимся в области 1 внутри S_0 . Фактически принцип Гюйгенса заключается в этой формулировке, и потому она называется принципом Гюйгенса-Кирхгофа.

30. Объяснить электродинамический принцип (вторичные источники поля) Гюйгенса и основанные на нём расчёты в задачах дифракции электромагнитных волн на плоских объектах.

Для формулировки электродинамического принципа Гюйгенса нужно воспользоваться интегралом Кирхгофа (11) для каждой отдельной декартовой составляющей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей. Если в эти поверхностные интегралы подставлять истинные значения полей $(\vec{E})_{S_0}$ и $(\vec{H})_{S_0}$ на поверхности S_0 , то в результате вычислений всегда получатся правильные (истинные) поля $\vec{E}(\vec{r})$ и $\vec{H}(\vec{r})$ в каждой точке P в области 2 и соответственно «вакуумное» поле $\vec{E} = \vec{H} = 0$ в каждой точке P_* , находящейся внутри поверхности S_0 в области 1. Это значит, что электрическое \vec{E} и магнитное \vec{H} поля при переходе через поверхность S_0 терпят скачок и что в силу существующих в электродинамике законов (требующих выполнения граничных условий) по поверхности S_0 должны течь поверхностные электрический и магнитный токи с плотностями

$$\vec{j}_{S_0}^e = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{n} \times (\vec{H})_{S_0} \right] ; \quad \vec{j}_{S_0}^m = -\frac{c}{4\pi} \left[\vec{n} \times (\vec{E})_{S_0} \right]$$

Основное содержание электродинамического принципа Гюйгенса заключается в том, что он позволяет заменить задачу об определении поля внутри области 2 по заданным на границе S_0 полям $(\vec{E})_{S_0}$ и $(\vec{H})_{S_0}$ на эквивалентную задачу об излучении в свободном безграничном пространстве сторонних токов, определяемых по формулам (19).

32. Объяснить методику расчёта дифракции плоской волны на отверстии в экране и сделать оценку угловой ширину диаграммы направленности дифрагированного излучения

1) Излучение источников в полупространстве 2, ограниченном *идеально проводящей плоскостью* $Z = 0$

$$\vec{j}_{z=0}^e = 0 ; \quad \vec{j}_{z=0}^m = -2 \frac{c}{4\pi} \left[\vec{n} \times (\vec{E})_{S_0} \right]$$

2) Если в качестве идеально отражающей плоскости $Z = 0$ используется поверхность из идеального магнетика, то совокупность реальных и «фиктивных» источников, формирующих истинное поле в области 2, будет иметь вид

$$\vec{j}_{z=0}^e = 2 \frac{c}{4\pi} \left[\vec{n} \times (\vec{H})_{S_0} \right] ; \quad \vec{j}_{z=0}^m = 0$$

ширина диаграммы направленности рассматриваемой *гигантской антенны* ($A_{x,y} \gg \lambda$) в соответствии с (7) есть

$$\Delta\Omega = \Delta\mathcal{G}_x \Delta\mathcal{G}_y \cong (\lambda^2 / A_x A_y) \equiv (\lambda^2 / S_0) ; \quad \Delta\mathcal{G}_{x,y} = (\lambda / A_{x,y})$$

33. Объяснить методику расчёта дифракции параксиального волнового пучка гауссовой формы на отверстии в экране и сделать оценки угла дифракционной расходимости и дифракционной длины дифрагированного излучения.

одномерный параксиальный пучок, который распространяется вдоль оси OZ и в плоскости экрана $z = 0$ имеет комплексную амплитуду поля

$$\tilde{\vec{E}}_0 = \tilde{x}_0 \tilde{E}_0 \exp\left(-y^2 / 2a^2\right)$$

Вспользуемся формулами (1) - (5). Вначале найдём магнитный поверхностный ток $\tilde{j}_{z=0}^m$, а затем вычислим электрический вектор-потенциал \tilde{A}^m .

шириной диаграммы направленности «вторичных источников», образованных полем параксиального волнового пучка, является величина

$$\mathcal{G}_{df} = (1/ka) \equiv (\lambda/2\pi a), \quad (18)$$

которая называется углом дифракционной расходимости излучения с апертуры a (где a - характерный поперечный размер пучка).

В оптике волновых параксиальных пучков в связи с углом дифракционной расходимости (18) вводится понятие дифракционной длины

$$a = l_{df} \cdot \mathcal{G}_{df} \Rightarrow l_{df} = (a / \mathcal{G}_{df}) = ka^2 \equiv k\Lambda_{\perp}^2, \quad (19)$$

на которой ширина пучка увеличивается в два раза.

34. Объяснить содержание теории дифракции на отверстии в плоском экране скалярного поля в виде параксиального волнового пучка и записать дифракционную формулу Френеля.

находится в области 1 достаточно далеко от границы $z = 0$ и на поверхности апертуры создаёт поле

$$\tilde{u}^0 = \tilde{u}_0(\vec{r}) \exp(-ikz) \quad (\text{приближение Кирхгофа})$$

$$\tilde{u}(P) = \frac{ik}{4\pi} \iint_{s_0} \tilde{u}_0(\vec{r}'_0, 0) \left[\frac{\exp(-ikR)}{R} \right] (1 + \cos \mathcal{G}) dx' dy'$$

$\cos \mathcal{G} \cong 1$ и разложение в ряд по малому параметру имеем

$$\tilde{u}_0(P) = \left\{ \frac{ik}{2\pi z} \iint_{s_0} \tilde{u}_0(\vec{r}'_0, 0) \exp\left[-\frac{ik|\vec{r}_0 - \vec{r}'_0|^2}{2z}\right] dx' dy' \right\} \quad \text{преобразования или}$$

дифракционной формулы Френеля

35. Записать параболическое (диффузионное) уравнение для амплитуды поля параксиального волнового пучка в однородной среде.

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial z} \right) + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} \tilde{u}_0 = 0$$

36. Записать решение параболического уравнения для амплитуды поля параксиального волнового пучка и объяснить содержание понятий диффузия комплексной амплитуды и функция Грина диффузионного уравнения

$$\tilde{E}_{\perp 0}(\vec{r}_{\perp}, z) = \left\{ \frac{ik}{2\pi z} \iint_{S_0} \tilde{E}_{\perp 0}(\vec{r}'_{\perp}, 0) \exp\left[-\frac{ik|\vec{r}_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}|^2}{2z}\right] d x' d y' \right\}$$

Таким образом, при распространении парааксиального волнового пучка (1) медленно меняющаяся комплексная амплитуда поля $\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, z)$,

удовлетворяющая уравнению (3), меняется так (Рис. 2.4),

как будто происходит диффузия амплитуды в

направлении, перпендикулярном оси OZ.

Локализованное распределение поля диффундирует в

область, где его не было. Причем наряду с диффузией

абсолютной величины амплитуды наблюдается

диффузия фазы: по мере расплывания пучка происходит

искривление его фазового фронта

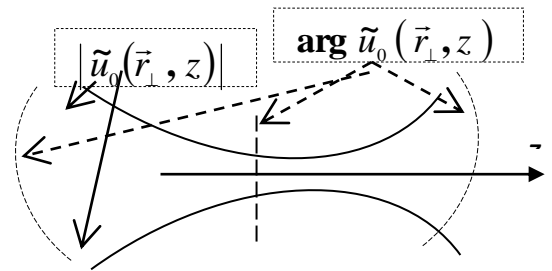


Рис. 2.4

37. Объяснить содержание спектрального метода описания распространения парааксиальных волновых пучков.

Воспользуемся преобразованием Фурье и представим поле парааксиального волнового пучка (3.1) в

виде суперпозиции плоских волн в которой $\tilde{U}_0(\vec{k}_{\perp})$ является амплитудой парциальной плоской

волны. Далее преобразуем Фурье-представление (1) в выражение позволяющее найти по спектру

$\tilde{U}_0(\vec{k}_{\perp})$ комплексную амплитуду парааксиального волнового пучка $\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, z)$.

следует учесть $(k_{\perp}/k) \equiv \mathcal{G} \ll 1$

Будем считать, что поле (1) образуется в результате дифракции на отверстии S_0 в экране (Рис. 2.3),

находящемся в плоскости $z=0$, поля, которое создается расположенными в области 1 источниками,

и что распределение этого поля $\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, 0)$ по поверхности отверстия S_0 известно. Тогда

спектральная плотность комплексной амплитуды $\tilde{U}_0(\vec{k}_{\perp})$ определится как Фурье-образ граничного

значения поля $\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, 0)$ в плоскости отверстия S_0 в экране

38. Записать соотношения между продольным и поперечными компонентами комплексной лучевой амплитуды векторного поля парааксиального электромагнитного пучка.

39. Записать квазиоптический оператор преобразования поля парааксиального пучка на участке свободного пространства.

$$\tilde{u}_0(\vec{r}_{\perp}, z) = \left\{ \frac{ik}{2\pi z} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \tilde{u}_0(\vec{r}'_{\perp}, 0) \exp\left[-\frac{ik|\vec{r}_{\perp} - \vec{r}'_{\perp}|^2}{2z}\right] d\vec{r}'_{\perp} \right\} \equiv \hat{G}_{(z/k)} \tilde{u}_0(\vec{r}'_{\perp}, 0), (1)$$

40. Записать квазиоптический оператор преобразования поля парааксиального пучка тонкой линзой.

$$\hat{T}_{(k/F)} = \exp\left(ik r_{\perp}^2 / 2F\right)$$

41. Записать формулы преобразования ширины и интенсивности поля на оси параксиального сфокусированного пучка гауссовой формы, распространяющегося в свободном пространстве.

$$a(z) \cong z \cdot \left\langle \sqrt{\left(a_0/R_0\right)^2 + \left(1/k a_0\right)^2} \right\rangle$$

$$\left\langle I(\mathbf{0}, z_{ext}) / I(\mathbf{0}, 0) \right\rangle = \left\langle 1 + \chi^{-2} \right\rangle$$

$$\chi^2 = \left(R_0 / k a_0^2\right)^2$$

42. Объяснить содержание понятия и записать формулу для угловой дифракционной расходимости поля распространяющегося сфокусированного гауссова пучка.

Угловая ширина диаграммы направленности излучения «вторичных источников», находящихся в плоскости $z = 0$, или в иной терминологии угол расходимости поля гауссова пучка на уровне e^{-1} по интенсивности определяется как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \{ a(z) / z \} \equiv \mathcal{G} = \sqrt{\left(a_0/R_0\right)^2 + \mathcal{G}_{df}^2}$$

43. Объяснить содержание понятий собственные (нормальные) типы волн или моды, элементарные ячейки и особые сечения в теории открытых цилиндрических линий (периодических центрированных систем) передачи силовых полей.

Открытыми цилиндрическими линиями передачи будем называть периодические центрированные линии передачи силовых полей

Открытые линии передачи обладают основным свойством всех линий передачи цилиндрического типа: в них существуют собственные (или нормальные) типы волн (моды), у которых поперечная структура поля определённым образом связана с параметрами линзовой линии.

модами открытых линий передачи являются пучки, параметры поперечной структуры поля которых, изменяясь в пространстве между корректорами фазы (линзами и зеркалами), точно повторяются только через период системы

В открытой линии передачи в пределах каждой элементарной ячейки (периодической системы) всегда имеется одно или несколько особых сечений, в которых поверхность фазового фронта можно установить из общих соображений и, в частности, из принципов симметрии пространства и взаимности условий распространения поля.

44. Записать интегральное уравнение (Фредгольма) для амплитуды поля моды открытой линзовой линии простейшего типа и преобразовать ядро уравнения к симметричному виду с помощью параметра фокусировки.

$$\tilde{p} \tilde{u}_0(\vec{r}_\perp, 0) = \left\{ \frac{ik}{2\pi L} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \tilde{u}_0(\vec{r}'_\perp, 0) \exp \left[\frac{-ik|\vec{r}_\perp - \vec{r}'_\perp|^2}{2L} + ik \frac{|\vec{r}'_\perp|^2 + |\vec{r}_\perp|^2}{4F} \right] d\vec{r}'_\perp \right\}, (3)$$

которое называется уравнением Фредгольма второго рода с симметричным ядром.

$g = 1 - (L/2F)$ называемого параметром фокусировки пучка.

$$\tilde{p}_v \tilde{V}(v) = \left\{ \sqrt{\frac{ik}{2\pi L}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(\zeta) \exp \left[-i \frac{gk}{2L} v^2 + i \frac{k}{L} v \cdot \zeta - i \frac{gk}{2L} \zeta^2 \right] d\zeta \right\}$$

45. Объяснить свойства функций Эрмита, являющихся собственными функциями решений уравнений Фредгольма с симметричным ядром.

$$V_m \left(\sqrt[4]{1-g^2} \sqrt{(k/L)} \cdot v \right) \equiv \bar{V} w_m(v/a_0) \equiv \bar{V} w_m(\eta) = \bar{V} H_m(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)$$

Индекс m называется числом функции Эрмита $w_m(\eta)$. Полиномы Эрмита $H_m(\eta)$ и соответствующие им функции Эрмита $w_m(\eta)$ с чётным индексом m симметричны относительно $\eta = 0$, а с нечётным – антисимметричны.

Функции Эрмита $w_m(\eta)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2}{d\eta^2} w_m(\eta) - (2m + 1 - \eta^2) w_m(\eta) = 0, \quad (13)$$

из которого следует, что в области

$$\eta > \eta_m \equiv \sqrt{2m+1} \quad (14)$$

они являются экспоненциально убывающими функциями аргумента.

46. Объяснить связь поперечных структур полей мод открытой линзовой линии с собственными функциями решений уравнений Фредгольма с симметричным ядром.

Поперечная структура поля моды рассматриваемой открытой линии передачи в плоскости $z = 0$ описывается произведением двух (в общем случае имеющих разные числа) функций Эрмита

$$\tilde{u}_{mn}(\vec{r}_\perp, 0) = \tilde{U}_0 w_m\left(\frac{x}{a_0}\right) \cdot w_n\left(\frac{y}{a_0}\right) \equiv \tilde{U}_0 H_m\left(\frac{x}{a_0}\right) \cdot H_n\left(\frac{y}{a_0}\right) \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a_0^2}\right), \quad (15)$$

определяющих изменение лучевой амплитуды поля по двум взаимно ортогональным направлениям OX и OY . Произведение двух функций Эрмита с индексами $m = n = 0$ описывает **структуру поля главной** (или основной) моды и представляет собой симметричный гауссов пучок

47. Сформулировать условие существования энергетически реализуемых мод в недифрагмированных открытых цилиндрических линиях передачи.

условием существования энергетически реализуемых мод в исследуемой простейшей линзовой линии (с симметричным расположением квадратичных корректоров) является условие

$$|g| < 1 \quad \Rightarrow \Rightarrow \quad 0 < L < 4F$$

48. Объяснить содержание понятия угловая расходимость поля, излучаемого в свободное пространство из открытой линии передачи (или из резонатора).

Угловая расходимость сфокусированного пучка поля главной ТЕМ₀₀-моды, выходящего из последнего фазового корректора открытой линии передачи в свободное пространство в качестве излучения эффективной антенны, в соответствии с определением (6.17) и шириной пучка (20) находится как

$$g = \sqrt{(a_0 / 2F)^2 + (1 / k a_0)^2} = \left\{ \lambda / \pi \sqrt{L(4F - L)} \right\}^{1/2} \quad (24)$$

и оказывается минимальной

$$g_{\min} = \left\{ \lambda / 2\pi F \right\}^{1/2}$$

для конфокального резонатора ($L = 2F$).

49. Объяснить связь коэффициента трансформации поля моды на периоде системы и постоянной распространения TEM_{mn}-моды цилиндрической линии передачи с собственными значениями решения уравнения Фредгольма.

50. Объяснить связь собственной частоты, коэффициента затухания, добротности и пространственной структуры поля TEM_{mnq}-моды открытого резонатора с решением интегрального уравнения Фредгольма для поля открытой линзовой линии (соответствующей резонатору).

Добротностью моды резонатора по определению является отношение частоты моды ω'_{mnq} к удвоенной величине коэффициента затухания ω''_{mnq} , которое с учётом обобщения на произвольные виды потерь в открытом резонаторе можно представить в виде

$$Q_{mnq} = \left(\omega'_{mnq} / \omega''_{mnq} \right) \equiv \left\{ k'_{mnq} \cdot L / -\ln \left| \tilde{p}_m \tilde{p}_n \tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \right|^2 \right\} .$$

51. Записать характеристическое уравнение открытого двухзеркального резонатора, используя решение интегрального уравнения Фредгольма для поля открытой линзовой линии (соответствующей резонатору).

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{mnq} &\equiv \omega'_{mnq} + i \omega''_{mnq} = \left(\mathbf{v}_f / 2L \right) \left\{ 2\pi q - i \ln \left(\tilde{p}_m \cdot \tilde{p}_n \cdot \tilde{r}_1 \cdot \tilde{r}_2 \right) \right\} = \\ &= \left(\mathbf{v}_f / 2L \right) \left\{ 2\pi q + (m+n+1) \cdot \arccos g + \varphi_{r_1} + \varphi_{r_2} - i \ln \left(r_1 \cdot r_2 \right) \right\} . \end{aligned}$$