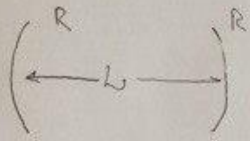
Задача 1

Задача № 1

Найти в плоскостях $z_1 = 0$; $z_2 = L/2$ площади поперечных сечений TEM_{mnq} – моды открытого резонатора для излучения, имеющего длину волны λ. Рассмотреть случаи $R_a = \frac{4L}{4-\sqrt{15}}$ и $R_б = L$, $m=n$; $m=n=0$



<u>Решение</u>

$$a(z) = a_0^2\left[\left(1-\frac{z}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{k a_0^2}\right)^2\right] = a_0^2\left[\left(1-\frac{z}{2F}\right)^2 + \frac{z^2(4F-L)}{4F^2 L}\right]$$

$$S_1' = \pi a^2(0) \qquad a_0^2 = \frac{L\sqrt{m+n+1}}{k\sqrt{1-g^2}} = \frac{2LF}{k\sqrt{L(4F-L)}}$$

$$S_2' = \pi a^2\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$g = 1 - \frac{L}{R} = 1 - \frac{L}{2F}$$ a_0 – ширина пучка в сечении $z=0$ $(a_0^2(0) = a_0^2)$

$$S_1' = \pi\frac{L\sqrt{m+n+1}}{k\sqrt{1-g^2}} = \frac{L\lambda\sqrt{m+n+1}}{2\sqrt{1-g^2}}$$

$$S_2' = \pi\frac{L\sqrt{m+n+1}}{k\sqrt{1-g^2}}\left[\left(1-\frac{L^2}{8F}\right)^2 + \frac{L(4F-L)}{16F^2}\right] = \frac{L\lambda\sqrt{m+n+1}}{2\sqrt{1-g^2}}\left[1-\frac{L}{4F}\right]$$

а) $R_a = \frac{4L}{4-\sqrt{15}}$; $g = 1 - \frac{L(4-\sqrt{15})}{4L} = 1 - \frac{4-\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$m=n$: $S_1' = \frac{L\lambda}{2}\sqrt{2m+1}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{15}{16}}} = 2L\lambda\sqrt{2m+1}$

$$S_2' = \frac{L\lambda}{2}\sqrt{2m+1}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{15}{16}}}\left[1-\frac{\cancel{L}(4-\sqrt{15})}{2\cdot\cancel{L}\cdot 4}\right] = S_1'\left(\frac{4+\sqrt{15}}{8}\right)$$

$m=n=0$: $S_1' = 2L\lambda$

$$S_2' = S_1'\left(\frac{4+\sqrt{15}}{8}\right)$$

б) $R_б = L$; $g = 1 - \frac{L}{L} = 0$

$m=n$: $S_1' = \frac{L\lambda}{2}\sqrt{2m+1}$

$$S_2' = \frac{L\lambda}{2}\sqrt{2m+1}\left[1-\frac{\cancel{L}}{2\cancel{L}}\right] = \frac{1}{2}S_1'$$

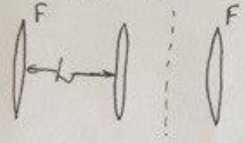
$m = n = 0: \quad \delta_1' = \frac{L\lambda}{2}$

$$\delta_2' = \frac{1}{2}\delta_1'$$

Задача 2

Задача № 2

Найти в пространстве между линзами минимальный размер (радиус) пучка TEM_{mn}-мод открытой линии передачи для излучения, имеющего длину волны λ. Рассмотреть случаи $F_a = \frac{2L}{4-\sqrt{15}}$; $F_б = \frac{L}{2}$; $F_c = L$; $F_d = 2L$; $F_e = \frac{L}{3}$



Решение

$$a^2(z) = a_0^2\left[\left(1-\frac{z}{R}\right)^2 + \left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]$$

$$\frac{d}{dz}\left(a^2(z)\right) = 2a(z)\,a_0^2\left[2\left(1-\frac{z}{R}\right)\left(-\frac{1}{R}\right) + \frac{2z}{k^2a_0^4}\right] = 2a_0^4\left[\left(1-\frac{z}{R}\right)^2+\left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]\left[\frac{2z}{R^2}-\frac{2}{R}+\frac{2z}{k^2a_0^4}\right]$$

$$\frac{2z^*}{R^2} - \frac{2}{R} + \frac{2z^*}{k^2a_0^4} = 0 \rightarrow z^* = \frac{2}{R}\left(\frac{2}{R^2}+\frac{2}{k^2a_0^4}\right)^{-1} = \frac{1}{F}\left(\frac{1}{2F^2}+\frac{2}{k^2a_0^4}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{2F}{1+B^2}; \quad B = \frac{2F}{ka_0^2}$$

$$a^2(z^*) = a_0^2\left[\left(1-\frac{1}{1+B^2}\right)^2 + \left(\frac{2F}{1+B^2}\cdot\frac{B}{2F}\right)^2\right] = a_0^2\left[\left(\frac{B^2}{1+B^2}\right)^2+\left(\frac{B}{1+B^2}\right)^2\right] =$$

$$= a_0^2\frac{B^4+B^2}{(1+B^2)^2} = a_0^2\frac{B^2}{1+B^2} = a_0^2\frac{4F^2}{k^2a_0^4\left(1+\frac{4F^2}{k^2a_0^4}\right)} = a_0^2\frac{4F^2}{k^2a_0^4+4F^2} =$$

$$a_0^2 = \frac{L\sqrt{m+m+1}}{k\sqrt{1-g^2}} = \frac{L\sqrt{2m+1}}{k\sqrt{1-g^2}}; \quad g = 1-\frac{L}{R} = 1-\frac{L}{2F}$$

$$= \frac{L\sqrt{2m+1}}{k\sqrt{1-g^2}}\frac{4F^2}{k^2\frac{L^2(2m+1)}{k^2(1-g^2)}+4F^2} = \frac{L\sqrt{2m+1}}{k\sqrt{1-g^2}}\frac{4F^2}{\frac{L^2(2m+1)}{(1-g^2)}+4F^2}$$

а) $F_a = \frac{2L}{4-\sqrt{15}}$; $g = 1-\frac{L(4-\sqrt{15})}{4L} = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\sqrt{1-g^2} = \frac{1}{4}$

$$a^2(z^*) = \frac{L\sqrt{2m+1}}{\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{1}{4}}\frac{4\cdot4L^2}{(4-\sqrt{15})^2\left(\frac{L^2(2m+1)}{\frac{1}{16}}+4\frac{4L^2}{(4-\sqrt{15})^2}\right)} = \frac{2L\lambda\sqrt{2m+1}}{\pi}\cdot$$

$$\cdot\frac{L^2}{L^2(2m+1)(4-\sqrt{15})^2+L^2} = \frac{2L\lambda\sqrt{2m+1}}{\pi}\frac{1}{(2m+1)(4-\sqrt{15})^2+1}$$

б) $F_б = \frac{L}{2}$; $g = 1-\frac{L}{2\cdot\frac{L}{2}} = 0$; $\sqrt{1-g^2} = 1$

$$a^2(z^*) = \frac{L\sqrt{2m+1}}{\frac{2\pi}{\lambda}}\frac{4\cdot\frac{L^2}{4}}{L^2(2m+1)+4\frac{L^2}{4}} = \frac{L\lambda\sqrt{2m+1}}{2\pi}\frac{1}{2m+2}$$

c) $F_c = L$; $g = 1 - \frac{L}{2\cdot L} = \frac{1}{2}$; $\sqrt{1-g^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$a^2(z^*) = \frac{L\sqrt{2m+1}}{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\overset{2}{4}k^2}{\frac{k^2(2m+1)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \overset{2}{4}k^2} = \frac{\lambda L\sqrt{2m+1}}{\sqrt{3}\,\pi} \frac{2}{\frac{2m+1}{\sqrt{3}} + 2}$$

g) $F_d = 2L$; $g = 1 - \frac{L}{2\cdot 2L} = \frac{3}{4}$; $\sqrt{1-g^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$$a^2(z^*) = \frac{L\sqrt{2m+1}}{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\sqrt{7}}{4}} \frac{4\cdot 4k^2}{\frac{k^2(2m+1)}{\frac{\sqrt{7}}{4}} + 4\cdot 4k^2} = \frac{2L\lambda\sqrt{2m+1}}{\sqrt{7}\,\pi} \frac{4}{\frac{2m+1}{\sqrt{7}} + 4}$$

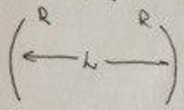
e) $F_e = L/3$; $g = 1 - \frac{L}{2\cdot\frac{L}{3}} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$; $\sqrt{1-g^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$a^2(z^*) = \frac{L\sqrt{2m+1}}{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{4\cdot k^2}{9\left(\frac{k^2(2m+1)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \overset{2}{4}\frac{k^2}{9}\right)} = \frac{L\lambda\sqrt{2m+1}}{\sqrt{3}\,\pi} \frac{2}{\left(\frac{9(2m+1)}{\sqrt{3}} + 2\right)}$$

Задача 3

Задача №3

Найти угловую расходимость излучения, которое имеет длину волны λ и структуру поля TEM_{mnq} – моды резонатора. $m=n$; $m=n=0$



<u>Решение</u>

$$\Theta = \lim_{z\to\infty} \frac{a(z)}{z} = \lim_{z\to\infty} \frac{a_0\sqrt{\left(1-\frac{z}{R}\right)^2+\left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2}}{z} = \lim_{z\to\infty} a_0\sqrt{\frac{1}{z^2}\left[\left(1-\frac{z}{R}\right)^2+\left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]} =$$

$$= \lim_{z\to\infty} a_0\sqrt{\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{R}\right)^2+\frac{1}{(ka_0^2)^2}} = a_0\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{k^2a_0^4}} = \sqrt{\frac{a_0^2}{R^2}+\frac{1}{k^2a_0^2}}$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{L\sqrt{m+n+1}}{k\sqrt{1-g^2}}}, \quad g = 1-\frac{L}{R}; \quad \sqrt{1-g^2} = \sqrt{1-\left(1-\frac{L}{R}\right)^2} = \sqrt{-\frac{L^2}{R^2}+2\frac{L}{R}}$$

$m=n$: $$a_0 = \sqrt{\frac{L\sqrt{2m+1}}{\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{2\frac{L}{R}-\frac{L^2}{R^2}}}}$$

$$\Theta = \left[\frac{\lambda L\sqrt{2m+1}}{2\pi\sqrt{2\frac{L}{R}-\frac{L^2}{R^2}}}\cdot\frac{1}{R^2} + \frac{\cancel{\frac{2\pi}{\lambda}}\sqrt{2\frac{L}{R}-\frac{L^2}{R^2}}}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 L\sqrt{2m+1}}\right]^{+1/2} =$$

$$= \left[\frac{L\lambda\sqrt{2m+1}}{2\pi\sqrt{2LR^3-L^2R^2}} + \frac{\lambda\sqrt{2\frac{L}{R}-\frac{L^2}{R^2}}}{2\pi L\sqrt{2m+1}}\right]^{+1/2}$$

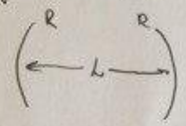
$m=n=0$:

$$\Theta = \left[\frac{L\lambda}{2\pi\sqrt{2LR^3-L^2R^2}} + \frac{\lambda\sqrt{2\frac{L}{R}-\frac{L^2}{R^2}}}{2\pi L}\right]^{1/2}$$

Задача 4

Задача № 4 ?

Найти комплексные частоты $\tilde{\omega}_{mnq}$ и добротности Q_{mnq} TEM_{mnq} - мод резонатора, идентичные зеркала которого имеют коэффициенты отражения по полю $re^{i\varphi}$. Рассмотреть случаи $R_a = L$; $R_б = 2L$; $R_d = 2L/3$; $R_c = 4L$; Провести численные расчеты для $r = 0{,}98$; $\varphi = \Pi$; $m = n = 0$; $q = 2\cdot10^6$; $L = 100$ см; $\varepsilon = \mu = 1$



<u>Решение</u>

$$\tilde{\omega}_{mnq} = \omega'_{mnq} + i\omega''_{mnq} = \frac{v_ф}{2L}\left[2\Pi q - i\ln(\tilde{P}_m\tilde{P}_n\,\tilde{r}_1\tilde{r}_2)\right] \ominus$$

$$\tilde{P}_m\tilde{P}_n = \tilde{P}_{mn}$$

$$\tilde{P}_{mn} = e^{i(m+n+1)\arccos g}$$

$$\ominus\ \frac{v_ф}{2L}\left[2\Pi q + (m+n+1)\arccos g + \varphi_{r_1} + \varphi_{r_2} - i\ln(r_1 r_2)\right]$$

$$g = 1 - \frac{L}{R}$$

$$\omega'_{mnq} = \frac{v_ф}{2L}\left[2\Pi q + (m+n+1)\arccos g + \varphi_{r_1} + \varphi_{r_2}\right]$$

$$\omega''_{mnq} = \frac{v_ф}{2L}\left(-\ln(r_1 r_2)\right)$$

$$Q_{mnq} = \frac{\omega'_{mnq}}{2\omega''_{mnq}}$$

$m = n = 0$; $\varphi = \Pi$, $\varepsilon = \mu = 1$

$$\tilde{\omega}_{00q} = \frac{c}{2L}\left[2\Pi q + \arccos g + 2\Pi - i\,2\ln r\right]$$

а) $R_a = L$; $g = 1 - \frac{L}{L} = 0$

$$\tilde{\omega}_{00q} = \frac{c}{2L}\left[2\Pi q + \frac{\Pi}{2} + 2\Pi - i2\ln r\right]$$

$$\tilde{\omega}_{00q} = \frac{3\cdot10^8}{2\cdot1}\left[2\cdot3{,}14\cdot2\cdot10^6 + \frac{5\cdot3{,}14}{2} - i2\ln0{,}98\right] = 18{,}84\cdot10^{14} + 0{,}06\cdot10^8 i$$

$$Q_{00q} = \frac{18{,}84\cdot10^{14}}{2\cdot0{,}06\cdot10^8} = 157\cdot10^6$$

б) $R_б = 2L$; $g = 1 - \frac{L}{2L} = \frac{1}{2}$

$$\tilde{\omega}_{00q} = \frac{c}{2L}\left[2\Pi q + \frac{\Pi}{3} + 2\Pi - i2\ln r\right]$$

с) $R_c = 4L$; $g = 1 - \frac{L}{4L} = \frac{3}{4}$

$$\tilde{\omega}_{00q} = \frac{c}{2L}\left[2\Pi q + \arccos\frac{3}{4} + 2\Pi - i2\ln r\right]$$

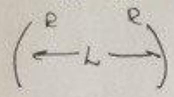
g) $R_d = \frac{2b}{3}$; $g = 1 - \frac{b}{\frac{2b}{3}} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$$\tilde{\omega}_{\infty q} = \frac{c}{2\pi}\left[2\pi q + \frac{2\pi}{3} + 2\pi - i\,2\ln 2\right]$$

5 задача

Задача № 5

Найти добротность TEM_{00q}-моды резонатора, идентичные зеркала которого имеют радиусы кривизны $R = 2L$ и гауссов профиль коэффициента отражения $r = e^{-\frac{k}{2\alpha}(x^2+y^2)}$, $\alpha = L$



<u>Решение</u>

$$r = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\overset{\beta}{\frac{k}{2\alpha}}(x^2+y^2)}\,dx\,dy \cdot \frac{1}{S} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\,\frac{1}{S} = \frac{\pi \cdot 2\alpha \cdot \lambda}{2\pi \cdot S} = \frac{\alpha\lambda}{S} = \frac{\lambda}{L}$$

$$R = 2L;\quad g = 1 - \frac{L}{2R} = \frac{1}{2}$$

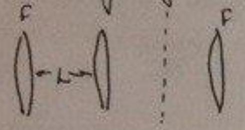
$$\tilde{\omega}_{00q} = \frac{c}{2L}\left(2\pi q + \arccos\frac{1}{2} - i2\ln\frac{\lambda}{L}\right) = \frac{c}{2L}\left(2\pi q + \frac{\pi}{3} - i2\ln\frac{\lambda}{L}\right)$$

$$Q_{00q} = \frac{2\pi q + \frac{\pi}{3}}{-4\ln\frac{\lambda}{L}} = \frac{2\pi q + \frac{\pi}{3}}{4\ln\frac{L}{\lambda}}$$

6 задача

Задача № 6

Найти характеристи основной моды TEM_{00} в открытой линии передачи. Найти ширину пучка и установить ее зависимость от продольной координаты на периоде системы, определить фазовую скорость и мощность, полагая заданными фокусное расстояние линз F и период системы L, а также длину волны λ и амплитуду поля E_0 на оси линии передачи



Решение

Пусть известно: $\tilde{U}(x,y,z=0) = \tilde{U}_0\, e^{-\frac{r_\perp^2}{2a_0^2}} e^{ik\frac{r_\perp^2}{2F}}$ – TEM_{00} мода

$$\tilde{u}(z) = \frac{ik}{2\pi z}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_0\, e^{-\frac{x'^2+y'^2}{2a_0^2}} e^{ik\frac{x'^2+y'^2}{2F}} e^{-i\frac{k[(x-x')^2+(y-y')^2]}{2z}}\,dx'dy' =$$

$$= \frac{ik\tilde{U}_0}{2\pi z}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x'^2}{2a_0^2}+ik\frac{x'^2}{2F}-\frac{ik}{2z}(x^2+x'^2-2xx')}dx'\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y'^2}{2a_0^2}+ik\frac{y'^2}{2F}-i\frac{k}{2z}(y^2+y'^2-2yy')}dy' =$$

$$= \frac{ik\tilde{U}_0}{2\pi z} e^{-\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x'^2}{2a_0^2}+ik\frac{x'^2}{2F}-\frac{ik}{2z}(x'^2-2xx')}dx'\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y'^2}{2a_0^2}+ik\frac{y'^2}{2F}-\frac{ik}{2z}(y'^2-2yy')}dy' \ominus$$

$$-a^2 = -\frac{1}{2a_0^2}+ik\frac{1}{2F}-\frac{ik}{2z};\quad b_x = \frac{2ikx}{2z};\quad b_y = \frac{2iky}{2z}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2+bx}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\ominus\ \frac{ik\tilde{U}_0}{4\pi z}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b_x^2+b_y^2}{4a^2}} e^{-\frac{ik}{2z}r_\perp^2} = \frac{ik\tilde{U}_0}{4a^2 z} e^{\frac{b_x^2+b_y^2}{4a^2}}\cdot e^{-\frac{ik}{2z}r_\perp^2}$$

$$e^{\frac{b_x^2+b_y^2}{4a^2}} = \exp\left\{-\frac{4k^2(x^2+y^2)}{4z^2\cdot 4\left(\frac{1}{2a_0^2}+\frac{ik}{2z}-ik\frac{1}{2F}\right)}\right\} = \exp\left\{-\frac{k^2 r_\perp^2}{4z^2\left(\frac{1}{2a_0^2}+\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2F}\right)\right)}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{k^2r_\perp^2}{2z^2}\,\frac{\frac{1}{a_0^2}-ik\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2F}\right)}{\frac{1}{a_0^4k^2}+k^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2F}\right)^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{r_\perp^2}{2z^2\left(\frac{1}{k^2a_0^2}+a_0^2\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2F}\right)^2\right)}\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{ikr_\perp^2}{z}\,\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{2F}}{\frac{z^2}{a_0^4k^2}+\left(1-\frac{z}{2F}\right)^2}\right\}$$

$$\tilde{u}(z) = \frac{ik\tilde{U}_0}{2z}\left(\frac{1}{2a_0^2}+\frac{ik}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2F}\right)\right)^{-1} e^{-\frac{r_\perp^2}{2a^2(z)}} e^{ik\frac{r_\perp^2}{2R(z)}}$$

$$V_\phi = \frac{\omega}{h_{mn}},\quad h_{mn} = k-\frac{(m+n+1)\arccos g}{L},\quad g = 1-\frac{L}{2F}$$

$$h_{00} = k-\frac{\arccos g}{L}$$

$$V_\phi = \frac{\omega}{\frac{2\pi}{\lambda}-\frac{\arccos\left(1-\frac{L}{2F}\right)}{L}}$$

$$\vec{E} = \bar{x}_0 \tilde{E}_0 \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{z}{2F}\right) - i\frac{z}{ka_0^2}\right]^{-1} e^{-\frac{r_\perp^2}{2a^2(z)}} e^{+ik\frac{r_\perp^2}{2R(z)}}$$

$$\overline{\vec{\Pi}} = \frac{c}{8\pi}|\vec{E}|^2 \vec{z}_0$$ – плотность потока мощности

$$\overline{\vec{\Pi}} = \frac{c}{32\pi}\tilde{E}_0^2\left[\left(1-\frac{z}{2F}\right)^2+\left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]^{-1} e^{-\frac{r_\perp^2}{a^2(z)}} \bar{z}_0$$

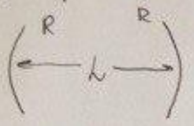
$$P = \frac{c}{32\pi}\tilde{E}_0^2\left[\left(1-\frac{z}{2F}\right)^2+\left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]^{-1}\cdot 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} r_\perp e^{-\frac{r_\perp^2}{a^2(z)}}\,dr_\perp =$$

$$= \frac{c}{16}\tilde{E}_0^2\left[\left(1-\frac{z}{2F}\right)^2+\left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]^{-1}\frac{1}{2}a^2(z) = \frac{c}{32}\tilde{E}_0^2 a_0^2$$

7 задача

Задача №7

Найти характеристики TEM_{00q} – мод открытого резонатора (комплексную частоту $\tilde{\omega}_{00q}$, добротность Q_{00q}, угловую расходимость излучения), полагая известными радиус кривизны R и коэффициент отражения $r e^{i\varphi}$ зеркал, длину волны λ и размер резонатора L. Найти запасенную энергию и излучаемую мощность, зная амплитуду поля $\tilde{E}_0$ на оси системы данного вырожденного параксиального пучка в центральном сечении резонатора.



Решение

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{-\frac{r_\perp^2}{2a_0^2}} \text{ — в сечении } z=0$$

$$\tilde{E}(\vec{r}_\perp, z) = \hat{G}_{\frac{z}{k}} \hat{T}_{\frac{k}{F}} \tilde{E}(\vec{r}_\perp, 0) = \tilde{E}_0 \left[\left(1 - \frac{z}{R_0}\right) + i\frac{z}{ka_0^2}\right]^{-1} e^{-\frac{r_\perp^2}{2a^2(z)}} e^{ik\frac{r_\perp^2}{2R(z)}}$$

$$a^2(z) = a_0^2\left[\left(1-\frac{z}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]$$

$$\frac{1}{R(z)} = -\frac{1}{z}\left[1 - \frac{1 - z/R_0}{(1-z/R_0)^2 + (z/ka_0^2)^2}\right]$$

$$\tilde{\omega}_{00q} = \frac{c}{2L}\left[2\pi q + \arccos g + 2\varphi - i2\ln r\right]$$

$$Q_{00q} = \frac{2\pi q + \arccos g + 2\varphi}{2\ln\frac{1}{r}}$$

$$P = \frac{c}{8\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{E}|^2 dx\,dy = \frac{c}{8\pi}\tilde{E}_0^2\left[\left(1-\frac{z}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]^{-1} \cdot 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} r_\perp e^{-\frac{r_\perp^2}{a^2(z)}} dr_\perp =$$

$$= \frac{c\tilde{E}_0^2 a_0^2}{8}$$

$$\theta = \lim_{z\to\infty}\frac{a(z)}{z} = \lim_{z\to\infty} a_0\sqrt{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{ka_0^2}\right)^2} = a_0\sqrt{\left(\frac{1}{R_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{ka_0^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a_0^2}{R_0^2} + \frac{1}{k^2a_0^2}}$$

$$a_0 = \frac{L}{k\sqrt{1-g^2}}; \quad g = 1 - \frac{L}{R_0}$$

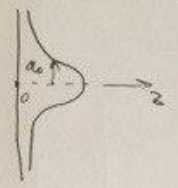
$$W_{зап} = \int w_e\,dV; \quad w_e = \frac{|\tilde{E}|^2}{8\pi}$$

$$W_{зап} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^L \frac{|\tilde{E}|^2}{8\pi} dx\,dy\,dz = \int_0^L \frac{\tilde{E}_0^2 a_0^2}{8} dz = \frac{\tilde{E}_0^2 a_0^2 L}{8}$$

8 задача

Задача №8

Найти ширину параксиального волнового пучка в плоскости $z>0$ по заданному в плоскости $z_0=0$ полю $\vec{\tilde{E}}_0(\vec{r}_\perp,0)=\vec{x}_0\tilde{E}_0 e^{-\frac{x^2+y^2}{2a_0^2}}$



Решение

$$\vec{\tilde{E}}(\vec{r}_\perp,z)=\frac{ik}{4\pi z}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{x}_0\tilde{E}_0 e^{-\frac{r_\perp^2}{2a_0^2}} e^{+ik\frac{r_\perp^2}{R_0}} e^{-ik\frac{|\vec{r}_\perp-\vec{r}_\perp'|^2}{2z}}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{\tilde{E}_0}{\left(1-\frac{z}{R_0}\right)+i\left(\frac{z}{ka_0^2}\right)} e^{-\frac{r_\perp^2}{2a^2(z)}} e^{ik\frac{r_\perp^2}{R(z)}}$$

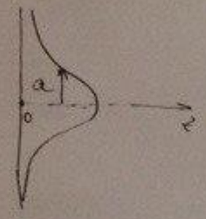
$$a^2(z)=a_0^2\left[\left(1-\frac{z}{R_0}\right)^2+\left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]$$

9 задача

Задача № 9

Найти комплексную амплитуду поля параксиального пучка в плоскости $z>0$ по заданному в плоскости $z=0$ спектру пространственных частот

$$\vec{\tilde{E}}_0(k_x, k_y) = \vec{x}_0 \tilde{E}_0 e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{2k^2}}$$



<u>Решение</u>

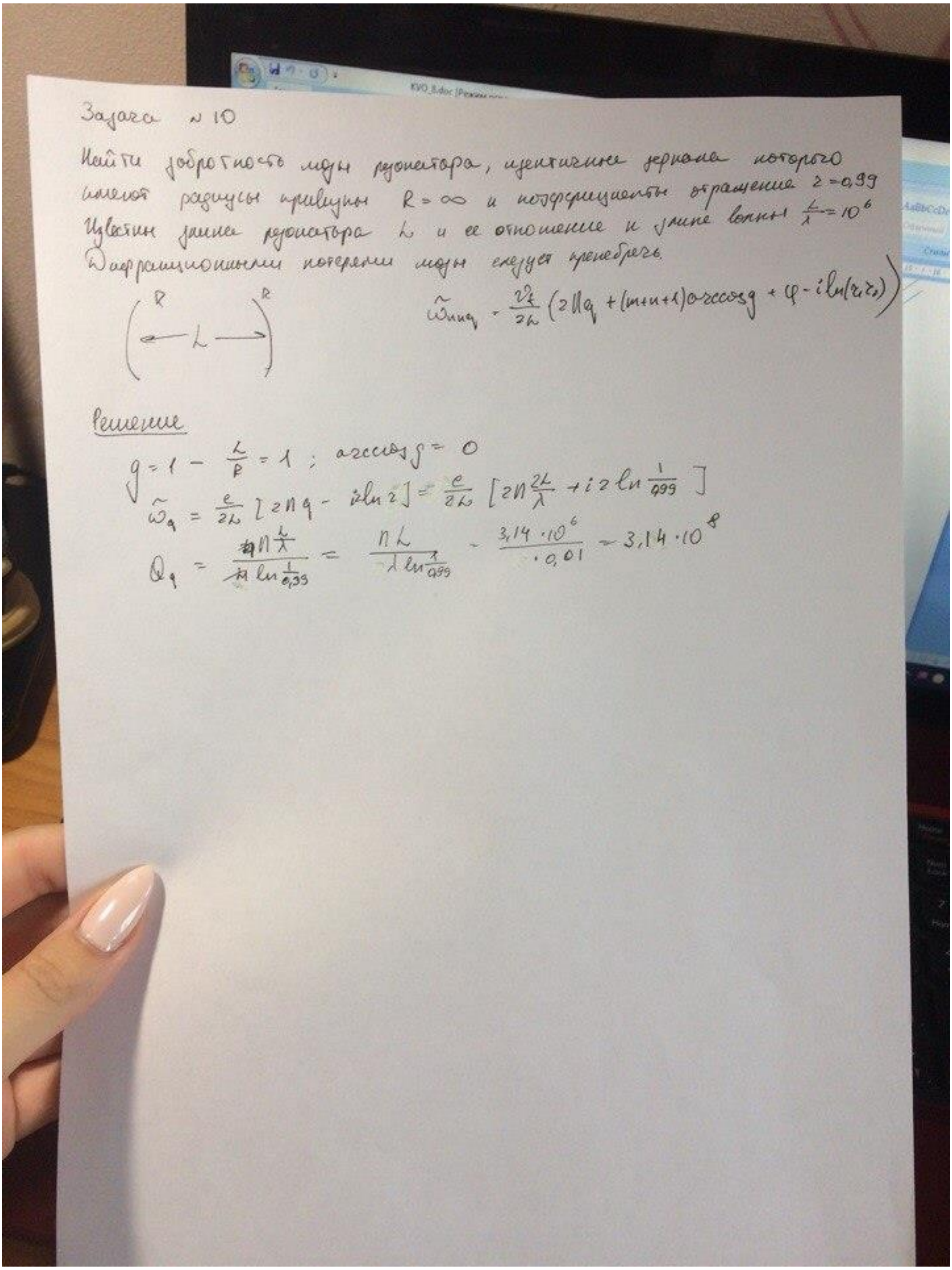
$$\tilde{E}_0(\vec{r}_\perp, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_0(\vec{k}_\perp, z=0)\, e^{-i(k_x x + k_y y) + \frac{k_x^2+k_y^2}{2k} z}\, dk_x\, dk_y =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_0\, e^{-i(k_x x + k_y y)}\, e^{-\frac{k_x^2+k_y^2}{2k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{z}\right)}\, dk_x\, dk_y =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2+bx}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b^2}{4a^2}} \qquad \begin{cases} -a^2 = -\frac{1}{2k^2} + \frac{z}{2k} \\ b = i r_\perp \end{cases}$$

$$= \tilde{E}_0 \frac{\pi}{\frac{1}{2k^2} - \frac{z}{2k}}\, e^{-\frac{r_\perp^2}{4\left(\frac{1}{2k^2} - \frac{z}{2k}\right)}} = \tilde{E}_0 \frac{2\pi k^2}{1-2k}\, e^{-\frac{k^2 r_\perp^2}{2(1-2k)}}$$

10 задача



Задача № 10

Найти добротность мод резонатора, идентичные зеркала которого имеют радиусы кривизны $R=\infty$ и коэффициенты отражения $r=0{,}99$. Известны длина резонатора L и ее отношение к длине волны $\frac{L}{\lambda}=10^6$. Дифракционными потерями мод следует пренебречь.

$$\tilde{\omega}_{mnq}=\frac{v_\varphi}{2L}\left(2\pi q+(m+n+1)\arccos g+\varphi-i\ln(r_1 r_2)\right)$$

Решение

$$g=1-\frac{L}{R}=1;\quad \arccos g=0$$

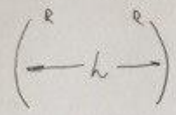
$$\tilde{\omega}_q=\frac{c}{2L}\left[2\pi q-i\ln r\right]=\frac{c}{2L}\left[2\pi\frac{2L}{\lambda}+i\,2\ln\frac{1}{0{,}99}\right]$$

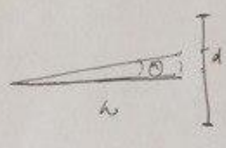
$$Q_q=\frac{\cancel{4}\pi\frac{L}{\lambda}}{\cancel{4}\ln\frac{1}{0{,}99}}=\frac{\pi L}{\lambda\ln\frac{1}{0{,}99}}=\frac{3{,}14\cdot 10^6}{0{,}01}=3{,}14\cdot 10^8$$

11 задача

Задача № 11

Найти условие на диаметр $D_к$ зеркал резонатора, при выполнении которого можно пренебречь дифракционными потерями моды TEM_{00q}. Заданы радиусы кривизны зеркал $R=L$ и их коэффициенты отражения $r=0{,}99$, отношение $L/\lambda=10^6$ длины резонатора и длины волны.





$\theta \approx \frac{d}{L}$

Решение:

$$g = 1 - \frac{L}{R} = 0;\ \arccos g = \frac{\pi}{2}$$

$$D \gg L \cdot \theta$$

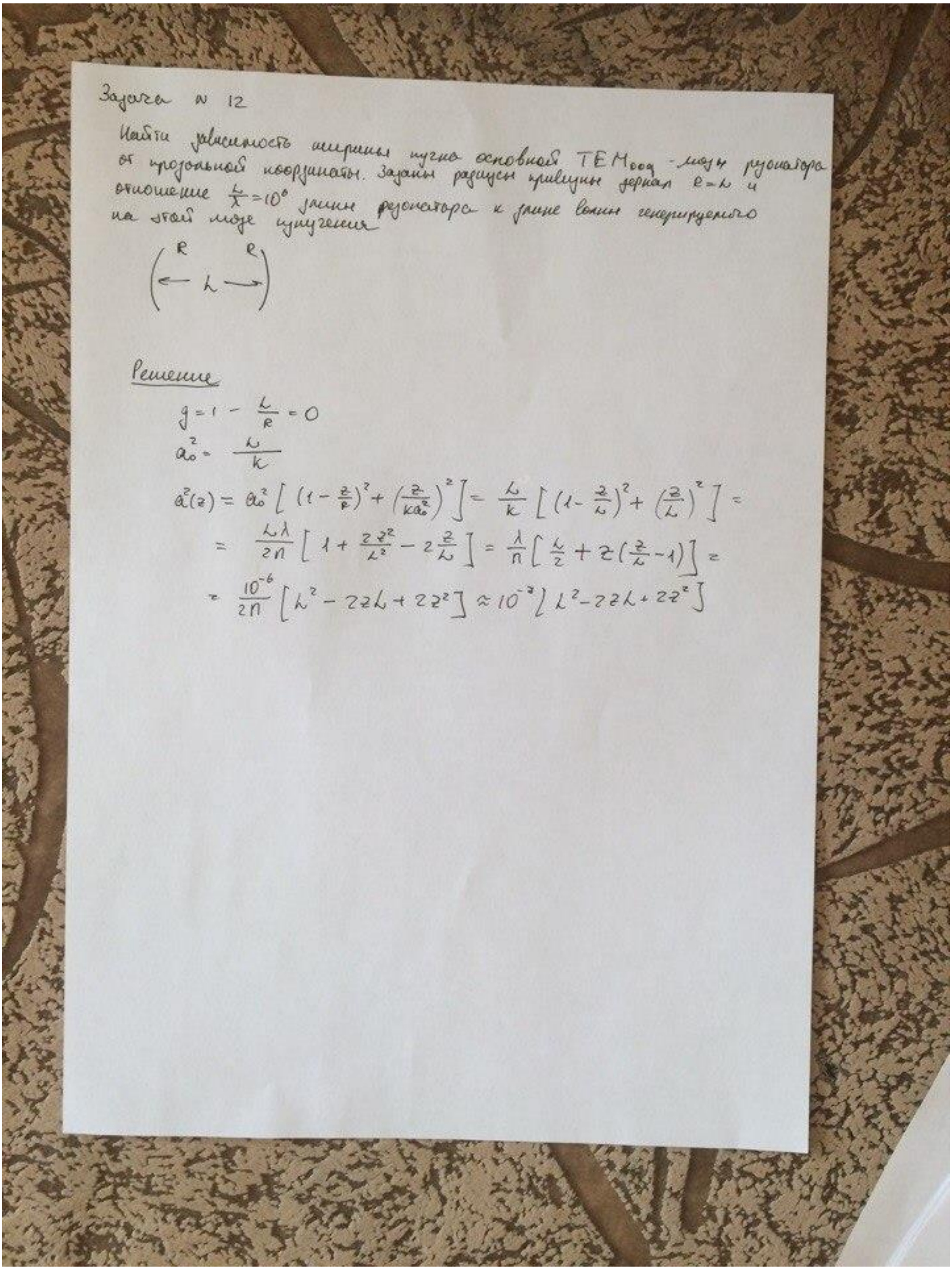
$$\theta = \lim_{z\to\infty} \frac{a(z)}{z} = \lim_{z\to\infty} a_0 \sqrt{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{1}{k^2 a_0^4}} = a_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{k^2 a_0^4}} = \sqrt{\frac{a_0^2}{R^2} + \frac{1}{k^2 a_0^2}} \ominus$$

$$a_0^2 = \frac{L}{k\sqrt{1-g^2}} = \frac{L}{k}$$

$$\ominus \sqrt{\frac{L}{kR^2} + \frac{k}{k^2 \cdot L}} = \sqrt{\frac{L\lambda}{2\pi R^2} + \frac{\lambda}{2\pi L}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi L} + \frac{\lambda}{2\pi L}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi L}}$$

$$D \gg L\sqrt{\frac{\lambda}{\pi L}} = L\sqrt{\frac{10^{-6}}{3{,}14}} \simeq 0{,}56 \cdot 10^{-3} L$$

12 задача



Задача № 12

Найти зависимость ширины пучка основной TEM_{00q} -моды резонатора от продольной координаты. Заданы радиусы кривизны зеркал $R=L$ и отношение $\frac{L}{\lambda}=10^{6}$ длины резонатора к длине волны генерируемого на этой моде излучения

R R

L

Решение

$$g = 1 - \frac{L}{R} = 0$$

$$a_0^2 = \frac{L}{k}$$

$$a^2(z) = a_0^2\left[\left(1-\frac{z}{R}\right)^2+\left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right] = \frac{L}{k}\left[\left(1-\frac{z}{L}\right)^2+\left(\frac{z}{L}\right)^2\right] =$$

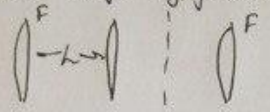
$$= \frac{L\lambda}{2\pi}\left[1+\frac{2z^2}{L^2}-2\frac{z}{L}\right] = \frac{\lambda}{\pi}\left[\frac{L}{2}+z\left(\frac{z}{L}-1\right)\right] =$$

$$= \frac{10^{-6}}{2\pi}\left[L^2-2zL+2z^2\right] \approx 10^{-7}\left[L^2-2zL+2z^2\right]$$

13 задача

Задача № 13

Найти зависимость ширины пучка основной TEM_{00}-моды открытой линии передачи от пространственной координаты в пространстве между линзами. Заданы расстояния между линзами $L = 0{,}75F$ и отношение $L/\lambda = 10^6$ этого расстояния к длине волны распространяющегося на этой моде излучения.



Решение

$$g = 1 - \frac{L}{2F} = 1 - \frac{0{,}75F}{2F} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$a_0^2 = \frac{L}{k\sqrt{1-g^2}} = \frac{L}{k}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{64}}} = \frac{L}{k}\frac{8}{\sqrt{39}}$$

$$a^2(z) = a_0^2\left[\left(1-\frac{z}{R}\right)^2 + \left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right] = \frac{L}{k}\frac{8}{\sqrt{39}}\left[\left(1-\frac{z}{2F}\right)^2 + \left(\frac{z\sqrt{39}}{L8}\right)^2\right] = \frac{L}{k}\frac{8}{\sqrt{39}}\left[\left(1-\frac{z\cdot 3}{8L}\right)^2 + \frac{z^2 39}{64L^2}\right] =$$

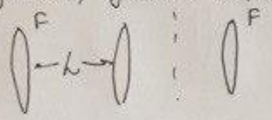
$$= \frac{\lambda L}{2\pi}\frac{8}{\sqrt{39}}\left[1 + \frac{9z^2}{64L^2} - \frac{6z}{8L} + \frac{39z^2}{64L^2}\right] = \frac{\lambda L 8}{2\pi\sqrt{39}}\frac{1}{64L^2}\left[64L^2 + 48z^2 - 48zL\right] = \frac{\lambda}{L}\frac{1}{2\pi\sqrt{39}}\frac{1}{\cancel{8}}\cdot\cancel{16}\left[4L^2 + 3z^2 - 3zL\right] = \frac{\lambda}{L}\frac{1}{\pi\sqrt{39}}\left[4L^2 + 3z^2 - 3zL\right]$$

$$\approx 6\cdot 10^{-8}\left(4L^2 + 3z^2 - 3zL\right)$$

14 задача

Задача №14

Найти условие на диаметр D_k линзы открытой линии, при выполнении которого можно пренебречь дифракционными потерями мод TEM_{00}. Заданы расстояния между линзами $L = 2F$, отношение $L/\lambda = 10^6$ этого расстояния к длине волны распространяющейся излучения, длина линии передачи $S = 100L$ и потери 0,1%



<u>Решение</u>

$$g = 1 - \frac{L}{2F} = 0; \quad a_0^2 = \frac{L}{k}$$

$$\Theta = \lim_{z\to\infty} \frac{a(z)}{z} = \lim_{z\to\infty} a_0 \sqrt{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{1}{(ka_0^2)^2}} = \sqrt{\left(\frac{a_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{(ka_0)^2}}$$

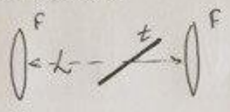
$$D \gg \Theta L = L\sqrt{\frac{L}{k\underbrace{R^2}_{=2F=L}} + \frac{1}{kL}} = L\sqrt{\frac{2}{kL}} = L\sqrt{\frac{\lambda}{\pi L}} =$$

$$= L\sqrt{\frac{10^{-6}}{3,14}} \simeq 0,56 \cdot 10^{-3} L$$

15 задача

Задача №15

Найти постоянную распространения $\tilde{h}_{00}$ основной TEM_{00}-моды открытой линии передачи. Заданы расстояние $L = 2F$ между линзами, отношение $L/\lambda = 10^6$ этого расстояния к длине волны распространяющегося на этой моде излучения, а так же коэффициент пропускания по полю $t < 1$ плоскопараллельной пластинки.



<u>Решение</u>

$$g = 1 - \frac{L}{2F} = 0; \quad \arccos g = \frac{\pi}{2}$$

$$e^{-i\tilde{h}_{00}L} = e^{-ikL}\,\tilde{\rho}_{00}\tilde{t} = e^{-ikL}\, e^{i\arccos g}\, e^{i\varphi_t}|t|$$ – полное изменение фазы на периоде

$$h'_{00}L = kL - \arccos g - \varphi_t = kL - \frac{\pi}{2} - \varphi_t$$

$$h'_{00} = k - \frac{1}{L}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_t\right)$$

$$e^{-h''_{00}L} = |t| \Rightarrow h''_{00} = -\frac{1}{L}\ln|t|$$

$$\tilde{h}_{00} = h'_{00} - i\,h''_{00}$$

Пусть $\varphi_t = 0$

$$h'_{00} = \frac{2\pi}{\lambda} - \frac{\pi}{2L} = \frac{2\pi L}{\lambda}\frac{1}{L} - \frac{\pi}{2L} = \frac{2\pi\cdot 10^6}{L} - \frac{\pi}{2L} = \frac{1}{L}\left(2\pi\cdot 10^6 - \frac{\pi}{2}\right) \approx$$

$$\approx \frac{6\cdot 10^6}{L}$$

$$\tilde{h}_{00} = \frac{6\cdot 10^6}{L} + i\,\frac{\ln|t|}{L}$$

16 задача

17 задача

Задача № 17

Найти параметры фокусировки и исследовать области устойчивости открытого резонатора в зависимости от соотношения длины L и радиуса кривизны R

$$\left(\overset{R}{\longleftarrow} L \longrightarrow\right)^{R}$$

Решение

$$\hat{T}_{\frac{n}{2F}}\hat{G}_{\frac{L}{n}}\hat{T}_{\frac{n}{F}}\hat{G}_{\frac{L}{n}}\hat{T}_{\frac{n}{2F}} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{n}{2F} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{n} & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & -\frac{n}{F} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L}{n} & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & -\frac{n}{2F} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

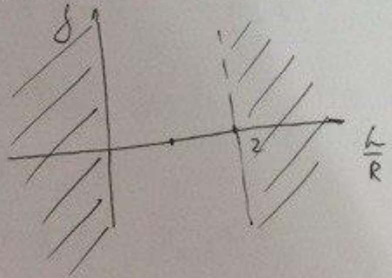
$$= \begin{vmatrix} 2g^2-1 & \frac{n}{L}2g(g^2-1) \\ 2g\frac{L}{n} & 2g^2-1 \end{vmatrix}$$

$$g = 1-\frac{L}{R}$$

$$g = 2\left(1-\frac{L}{R}\right)^2-1$$

$$0 \le \left[1-\frac{L}{R}\right]^2 \le 1$$

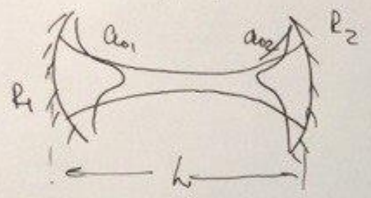
$$1-\frac{L}{R} = \pm 1$$



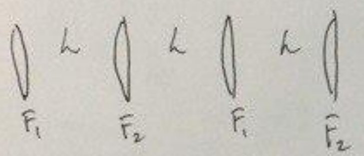
18 задача

Задача № 18

Найти параметры фокусировки и исследовать области устойчивости открытого резонатора, сферические зеркала которого имеют разные радиусы кривизны $R_{1,2}$



Решение



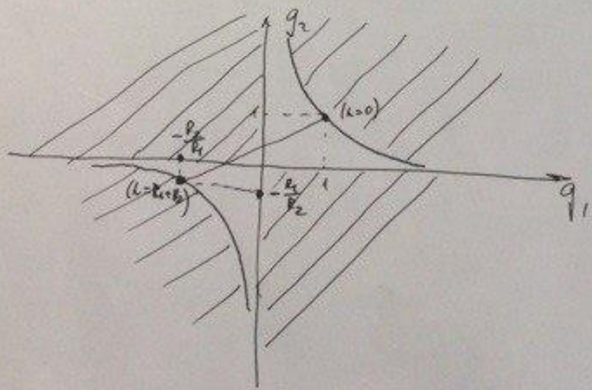
$$\hat{T}_{\frac{n}{2F_1}}\hat{G}_{\frac{L}{n}}\hat{T}_{\frac{n}{F_2}}\hat{G}_{\frac{L}{n}}\hat{T}_{\frac{n}{2F_1}} = \begin{vmatrix}1 & -\frac{n}{2F_1}\\ 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{L}{n} & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -\frac{n}{F_2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{L}{n} & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & -\frac{n}{2F_1}\\ 0 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}2g_1g_2-1 & \frac{n}{L}2g_1(g_1g_2-1)\\ 2g_2\frac{L}{n} & 2g_1g_2-1\end{vmatrix}$$

$$g = 2g_1g_2-1, \quad g_{1,2} = 1-\frac{L}{R_{1,2}}$$

$$|g|<1$$

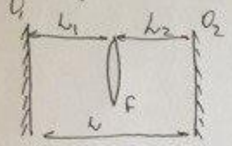
$$0 < \left(1-\frac{L}{R_1}\right)\left(1-\frac{L}{R_2}\right) < 1$$



19 задача

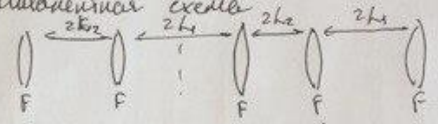
Задача № 19

Найти параметры фокусировки и исследовать области устойчивости открытого резонатора, имеющего два плоских зеркала ($R_{1,2}\to\infty$) и линзу на оси симметрии



Решение

Эквивалентная схема

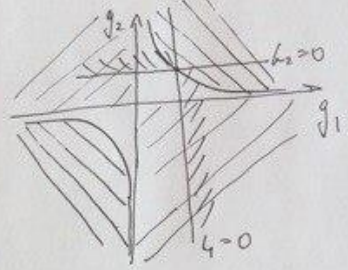


$$\hat{G}_{\frac{L_1}{n}}\ \hat{T}_{\frac{n}{F}}\ \hat{G}_{\frac{L_2}{n}}\ \hat{T}_{\frac{n}{F}}\ \hat{G}_{\frac{L_1}{n}} = \begin{vmatrix} 2g_1g_2-1 & -\left(\frac{n}{F}\right)2g_2 \\ 2g_1(L_1g_2+L_2)/n & 2g_1g_2-1 \end{vmatrix}$$

$$g = 2g_1g_2-1 = 2\left[\left(1-\frac{L_1}{F}\right)\left(1-\frac{L_2}{F}\right)\right]-1$$

$$|g|<1$$

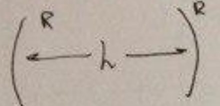
$$0\le\left[\left(1-\frac{L}{R_1}\right)\left(1-\frac{L}{R_2}\right)\right]\le 1$$



20 задача

Задача № 20

Найти в приближении геометрической оптики комплексную частоту $\tilde{\omega}_{00q}$ и добротность Q_{00q} мод TEM_{00q} открытого резонатора с плоскими зеркалами ($R=\infty$), пользуясь известными коэффициентами отражения $re^{i\varphi}$ зеркал, длину волны λ и размер резонатора. Зная амплитуду поля $\tilde{E}_0$ на зеркале в сечении $z=0$, найти распределение плотности запасенной энергии и мощность, излучаемую через единичное сечение площади плоского зеркала.



Решение

$$g = 1 - \frac{L}{R} = 1; \quad \arccos 1 = 0$$

$$\tilde{P}_{mn} = e^{-i2\tilde{k}_{mnq}L}\,\tilde{r}^2 = e^{-i2\pi q}$$

$$\tilde{P}_{mn} = e^{i\arccos g(m+n+1)}$$

$$-i2k'_{mnq}L = -i2\pi q - i\arccos g(m+n+1) - i2\varphi$$

$$\cdot)\cdot 2k'_{mnq}L = 2\pi q + \arccos g\,(m+n+1) + 2\varphi$$

$$m=n=0; \quad \tilde{k}_{00q} = k'_{00q} - ik''_{00q}$$

$$2k'L = 2\pi q + 2\varphi \rightarrow k' = \frac{\pi q + \varphi}{L} \qquad \text{пусть } \varphi = 0: \ k' = \frac{\pi q}{L}$$

$$e^{2k''L}\,\tilde{r}^2 = 1$$

$$2k''L = \ln\frac{1}{r^2}$$

$$k'' = \frac{\ln\frac{1}{r^2}}{2L}$$

$$\omega' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\frac{\pi q}{L} \qquad \omega'' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\frac{\ln\frac{1}{r^2}}{2L}$$

$$Q = \frac{\omega'}{2\omega''} = \frac{\pi q\cdot 2L}{L\cdot 2\ln\frac{1}{r^2}} = \frac{\pi q}{\ln\frac{1}{r^2}}$$

$$\tilde{E}(z) = \tilde{E}_0\left[\left(1-\frac{z}{2F}\right) - i\frac{z}{ka_0^2}\right]^{-1} e^{-\frac{r_\perp^2}{2a^2(z)}}\, e^{+ik\frac{r_\perp^2}{2R(z)}}$$

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi}|\tilde{E}|^2$$

$$P = \frac{c}{8\pi}|\tilde{E}_0|^2\left[\left(1-\frac{z}{2F}\right)^2 + \left(\frac{z}{ka_0^2}\right)^2\right]^{-1}\int_0 r_\perp e^{-\frac{r_\perp^2}{a^2(z)}}\,dr_\perp\cdot 2\pi$$