чем. влад. Потемкин

1

Дифференциальные ур-ия.

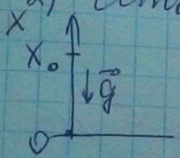
Лерман „Диф-ые ур-ия“ 2016.

1) $\frac{dy}{dx} = f(x)$

Если $f(x)$, например, непрерывна на пр-ке, то $dy = f(x)\,dx$

$y = \int f(x)\,dx + C$

2) Есть м.т. с $m = 1$.



$a = -g$ $\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -g.$

мы можем дважды проинтегрировать, получим:

$\frac{dx}{dt} = -gt + C_1$. $\qquad x = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$.

$t = t_0 = 0$ (пусть)

$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \equiv v_0 = C_1$

$x\big|_{t=0} \equiv x_0 = C_2$

$x = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0$

3). $y' + \frac{y}{x^2} = x$.

$\int$ от y' и x можно вычислить, а от $\frac{y}{x^2}$ нельзя, поэтому чтобы решить нужны спец. методы.

(2) Если в ур-ие входит незав-ая переменная x, y и производные (y, y') то такое ур-ие наз-ся ~~порядок~~ обыкновенным. Обобщением явл-ся система таких ур-ий (от одной переменной)

Пример: $y'' + \alpha(1-\beta y)y' + w^2 y = 0$

Также встречаются ур-ия в частных пр-ых. В них имеются несколько незав перем-ых и ф-ция по $x_1, \dots x_m, y, y_{x_1}, \dots y_{x_m}, \dots y_{x_1}^{(n_1)}, \dots y_{x_m}^{(n_m)}$

Примеры: 1) $u_t = a^2 u_{xx}$ — ур-ие теплопров-ти

*вторая пр-ая по x.

2) $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ описывает волны на повер-ти жидкости. Решение ур-ия наз-ся солитоновой уедин. волной

3) $\frac{\partial}{\partial x}(u_t + 6uu_x + u_{xxx}) = u_{yy}$ — ур-ие Шредингера.

4) $i\hbar \Psi_t = -\frac{\hbar}{2m}\Psi_{xx} + U(x,t)\Psi$

$\boxed{\text{Диф. ур-ие}}$ —

Пусть дана $F(x, y, z, \dots z_n)$ определенная в некот. обл-ти пр-ва размерности n+2 $(D \subset \mathbb{R}^{n+2})$

Предполагаем, что функция имеет непрерыв. част. пр-ые n порядка (она достаточно гладкая)

Опр. $F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0$ (*)

Это ур-ие наз-ся обыкновенным дифф-ным ур-ием, а число n (наивысший порядок пр-ой) наз-ся порядком этого дифф-ого ур-ия

Опр. Решением д/у * наз-ся непрерывно дифф-ая n раз ф-ия $y(x)$, определенная вместе со своими производными до порядка n включительно на $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (некоторый интервал), удовлетворяющая условиям:

1) $\forall\, x \in (a, b)$ набор $(x, y(x), y'(x) \dots, y^{(n)}(x)) \in D$

2) при подстановке $y(x)$ в * для $\forall\, x\ (a, b)$ получается тождество

$$F(x, y(x), y'(x) \dots y^{(n)}(x)) = 0$$

Гр-к ф-ии $y = y(x)$ наз-ся интегральной кривой д/у.

(Н) $\Phi(x,y)=0$ (как правило многозначн. ф-ии) — неявный способ задания ф-ии

Ур-ие $\Phi(x,y)=0$ (**) наз-ся интегралом д/у *, если каждая ф-ия $y(x)$, которая получается из **, имеющая произв-ые до порядка n включительно явл-ся решением ур-ия *

Задача Коши

Решения д/у зависят от произв. постоянных.

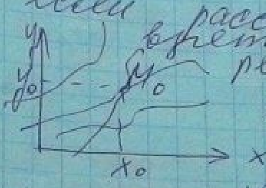
При некотором $x=x_0$ опр-ся зн-ия ф-ии $y(x_0)=y_0$ и ее пр-ых $y'(x_0)=y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ (3)

$y^{(n)}|_{y=y_0}$ опр-ть (сразу) нельзя.

Опр. Зад. К. состоит в том, что нужно найти решение д/у *, удовлетворяющее нач. условиям (3), где в правой части стоят некоторые числа.

Если эта задача для любого набора н. у. имеет единств. решение, то говорят, что д/у * обладает св-вом единственности.

Геом-ки это означает следующее:

если рассмотреть как-то ху,


взять точку $M_0(x_0, y_0)$ 5
решить задачу К,
значит найти
интеграл. кривую,
кот. проходит
через M_0 с дополн.
усл-ями y' - tg угла
наклона, y'' - кривизна.

Если имеет вид $F(x, y, y')=0$,
то достаточно задать
точку (x_0, y_0), то решить
з. К значит найти инт.
кривую, пр-ую через нее.

Опр. $y=\varphi(x, C_1 \dots C_n)$, (4) где
C - произвольные const будем
называть общим решением
д/у *, если путем вы-
бора этих const можно
получить решение удов-
летворяющее любым н.у.
(для извест. обл-ти D)

Опр. решение д/у * наз-ся
частным если оно
получается из общего
решения (4) при некото-
ром выборе постоянных
$C_1, \dots C_n$.

Геометрически общее
решение представляет
семейство кривых (зави-
сящих от $C_1 \dots C_n$), а
частное - конкрет. кривая
или подмножество этого
семейства.

6 Пусть имеется $y=\varphi(x, C_1 \dots C_n)$.

$x = x_0$, то ~~$y(x_0) = y_0 = \varphi($~~

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1 \dots C_n) \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1 \dots C_n) \\ \dots \\ y_0^{(n+1)} = \varphi^{(n+1)}(x_0, C_1 \dots C_n) \end{cases}$$

можем выразить $C_1, \dots C_n$

Пример: $y'''=6x$, $x_0=0$, $y_0=0$,

$y_0'=1$, $y_0''=-2$.

$$\begin{cases} y''=3x^2+C_1 \\ y'=x^3+C_1x+C_2 \\ y=\frac{x^4}{4}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3 \end{cases}$$

$C_3=0$. $C_1=-2$.

$C_2=1$

$y=\frac{x^4}{4}-x^2+x$ — частное решение.

Опр Соотношение

$\Phi(x,y,C_1 \dots C_n)=0$ (5) наз-ся общим интегралом Ж, если выпол-ся усл-ия:

1) для $\forall$ набора $C_1, \dots C_n$ кривая, кот. опр-ся ур-ем (5), явл-ся интегр. кривой

2) Среди семейства кривых (5) найдется интегр. кривая, удовл-ие любым н. у.

$*$ и (5) связаны однозначно

Можно рассмотреть обратную задачу. (если дано семейство кривых).

Пусть имеется $\varphi(x, y, c_1 \ldots c_n) = 0$ (6) — сем-во кривых.

Мы можем дифф-ть по x

$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot y'$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n} = 0$$

Система из $n+1$ ур-ия (6) и набор (7) р.

Если решить, получ-ся д/у типа $*$.

Пример: есть сем-во кривых проходящих через $(0, 0)$

$$\begin{cases} y = cx \\ y' = c \end{cases} \Rightarrow y = y'x \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \text{ (д/у первого пор-ка)}$$

общее реш-ие которого — семейство кривых, проход-их через $(0, 0)$

Д/з. $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ д/у третьего порядка

(8) 4 ур-ия, избав-ся от α, β, γ, останется д/у 5-и

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_1x+a_2y+a_0=0.$$

6 пр-в т к мы все со-мн можем поделить на один и останется 5 пар-ов

$\Rightarrow$ д/у 5-го порядка

16.02.17.

$$F(x,y,y',\ldots y^{(n)})=0$$

$F(x,y,z\ldots z_n)$ $\quad z_n=f(x,y,z_1\ldots z_{n-1})$

$F(x,y,z_1\ldots z_n)=0 \quad F_{z_n}\neq 0.$

тогда можно выразить z_n так (без док-ва)

$y^{(n)}=f(x,y',\ldots y^{n-1})$ – д/у, разрешенное отн-но старшей произ-ой.

$y'=f(x,y)$ (1)

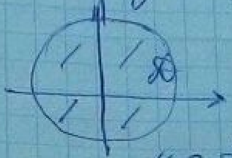
$f(x,y)$ непр в $D\in\mathbb{R}^2$ (возможно наложение других ус-ий)

Можно рассмотреть (1) с геом. точки зрения.

Геом. интерпретация ур (1)

Если есть реш-ие у-ия то ур-ие представляет кривую $\in D$ такую что в каждой точке

$k = y'(x) = f(x,y)$ — углов. коэфф. касат.



с геом. точки зр-ия

Задача: найти кривую в обл D, которая проходит через каждую точку с угл. коэфф, определенным полем направлений (оно опр-ся $f(x,y)$).

Для анализа решения удобно провести кривые, для которых $k = const$, они наз-ся изоклинами

Задавая разные зн-ия k можно представить поведение решения.

Пример $y' = \sqrt{x^2+y^2}$

$k = y'$ $\quad k^2 = x^2+y^2 \quad k \geq 0$

$(y = \sqrt{k^2-x^2})$ окр-ть с $r = k$

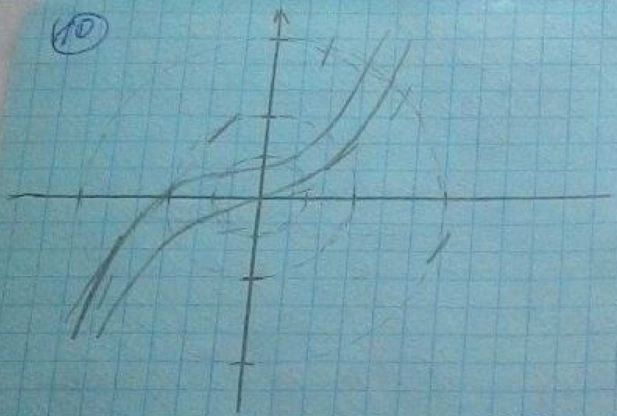
$k=0: \quad x=y=0$

$k=\frac{1}{2}: \quad x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$k=1: \quad x^2+y^2=1$

$k=2: \quad x^2+y^2=4.$

10



$x_0 = y_0 = 0$ — нач. точка.

2) $y' = -\frac{x}{y}$ $\quad k = -\frac{x}{y}$ Доделать!

Теорема существ-ия единственности решения ур-ия (1)

Пусть есть $y' = f(x, y)$ и $y(x_0) = y_0$

(Геометрически это означает, что нужно найти интегр. кривую, проходящую через $M_0(x_0, y_0)$.)

Т. Если в некоторой $U(M_0)$ $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$ выполнены следующие усл-ия:

1) $f(x, y)$ непрер. как ф-ия двух переменных

2) а) $f'_y(x,y)$ – непрерывна в D (11)

б) $f'_y(x,y)$ – ограничена

в) усл-ие Липшица (потом будет в док-ве)

это усл-ие более слабое

Тогда $\exists$ единств-ое реш-ие ур-ия (1), опред-ое на некотором отрезке (возможно меньшем) $|x-x_0| \le h$ удовлетв-ее нач. усл-ию $y(x_0)=y_0$.

*если вып-но в, то большее мн-во д/у подходит.

Примеры 1) $y'=|y|$

$|y|$ – непрерывна как $f(x,y)$.

$y>0$ $y'=1$

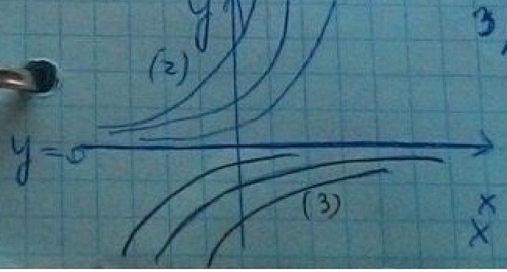
$y<0$ $y'=-1$ $\Rightarrow$ $f'(x,y)$ не непр.

но усл-ие б и в вып-ся.

т.е., $y'=|y|$ имеет ед. реш-ие

1) $y=0$ – решение

2) $y>0$. $y'=y$. $y=y_0e^{x-x_0}$



3) $y<0$

$y'=-y$

$y_0=y_0e^{-(x-x_0)}$

$x\to+\infty$ $y\to 0$

$x\to-\infty$ $y\to-\infty$

2) $y' = |y|^{1/2}$ $\qquad y' \geq 0$

1) $y = 0$ — решение

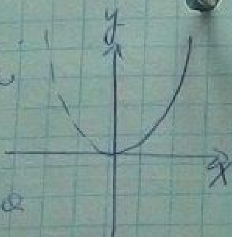
2) $y > 0$ $\qquad y' = y^{\frac{1}{2}}$

$\exists y' \Rightarrow \exists dy = y'(x)dx = f(x,y)dx$

$\cancel{\frac{dy}{y(x)}} = dx \qquad \frac{dy}{f(x,y)} = dx$

$\frac{dy}{y^{1/2}(x)} = dx \Rightarrow$ инвариант-ть $\qquad \frac{dy}{y^{1/2}} = dx$

$C + x = \int \frac{dy}{y^{1/2}} = 2y^{\frac{1}{2}}$



$y = \frac{(x+c)^2}{4} \qquad 4y_0 = (x_0 + c)^2$

$C = -x_0 + 2\sqrt{y_0}$

$y = \frac{(x - x_0 + 2\sqrt{y_0})^2}{4}$ — парабола

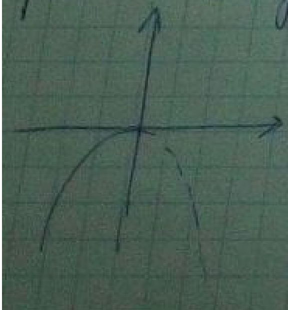
но рассматр. только ту, где $y' \geq 0$

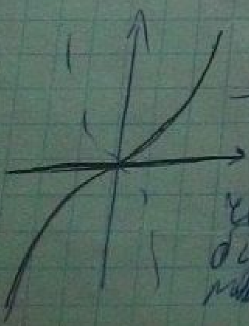
то есть правую ($k \geq 0$)

3) $y < 0$.

$y' = (-y)^{\frac{1}{2}}$. $\qquad y \leq 0$.

реш-ие: $y = -\frac{(x - x_0 - 2\sqrt{-y_0})^2}{4}$ прав. ч-ть

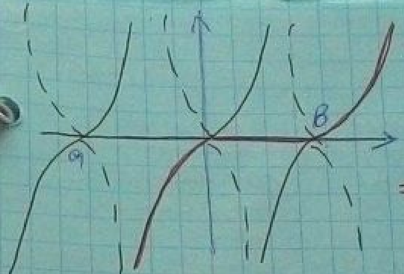




→ нарушается $\exists$ единств.

через $\forall$ т. оси x будет проходить мн-во решений.

(13)



← особое решение

$x_0 = a$ $y_0 = 0$

$y_0 = b.$ $y_0 = 0.$

=> нарушения $a, 0, b$

Симметричная форма записи д/у первого пор-ка.

$y' = f(x,y)$ x – незав, y – завис, но иногда удобно рассм. наоборот, тогда $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ => $x' = \frac{1}{f(x,y)}$, но по-прежнему x, y – неравноправн. Но можно сделать, чтобы они были равноправны. Тогда какую возьмем будет зависеть от нас

$y = y(x)$ $dy = y'(x)dx.$

$dy(x) = y'(x)dx = f(x, y(x))dx$

~~во~~ для $\forall$ т. $x \in (a, b)$, в котором вып-ся ~~лежат~~ реш-ие $y(x)$.

Умножим на некот. $(-Q(x, y))$

$P(x, y(x))dx + Q(x, y(x))dy(x) = 0$ исп. инв-ть перв. диф.

$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$ (2)

симм! форма зап-си д/у. п.п.

14

$f(x,y) = \varphi(x)\,\psi(y)$

$y' = \varphi(x)\,\psi(y)$ (3) $\rightarrow \dfrac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx$

Частный случай р/у ч. п.

ур-ие (3) наз-ся ур-ием с разделенными переменными. особенность ее в том, что правая часть представляет собой пр-ие ф-ии от x и ф-ии от y.

$y' = x \cdot y$, $y' = \frac{y}{x}$ — ур-ие (3).

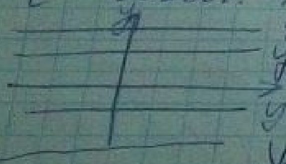
$y' = x + y$ — не явл. ур-ием (3)

$y' = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ — явл. (3).

рассмотрим $\psi(y) = 0$

$y_1, y_2 \ldots y_n$ — реш-ия (ур. (3))

с числ. т. е. это ~~верт.~~ гориз. прямые.



рассмотрим

$y_{n-1} < y < y_n$

$\psi(y) \neq 0$

$y'(x) = \varphi(x)\,\psi(y(x)) \quad \forall\, x \in (a,b)$

$d\,y(x) = \varphi(x)\,\psi(y(x))\,dx$

$\dfrac{d\,y(x)}{\psi(y(x))} = \varphi(x)\,dx$

$\dfrac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx.$

$\Psi(y) = \Phi(x) + C$. 15

реш-ие в виде общего интеграла

$\Psi'(y) = \frac{1}{\psi(y)}$ поскольку

предполагаем, что $\psi(y) = 0$

то $\Psi'(y) = \frac{1}{\psi(y)} \neq 0$. в (y_{n-1}, y_n)

$y = y(x, C)$

$F(x, y, C) = 0$ $\qquad$ $F(x, y) = C$ — опред-и общего интег.

Пример. $x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$. — с разделяющими-мися

$$\frac{x\,dx}{x^2-1} + \frac{y\,dy}{y^2-1} = 0$$ — с разделенными перем-ми.

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\int \frac{dy^2}{y^2-1}$$

$$\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln|y^2-1| + C = 0.$$

$y^2 = 1$ $\qquad$ $y = \pm 1$. — реш-ия.

~~[illegible]~~

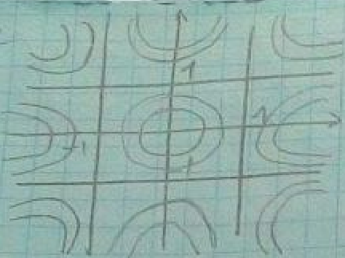
$x^2 = 1$ $\qquad$ $x = \pm 1$ — верт. прямые.

если рассмотр. с геом. т. з., то если с т. зрения единств-сти и еще чего-то, то эти решения игнорируются.

$$\ln|x^2-1| + \ln|y^2-1| = \ln C.$$

$(x^2-1)(y^2-1)=c$ 16

интегр. кривых



Однородные ур-ия.

$f(x,y)$ однородная степени α, если $\forall\, t>0$ $f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y)$.

x, y, $x+2y$ − однор. степени 1

$x+y-1$ − не одн.

$x^2-xy+2y^2$ − однор. ст. 2

$x^2-xy+2y^2+x$ − неод.

Опр $y'=f(x,y)$ д/у. и.п. − однородное, если $f(x,y)$ − однород. ст. 0

$f(tx,ty)=f(x,y)$.

если $t=\frac{1}{x}$ $f(x,y)=f(1,\frac{y}{x})=\varphi(\frac{y}{x})$

зависит только от $\frac{y}{x}$, тогда

$y'=\varphi(\frac{y}{x})$ (н) − однор д/у п.п.

$$y'=\frac{x+y}{x-y}=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$$

$z = \frac{y}{x}$ (5) $\quad y = xz$ 17

$z + xz' = \varphi(z)$

$xz' = \varphi(z) - z$ получим ур-ие с раздел. перем. ами.

$y'''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0$

Соотношение Эйлера 21.02.2017

выражение $f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x,y)$ дифф-ем по t, затем полагаем, что $t=1$.

получим $\boxed{x f'_x + y f'_y = \alpha f}$

$y' = f(x,y) \qquad t = \frac{1}{x} \qquad f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x,y)$

(1) $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ – однородное (ф-ия зависит от отнош).

Замена $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz$.

$z + xz' = \varphi(z) \qquad xz' = \varphi(z) - z$

а) если $\varphi(z) - z = 0$, то $xz' = 0$

$z' = 0 \Rightarrow z = const$

б) если $\varphi(z) - z = 0$ в $z_1, \dots z_n$,

то это решение

в) $\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \qquad \Phi(z) = \ln x + C$

Пример: $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ – однородное ($: x^2$)

(18)

Замена $\frac{y}{x} = z$ (2).

$z + xz' = \frac{2z}{1-z^2}$

~~$z' = \frac{2z}{1-z^2}$~~

$\frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{z^2+1}$

$\frac{dx}{x} + \frac{z^2-1}{z(z^2+1)}dz = 0$

$\ln|x| + \int\left(\frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{z^2+1}\right)dz = \ln|C|$

$\frac{x(z^2+1)}{z} = C$ $\quad z = \frac{y}{x}$ $\quad x^2+y^2 = Cy$

(сем-во окр-ей, у котор. центр смещен по оси y).

$x^2 - y^2 = 0$ — пара прямых

$y = \pm x$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ $\quad x = y = 0$.

Замечание. Иногда исход. ур-ие не явл. сразу однородным, но его можно свести к однородному, перейдя к $y = z^\alpha$, где α мы хотим найти, если все (3) слагаемые имеют одинак. степень в след. смысле: пусть $\deg x = 1$, $\deg y = \alpha$, $\deg y' = \alpha - 1$ и получаем для z однор. ур-ие

Пример: $8y\frac{dy}{dx} - 18xy + 4x^3 = 0$.

степень y — (α)
степень $\frac{dy}{dx}$ — $(\alpha-1)$

$\alpha+\alpha-1=1+\alpha=3$ решение:
$\alpha=2$
$y=z^2$
$9z^2\frac{2z\,dz}{dx}-18xz^2+4x^3=0$
(замена(3))
$(3y-2x^2)^2=C(3y-x^2)$
Общее решение удовлетв-ся любому нач. решению.

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

если $c_1\neq0$ или $c_2\neq0$ то это не будет ур-ние вид (4).

Пусть $x=u+\alpha$ $dx=du$
$y=v+\beta$ $dy=dv$ $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$

α,β - неизв. константы, их нужно выбрать подходящим образом (чтобы убрать c_1 и c_2, чтобы ур-ие стало одноp.)

$$(*)\begin{cases}(a_1\alpha+b_1\beta)+c_1=0\\(a_2\alpha+b_2\beta)+c_2=0\end{cases}\qquad\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\neq0,\ (**)$$

то система имеет един решение
если $=0$, не имеет или беск. много

то есть прямые совпадают 20

X (1 реш) // (0 решений)

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$$

$$a_2 = \lambda a_1 \qquad b_2 = \lambda b_1$$

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right)$$

$$z = a_1x+b_1y$$

$$z' = a_1 + b_1y'$$

$\frac{z'}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} = \tilde{f}(z)$. это ур-ие интегрир-ся как ур-ие с разд. перем.

если $\Delta \neq 0$ — ед. реш-ие

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)$$

$$z = \frac{v}{u}$$

Пример $y' = \dfrac{x+2y-3}{2x-2}$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3 = 0 \\ 2\alpha - 2 = 0 \end{cases} \qquad \beta = 1, \quad \alpha = 1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u+2v}{2u} = \frac{1}{2} + \frac{v}{u} \qquad z = \frac{v}{u}$$

$$\cancel{z} + uz' = \frac{1}{2} + \cancel{z}$$ (27)

$$z = -\frac{1}{2}\ln|u| + C$$

Линейные ур-ия

$Ay' + By + C = 0$ A, B, C — непрер. ф-ии от x

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (6)$$

Полное наз-ие этого ур-ия — линейное неоднородное ($Q(x) \not\equiv 0$)

Если же $Q(x) = 0$, то будет линейное однородное ур-ие, но тогда однородное имеет совсем другой смысл по сравнению с предыдущ.

$y' + P(x)y = 0$ (7) — оно явл. с разд. перем. Мы можем проинтегр.

$y = 0$ — решение

ранее рассмотр. верх (ниж) получилось

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|$$

$$y = Ce^{-\int P dx} \quad (C \neq 0) \quad (8)$$

— общее решение однор. ур-ия

Для решения (6) использ-ся метод вариации постоянной. 22

$$y = C(x)e^{-\int P dx} \quad (8).$$

C мы рассм. как ф-цию от x

Чтобы её найти нужно подставить y в ур-ие (6).

$\cancel{y' = PC(x)e}$

$$C' e^{-\int P dx} - PC(x)e^{-\int P dx} + PC(x)e^{-\int P dx} = Q(x).$$

$$C' = Q(x)e^{\int P dx}$$

$$C(x) = \int Q e^{\int P dx} + \tilde{C}$$

$$y = e^{-\int P dx}\left(\int Q e^{\int P dx} dx + \tilde{C}\right)$$

нужно сделать 2 интегр-ия

$$\underbrace{y_{он}}_{} = \underbrace{y_{оо}}_{\text{общ реш}} + \underbrace{y_ч}_{\text{част. реш.}} \qquad y_ч = e^{-\int P dx}\int Q e^{\int P dx} dx$$

Пусть изв. част. реш. ур 6 y_1.

$$y' + Py = Q.$$

реш ур 6 можно свести к реш. неод. реш. 7.

$$y_1' + Py_1 = Q$$

$$y' - y_1' + Py - Py_1 = 0$$

(23) $(y-y_1)' + P(y-y_1) = 0$ 1 интегр-ие.
Если известно 2 реш-ия.

Пусть y_1, y_2 — част. реш-ия

$y = f(x) + Cg(x)$

$y_1 = f(x) + C_1 g(x)$

$y_2 = f(x) + C_2 g(x)$

$y_2 - y_1 = g(x)(C_2 - C_1)$ можно провести аналогично с прямой (через 2 точки узнаем другие).

$y - y_1 = g(x)(C - C_1)$

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{C-C_1}{C_2-C_1}$$

$y = y_1 + \tilde{C}(y_2 - y_1)$ $\tilde{C}$ — произв. постоянная.

Уравнение Бернулли

$y' + p(x)y = Q(x)y^{\alpha}$ (11)

$\alpha \neq 0; 1$.

$y^{-\alpha}y' + Py^{-\alpha+1} = Q \quad \Big| \cdot (1-\alpha)$

$(y^{-\alpha+1})' + (1-\alpha)P y^{-\alpha+1} = (1-\alpha)Q$

$z = y^{-\alpha+1}$ (12)

$\alpha > 0$. $y = 0$.

$xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

(24) 02.03.2017

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

$$y' + P(x)y = Q(x)\,y^{\alpha}$$ — сделать замена реш. ур-ие Берн.

реш (1) $y = u(x)v(x)$

$$u'v + uv' + Puv = Q \qquad u \neq 0$$

$$u(v' + Pv) = 0$$ (требуем, чтобы пара слагаемых исчезла.)

$$v' + Pv = 0.$$

$$\frac{dv}{v} = -Pdx$$ (C не добавляем, нас интересует одна ф-ция)

$$\ln|v| = -\int Pdx$$

$$u' e^{-\int Pdx} = Q$$

$$u' = Q e^{\int Pdx} \Rightarrow u = \int Q e^{\int Pdx} dx + C$$

$$y = e^{-\int Pdx}\left(\int Q e^{\int Pdx} dx + C\right)$$

аналогично, ур-ие Бернулли.

это второй способ решения

$$y = C\varphi(x) + \psi(x)$$

В данном случае v играет роль $\varphi(x)$, а $e^{-\int Pdx}$ играет роль $\psi(x)$.

Ур-ие Риккати

$$\boxed{y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)} \quad (1)$$

(25)

$P(x), Q(x), R(x)$ — непр-ные в D

$P \equiv 0$: $Q(x)y + R(x) = y'$ (линейное)

знаем как решать

$R \equiv 0$: $y' = Py^2 + Qy$ (ур-ие Бернулли)

$\alpha = 2$

это были тривиальные случаи

общий случай:

1) $x = x(x_1)$ — замена, также $\exists$ обрат. ф-ия $x_1 = x_1(x)$

$$\frac{d}{dx} = \frac{dx_1}{dx} \cdot \frac{d}{dx_1} \qquad \frac{dx_1}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dx_1}}$$

Подставим в исходное.

$$\frac{dy}{dx_1} \cdot \frac{1}{x'(x_1)} = P(x(x_1))y^2 + Q(x(x_1))y + R(x(x_1))$$

$$\frac{dy}{dx_1} = \hat{P}(x_1)y^2 + \hat{Q}(x_1)y + \hat{R}(x_1)$$

2) $y = \dfrac{\alpha y_1 + \beta}{\gamma y_1 + \delta}$ $\delta, \alpha, \beta, \gamma$ — ф-ии от x

$\left(P(x) = e^x \quad x = \ln x_1 \quad \hat{P}(x_1) = x_1 \right)$

где $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

Для проверки нужно взять произ-ую и подставить в ур-ие 1

В результате замены 2) получится ур-ие типа 1, но

(26) только с преобразованиями Q, R, P

Пусть $\beta = \gamma = 0$, тогда замена: $y = a(x)z$, чтобы сделать коэфф-т при y^2 $P = \pm 1$.

$$a'z + az' = Pa^2z^2 + Qaz + R \;\; | : a \neq 0$$

$$z' = Paz^2 + Qz - \frac{a'}{a}z + \frac{R}{a}$$

$a = \pm \frac{1}{P}$ $\quad z' = \pm z^2 + \hat{Q}z + \hat{R}$

$y = u + b(x)$ поможет убрать слагаемое с z

$$u' + b' = u^2 + 2bu + b^2 + Qu + Qb + R$$

$2b + Q = 0 \qquad b = -\frac{Q}{2}$

$y' = \pm y^2 + R(x)$ (2) — каноническое ур-ие Риккати

ур-ие (1) сводится к (2)

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ Если известно одно частное решение ур-ие Риккати (1), то общее решение получается двумя квадратурами, то есть двумя последовательными интегр-иями.

Док-во: пусть y_1 — известное решение ур-ия (1).

$y = z + y_1$ (перейдем к новой ф-ии z)

27

$z'+y_1' = Pz^2 + 2y_1 zP + \underline{Py_1^2} + Qz + \underline{Qy_1 + R}$

поскольку y_1 – част. реш-ие, подчеркнутые слагаемые дают 0.

$z' = Pz^2 + (2y_1P+Q)z$ (*) (ур-ие Берн)

$z = \frac{1}{u}$, $u = \frac{1}{y-y_1}$ – замена, то реш и получим линейное ур-ие

$u' + (2Py_1+Q)u = -P$ (**)

(проинтегрировали 2 раза).

$u = C\varphi(x)+\psi(x)$ – общее решение

$\frac{1}{y-y_1} = C\varphi(x)+\psi(x)$

$y = \frac{Cy_1\varphi + y_1\psi + 1}{C\varphi+\psi}$

Утверд: общее реш-ие ур-ия Риккати явл-ся дробно-линейная ф-ия от С верно и обратное: если есть ф-ия (др/лин от С) то она явл-ся ур-ем Рик.

Док-во: дано $y = \frac{C\varphi+\psi}{C\xi+\eta}$ (φ, ψ, ξ, η от x)

Нужно выразить С через φ, ψ, ξ, η

28 $c = \dfrac{\psi - y\eta}{y\xi - \varphi}$

продифф-ть по x.

$c y\xi - c\varphi = \psi - y\eta$

$y'(\varphi\eta - \psi\xi) + y^2(\ldots) + y(\ldots) + (\ldots) = 0$

$\boxtimes$

Теорема 2. Если известно 2 частных реш-ия ур-ия Рикк., то общее реш-ие наход-ся одной квадратурой.

Док-во: пусть есть y_1, y_2 $\Rightarrow$

$u = \dfrac{1}{y_2 - y_1}$ – извест. реш-ие. (**)

тогда мы знаем одно реш-ие лин. ур-ие, тогда общее решение можно найти одной квадратурой.

Теорема 3. Если известно 3 решения, то общ-ее решение наход-ся без квадратуры

Док-во: y_1, y_2, y_3 – извест.

$\Rightarrow u_1 = \dfrac{1}{y_2 - y_1}$, $u_2 = \dfrac{1}{y_3 - y_1}$ –

извест. реш-ие ** $u = u_1 + C(u_2 - u_1)$

$$y = \frac{1}{y_2 - y_1} + C\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right)$$

(29)

$$\frac{1}{y-y_1} = \frac{1}{y_2-y_1} + C\left(\frac{1}{y_3-y_1} - \frac{1}{y_2-y_1}\right)$$

выразим y, получим решение в виде др лин ф-ии

$$\frac{y-y_2}{y-y_1} : \frac{y_3-y_2}{y_3-y_1} = C$$ (можно и так)

<u>Специальное ур-ие Риккати</u>

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha} \quad (3) \quad a, b, \alpha - const$$

1) если $\alpha = 0$, то справа const.

$\frac{dy}{dx} = b - ay^2$ – ур-ие с разд.

2) $\alpha = -2$: $\frac{dy}{dx} + ay^2 = \frac{b}{x^2}$

степень $x = 1$ ст. $y = \beta$

степень y – $(\beta - 1)$

$\beta - 1 = 2\beta = -2$

есть реш-ие $\beta = -1$.

замена $y = \frac{1}{z}$ $z = \frac{1}{y}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx\, z^2}$$

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{a}{z^2} = \frac{b}{x^2}$$

$$\frac{dz}{dx} - a = -b\left(\frac{z^2}{x^2}\right)$$ – однородное ур-ие

(30) 3) α определяет можем ли мы интегрировать (бесконечно много α.)

$y = u\bar{y} + v$, u, v подберем так, чтобы упростить ур-ие

$$u'\bar{y} + u\bar{y}' + v' + au^2\bar{y}^2 + 2auv\bar{y} + av^2 = bx^{\alpha}$$

подберем u и v так чтобы свободный член не изм-ся, хотим получить ур-ие с функцией α.

пусть $v' + av^2 = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{ax}$

если мы хотим чтобы ур-ие оставалось спец., нужно убрать слагаемое с $\bar{y}$

$$u' + 2auv = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{x^2}$$

$y = \frac{\bar{y}}{x^2} + \frac{1}{ax}$ (подставив u, v)

$$\frac{d\bar{y}}{dx} + \frac{a}{x^2}\bar{y}^2 = bx^{\alpha+2}$$

присутствует $\frac{a}{x^2}$, поэтому пока ~~еще~~ не спец. ур. Рикк.

поэтому замена $\bar{y} = \frac{1}{y_1}$

$$\frac{dy_1}{dx} + bx^{\alpha+2}y_1^2 = \frac{a}{x^2}.$$

31

$$x^{\frac{1}{\alpha+2}} \frac{dy_1}{dx} + b y_1^2 = a x^{-(\alpha+4)}$$

$$x^{\alpha+3} = x_1 \qquad (\alpha+3) x^{\alpha+2} dx = dx_1$$

$$x = x_1^{\frac{1}{\alpha+3}}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{b}{\alpha+3} y_1^2 = \frac{a}{\alpha+3} x_1^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} + a_1 y_1^2 = b_1 x^{\alpha_1}$$

$$a_1 = \frac{b}{\alpha+3}, \quad b_1 = \frac{a}{\alpha+3}$$

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha+4}{\alpha+3} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_1+2} = \frac{1}{2-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}} = \frac{\alpha+3}{\alpha+2}$$

$$\frac{1}{\alpha_1+2} = 1 + \frac{1}{\alpha+2} \quad (***)$$

$$\frac{1}{\alpha_2+2} = \frac{1}{\alpha_1+2} + 1 = \frac{1}{\alpha+2} + 2.$$

если это проделать k раз, где $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\alpha_k+2} = \frac{1}{\alpha+2} + k.$$

если проделать в обратную сторону.

$$\frac{1}{\alpha_{-k}+2} = \frac{1}{\alpha+2} - k.$$

если в результате таких преобр-ний мы придем к $\alpha=0$, $\alpha=-2$, то сможем решить.

32

$\alpha = -2$: $\alpha_1 = -2$.

$\alpha = 0$: $\dfrac{1}{\alpha_k + 2} = k + \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\alpha_k + 2} = k + \dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{1}{\alpha_{-k} + 2} = -k + \dfrac{1}{2}$. где $k = \pm 1, 2, \ldots$

$\alpha = \dfrac{4k}{-2k+1}$ Выписать пок-ли α.

07.03. №17. Ур-ие в полных диф-ах

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (1)$$

P, Q опр-ны, непр-ны

P_y, P_x - непрер в н. обл. D

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

$$Pdx + Qdy \overset{?}{=} dU = U_x dx + U_y dy$$

$P = U_x$, $Q = U_y$. $\quad U_{xy} = U_{yx}$

$$P_y \equiv Q_x \quad (2).$$

Опр. Д.У (1) наз-ся ур-ием в полных диф-ах, если выполняется усл-ие 2 для непр. диф-ых функ. P, Q.

Если U дв-ды диф-ма то как ее найти, зная P, Q (~~вход-т~~) в ур. 1)

Ф-ия U всегда однозначна.

Пример:

$$Pdx + Qdy = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 0$$ (33)

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Проверить усл-ие 2

$$P_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2};\quad P_x = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$P = \frac{y}{x^2+y^2},\quad Q = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Перейти к полярн. коорд.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi & dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi \\ y = r\sin\varphi & dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi \end{cases}$$

$d\varphi = 0$ (проверить) значит $\varphi = const$

она неоднозначна $(\pm 2\pi k)$, $U(x,y)$ не $\exists$

Опр. Область D наз-ся односвязной, если любая непрерывная замкнутая кривая может быть непр-но деформ-на в т. x, принадлежащую D.

сжать γ к точке x

Т.к. в обл-ти D не $\exists$ U, $Pdx + Qdy$ не явл. дифф-лом,

Опр. Д.У $Pdx + Qdy$ с усл-ием (2) наз-ся замкнутым, а если в данной обл-ти $\exists$ ф-ия U, дифф-лом кот.

она явл, то выражение точное

(34)

Для того, чтобы $\exists\, U$, должны выполняться топологические ограничения (связность, неовр-ность) ния обл. Мы не можем сразу утв. что это дифф

Пусть D односвязная, как найти U.

$$\begin{cases} U_x = P(x,y) \\ U_y = Q(x,y) \end{cases}$$

проинтегрируем, например, P по x

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)\,dt + \varphi(y)$$

или const.

задача упростилась, т.к. была $U(x,y)$ двух перем. теперь неизв. $\varphi(y)$ от одной.

$$\cancel{U(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q}$$

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t,y)}{\partial y}\,dt + \varphi'(y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\cancel{\partial X}(t,y)}{\partial t}\,dt + \varphi'(y) =$$

$$= Q(x,y) - Q(x_0,y) + \varphi'(\varphi) \qquad \varphi'(y) = Q(x_0,y)$$

$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \xi)\, d\xi + C$ (35)

Лемма пусть дана ф-ия U, получаемая интегрированием ур-ия (1) в окрестн. обл. D. Рассмотрим кривую, заданную неявно

$U(x, y) = C$ (3) можно получить или $y(x)$ или $x(y)$

определяет некоторую $y(x)$ которая явл-ся решением ДУ (1)

Док-во: $x \in (a, b)$ $U_y \neq 0$ и $\exists\, y(x)$.

диф-ем по x (3) слева и справа

$U_x(x, y(x)) + U_y(x, y(x))\, y'(x) = 0$

$y'(x) = -\dfrac{U_x(x, y(x))}{U_y(x, y(x))}$

подставим это в ур-ие 1

$P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, dy = U_x(x, y(x))\, dx + U_y(x, y(x))\, dy = 0$

доказали, y - реш-ие.

Примеры:

1) $x\,dx + y\,dy = 0$ - явл урием в полн. диф.

2) $x\,dy - y\,dy = 0$ - явл.

3) $y\,dx + x\,dy = 0$ - явл.

4) $y\,dx - x\,dy = 0$

$P_y = 1$, $Q_x = -1$ $\Rightarrow$ не ур-ие в полн. диф

(36) рассмотрим 1 ур-ие

$P = x \quad Q = y$

$$\begin{cases} U_x = x \\ U_y = y \end{cases} \xrightarrow{\text{интегр. по } x} U = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + \varphi(y).$$

↓ диф. по y

$\varphi'(y) = y$ (приравниваем к Q).

$\varphi = \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}$ (x_0, y_0) − $\forall$ из обл. опр.

$U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}$ $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$x^2 + y^2 = C$ − семейство окр-тей и точку при $C = 0$.

интегрирующий множитель

$dx + \frac{y}{x} dy = 0.$ − ур-ие не в полн. дифф-лах. $P_y = 0$, $Q_x \neq 0$.

Пусть дано $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ и $P_y \neq Q_x$.

Опр. Если после умножения ур-ия на некот. ф-цию $\mu(x,y)$ ур-ие станет в полн. дифф-лах, то ф-ия $\mu(x,y)$ наз-ся <u>интегрирующим мн-лем</u>.

$\mu P dx + \mu Q dy = dU$

$\mu P = U_x, \ \mu Q = U_y \quad (4)$

? Всегда ли имеется интегр. мн-ль?

37

$U(x,y)=C$ (из теоремы сущ-ия изв-но, что $\exists$ у (1) имеет такое общ. реш.)

$U_x dx + U_y dy = 0$

$U_x(x,y(x))dx + U_y(x,y(x))y'(x)dx = 0$

$y'(x) = -\dfrac{U_x(x,y(x))}{U_y(x,y(x))}$. $\quad y' = -\dfrac{P}{Q}$ из (1)

Значит $\dfrac{U_x}{P} = \dfrac{U_y}{Q} = \mu(x,y)$

Тогда $U_x = \mu P$, $U_y = \mu Q$

μ – интегр. мн-ль.

Такое ДУ перв. порядка имеет инт. мн-ль $\blacksquare$

? Сколько μ может иметь?

Если $C\mu$ – это тривиальн. случай

Докажем, что $\mu_1 = \varphi(U)\mu$ снова инт. мн-ль $\quad$ (5)

$\mu_1(Pdx + Qdy) = \varphi(U)\mu(Pdx + Qdy) = \varphi(U)(\mu Pdx + Q\mu dy) = \varphi(U)dU = d\Phi(U)$

$\Phi(U) = \int \varphi(U)dU$ $\blacksquare$

μ_1 – инт. мн-ль.

Док-ем теперь, что всякий инт. мн-ль имеет вид (5)

38

$\mu_1 = u\mu$.

μ и ν: $\begin{cases} \mu(Pdx + Qdy) = du \\ \nu(Pdx + Qdy) = dv \end{cases}$

$\mu P = u_x \quad \mu Q = u_y$

$\nu P = v_x \quad \nu Q = v_y$

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{u_x}{v_x} \qquad \frac{\mu}{\nu} = \frac{u_y}{v_y}$$

$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = 0.$$

$u_y \neq 0 \Rightarrow$ между u и v есть функц. зависимость

нулевой якобиан.

$v = \psi(u)$

$\nu(Pdx + Qdy) = \psi(u)du$.

$\nu(Pdx + Qdy) = \psi(u)\mu(Pdx + Qdy)$.

$\nu = \psi(u)\mu$. ∎

Следствие: если известны 2 существенно различных интегр. мн-ля (отношение которых не const), то общее реш-ие ДУ 1 получается без интегр-ия и имеет вид

$\frac{\mu}{\nu} = C$

док-во: если $u(x,y)$ – реш-е то и $\psi(u(x,y))$ – реш-ие

? нахождение инт. мн-ля (39)

брать $u_{xy} = u_{yx}$

от $\mu P = u_x$, $\mu Q = u_y$.

и получить $Q\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - P\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = P_y - Q_x$ (6)

а находим μ :(из ур-ия в част. пр-ых

09.03.2017.

$Pdx + Qdy = 0$. $y' = 0$ $y = C$

$\mu(x,y)$ $z_x = 0$ $z = z(y)$.

$$Q\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - P\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = P_y - Q_x$$

1) $\mu(x)$ $\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$.

пусть правая часть зависит только от x

$$\ln\mu = \int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx$$

$\mu = e^{\int}$

Пример:

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)dy = 0,$$

$P_y \ne Q_x$

(40) $\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2x + x^2 + ay^2 - 2x}{x^2+y^2} = 1$

$\ln\mu = \int dx = x \Rightarrow \mu = e^x$

Д/з $\begin{cases} U_x = e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}) \\ U_y = e^x(x^2+y^2) \end{cases}$

отсюда найти U, проинтегрировав любое

$ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) = C$ проверить!

Предположим $Q = 1$

$dy - f(x,y)dx = 0$ *

$P = -f(x,y)$.

$\frac{d\ln\mu}{dx} = P_y \Rightarrow P(x) = ya(x) + b(x)$

если подставить в *, то

$y' = ya(x) + b(x)$.

$\mu = e^{\int a(x)dx}$

Д/з $y' - \operatorname{tg}x\, y = \cos x$ (решить с помощью интегр. множ-ля)

$y\cos x - \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = C$

$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$ (54)

$\mu = \frac{1}{N(y)P(x)}$

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = \frac{y}{x}$

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$M(x,y),\ N(x,y)$ – однородные ф-ии некоторой степени k

$M(tx, ty) = t^k M(x,y)$

$N(tx, ty) = t^k N(x,y)$

$t = \frac{1}{x}$ (пусть)

$M(x,y) = x^k\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$N(x,y) = x^k\left(1, \frac{y}{x}\right)$

$x^k\left[M\left(1, \frac{y}{x}\right)dx + N\left(1, \frac{y}{x}\right)dy\right] = 0$

$y = xz$

$x^k\left[(M(1,z) + N(1,z))dx + xN(1,z)dz\right] = 0$

$\mu = \frac{1}{x^{k+1}\left[M(1,z) + N(1,z)\right]}$

$\mu = \frac{1}{xM(x,y) + yN(x,y)}$

42

$xM + yN = 0$ (нельзя рассматривать такой μ)

но тогда

$$\frac{M}{N} = -\frac{y}{x} \Rightarrow ydx - xdy = 0$$

(его и так легко решить)

Пример. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$ самост. порешать

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\dots}$$

Найти μ для ур-ия Бернулли.

Ур-ие перв. порядка, неразрешенное отн-но произв.

$$F(x, y, y') = 0.$$

рассм. сл, когда относ-но y' F представляет мн-лен n степени

$$a_n(x,y)\,y'^{\,n} + a_{n-1}(x,y)\,y'^{\,n-1} + \dots + a_0(x,y) = 0 \quad (1)$$

$a_i(x,y) \in D$, и допускают непрерывные производные по y.

a_i — непр

$\frac{\partial a_i}{\partial y}$ — непр.

$a_n(x,y) \neq 0$.

мн-н n степени имеет n корней

Пусть имеет k действ. корней (43)

$y' = f_1(x,y)$

$y' = f_2(x,y) \dots$

$y' = f_k(x,y)$ (2)

Получим реш-ие ДУ 1, объединение решение ур-ий (2).

<u>Пример:</u> $y'^2 + yy' - x^2 - xy = 0$

$y' = p$. $p^2 + yp - x^2 - xy = 0$.

$D = y^2 + 4x^2 + 4xy$

$p_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4x^2 + 4xy}}{2}$

$-x^2 - xy = p_1 \cdot p_2$.

$-x(x+y) = p_1 \cdot p_2$

x — корень, тогда:

$(p-x)(p+x+y) = 0$

$(y'-x)(y'+x+y) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y' = x \\ y' = -x-y \end{array}\right.$ $\quad y = \frac{x^2}{2} + C$, $\quad y = Ce^{-x} - x + 1$ решение

причем C должна быть одна и таже

т.е. через $\forall$ точку пл-ти проходят 2 интегр. кривых

(мн-н не приводим)

(44) Возможно, что мн-н не имеет действ. корней, но имеет комплексные. Его тоже можно изобразить реш-ть

Теперь с геом. точки зрения усложняется (будет 2 сем-ва если ур-е 2 порядка, но может, при как будут огр-мы, и кривая 1 сем-ва будет переходить в кр-ую 2 сем-ва и наоборот, причем особые точки могут предст-ть собой реш-ия).

Пусть ур-ие не содержит явно ф-цию из пер-ых.

$F(x,y')=0$ (3) $y'=p$

Теперь F не мн-н.

Если лев. часть 3 удовл-ет ус-иям сущ-ия неявн. ф-ии, то в окр-ти некот. т. x_0, мы можем разрешить ур-ие и получить

$p=f_1(x)$, $p=f_2(x)$ ...

Их может быть ∞ число.

$y=\int f_1(x)dx+C$, где C одна и та же.

$y=\int f_2(x)dx+C$ (4).

2) Другой вариант: разрешимо отн. по x

$F(x,p)=0$

$x=\varphi(p)$ (5).

Нужно найти $y=y(p)$, получим реш-ие в параметр. форме.

$dy = p\,dx$

$dy = p\,\varphi'(p)\,dp$ (6)

$y=\int p\,\varphi'(p)\,dp + C$ (7)

$$\begin{cases} x=\varphi(p) \\ y=\int p\,\varphi'(p)\,dp + C \end{cases}$$ реш-ие в парамет. виде, p — произв. параметр.

<u>Пример.</u> $x^3+y'^3-3xy'=0$

$y'=p$ $\quad x^3+p^3-3xp=0$ решается по-другому

<u>Другой пример:</u>

$y'+e^{y'}=x$ $\quad p+e^p=x$

$$\begin{cases} y=\int p(1+e^p)\,dp + C = \\ \quad = e^p(p-1)+\frac{p^2}{2}+C \\ x=p+e^p \end{cases}$$

3) Пусть x, y выражены через вспомог. пар-р t.

46 $\dfrac{dy}{dx} = p = \psi(t).$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ p = \psi(t) \end{cases} \qquad dy = \psi(t)\,dx = \psi(t)\varphi'(t)\,dt$$

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)\,dt + C.$$

Пример.

$$x^3 + p^3 - 3xp = 0.$$

$$x^3 + t^3x^3 - 3x^2t = 0$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ p = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad y = \int \ldots = -\frac{9}{2(1+t^3)^2} + \frac{6}{1+t^3} + C$$

$$F(y, y') = 0 \qquad (8)$$

поменяем местами x, y.

то есть теперь $x = x(y)$.

$$y' = \frac{1}{x'}$$

$$F(y, x') = 0.$$

Пример! $dx = \dfrac{1}{p}dy = \dfrac{\varphi'(p)}{p}dp$

$$y = y' + \ln y'$$

$$y = p + \ln p$$

$$dx = \frac{1}{p}dy = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right)dp$$

$x = \ln p - \frac{1}{p} + C$ (47)

$y = p + \ln p$

Пример: $p^3 - y^4(a-p) = 0$

(как $(x^3 + p^3 - 3xp = 0)$ решить!

$F(x, y, y') = 0$

$F(x, y, p) = 0$ (*)

Если рассматр. x, y, p - координаты, то ур-ие задает поверх-ть

$\forall$ пов-ть можно параметризовать двумя пар-ми.

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ p = \chi(u, v) \end{cases} \quad (9)$$

$p = \frac{dy}{dx}$ $dy = p\,dx$

накладывает огр-ия на φ, ψ, χ

$\psi_u du + \psi_v dv = \chi\,[\varphi_u du + \varphi_v dv]$

получаем связь между du, dv

на пов-ти она зав-мост на пов-ти пост.

$\frac{dv}{du} = \frac{\chi \varphi_u - \psi_u}{\psi_v - \chi \varphi_v}$

(8). $v = \xi(u)$

$x = \varphi(u, \xi(u,c)),\ y = \psi(u, \xi(u,c))$

16.03.2017.

$F(x, y, p) = 0$ (*)

$x = \varphi(u, v)$ $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$ (9)

$p = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dv}{du} = \frac{\chi \varphi_u - \psi_u}{\psi_v - \chi \varphi_v} \Rightarrow v = \xi(u,c)$

$x = \varphi(u, \xi(u,c)),\ y = \psi(u, \xi(u,c))$

---

1) $y = f(x,p)$ (10) x, p — параметры.

$dy = p\,dx$ — рав.

$f_x dx + f_p dp = p\,dx$

$f_x + f_p \frac{dp}{dx} = p$ (11).

$p = \varphi(x,c)$ (12)

$y = f(x, \varphi(x,c))$ — общ. реш-ие ур-ие 10

Замечание 1!

ур-ие 11 можно получить из ур-ие 10, если продиф-ть его по x, считая $p = p(x)$

Замечание 2!

[illegible]

Когда мы получим общ. р-ние (49) 1х, в нем нужно заменить p на y', p надо подставить в 13; если в уя заменить p на y' получится ур-ие второго порядка, там появится 2 произвольн. пост.

2) Если x можно выразить из (*)

$x = f(y,p)$ (13) y, p рассматр. как парам-ры,

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ y – незав., x – завис.

$$f_y\,dy + f_p\,dp = dx$$

$$\frac{1}{p} = f_y + f_p \frac{dp}{dy} \Rightarrow p = \psi(y,c)$$

подставим в 13, получим x

$$x = f(y, \psi(y,c))$$

Пример:

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$$

$$x = \frac{8y^2 + p^3}{4yp} \qquad -4xy\frac{dp}{dy}$$

$$3p^2 \frac{dp}{dy} - 4\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{\frac{1}{p}} yp - 4xp + 16y = 0$$

$$(3p^2 - 4xy)\frac{dp}{dy} - 4xp + 12y = 0$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y} \qquad p^3 - 4y^2 = 0$$

(подставили x и поделили)

$$p = Cy^{\frac{1}{2}}$$

50 $c^3 y^{3/2} - 4cxy^{3/2} + 8y^2 = 0$ (при подстановке p

$y = 0$

$y = C$

$y = C_1(x - C_1)^2,\ C_1 = \frac{C^2}{4}$

$p^3 - 4y^2 = 0$

$x = \underline{12y^2} = \frac{3}{\sqrt{4}}\, y^{1/3}$

2) $y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$ самостоят.

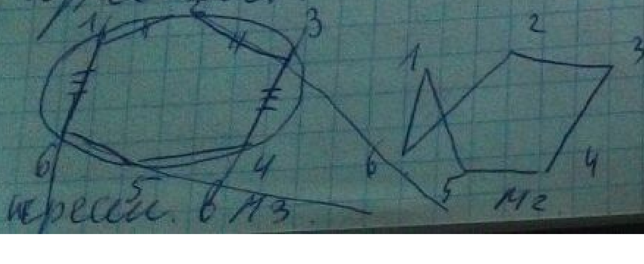
$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$

если особый сл-й подставить p в ур-ие, получится $y(x)$?

Относится к теме интегр. ур-ий!

Ур-ие Дарбу.

Пусть на кривой второго порядка выбрано 6 точек, никакие 3 не лежат на одной прямой, тогда точки пересечения линий, проходящих через пару противоположн. сторон шестиугольника лежат на одной прямой.



M_1, M_2, M_3 лежат на

пересеч. в M_3

51

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)+yR(x,y)}{Q(x,y)+xR(x,y)}$$

P, Q, R — мн-ны

можно переписать в симметр. форме

$$Pdx - Qdy + R(ydx - xdy) = 0$$

Если известно S част. реш,

то если $S \geq \frac{1}{2}n(n+1)+2$,

общее реш-ие получ-ся без интегриров-ия

P, Q — однород. мн. ст. m

R — однор. мн ст k

1) если $k = m-1$ — получим однор ур-ие

замена $z = \frac{y}{x}$, интегр. 1 раз

2) если $k \neq m-1$, то с помощью подстановки $y = xz$ ур-ие свод-ся к ур-нию Бернулли

Пример: $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$ — ур-ие Дарбу.

$$C\sqrt{x^2+y^2} + y - 1 = 0.$$

этот случай наз-ся ур-нием Лагранжа.

52 $A(p)y + B(p)x + C(p) = 0$ Ур-ие Лагранжа

Если $A \neq 0$ то ур-ие Лагранжа можно записать в виде

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \quad (14)$$

$$p = \varphi(p) + x\varphi' \frac{dp}{dx} + \psi' \frac{dp}{dx} \quad *$$

$$[x\varphi' + \psi'] \frac{dp}{dx} = p - \varphi(p)$$

$x \leftrightarrow p$ / будем считать x-фун, p-незав.

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{dx/dp}, \qquad \varphi \neq p$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'_p}{\varphi - p} x = \frac{\psi_p}{p - \varphi} \quad (**)$$

реш-ся квадратурой

особый случай $\varphi \equiv p$

возврат к *

$$x = C \cdot \xi(p) + \eta(p)$$

$$\xi = e^{-\int \frac{\varphi'}{\varphi - p} dp}$$

$$y = \varphi(p)[C\xi(p) + \eta(p)] + \psi(p)$$

получим такое общ. реш-ие.

Пример. $y = 2px + p^2$

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3} \\ y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3} \end{cases}$$

p выразить (5.3) сложно оставить в таком виде.

$\varphi(p) = p$

Пусть $p = C_0$ (есть одно реш.)

подставим p в ур-ие 14.

$y = x\,\varphi(C_0) + \psi(C_0)$ — это

ф-ия всегда реш-ие ДУ 14,

но может наруш-ся усл-ие теоремы единств-ти.

В нашем примере $y=0$ — особое решение, ни при каком зн-ии C нельзя записать в общем.

Ур-ие Клеро

Получ-ся из ур-ия Лагранжа (14) если $\varphi \equiv p$

$$y = xp + \psi(p) \quad (15)$$

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'\frac{dp}{dx}$$

$$\left(x + \psi'(p)\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

1 случай:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = const$$

$\boxed{y = Cx + \psi(C)}$ — сем-во прямых

общее решение (16).

(54) 2 случай: $x + \psi'(p) = 0$ — это уже алгебраич. выр-ие

тогда $x = -\psi'(p)$

$y = -p\psi'(p) + \psi(p)$ (17)

Можно взять диф-лы по x, y

$dx = -\psi''_p d(p)$,

$dy = \ldots$ (из 17)

выразить $\frac{dy}{dx}$, должно получиться p. красота

реш-ие 17 — особое реш-ие. (не получ-ся из 16 ни при каком зн-ии c)

21.03.2017

$y = xy' + \psi(y')$ — ур-ие Клеро.

в результате введения параметра получаем реш-ие:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$$

част. реш-ие 17 не получается из 16 ни при каком знач-ии c

<u>Док-во</u>: (методом от против-го)

$p = \varrho(x)$ из $x = -\psi'(p)$

55

$x\eta(x) + \psi(\eta(x)) = ax + b$ (*) некоторая прямая
16 (при каком-то C)

$\psi'(\eta(x)) = -x$

$\eta + x\eta' + \psi'\eta' = a$ $\Rightarrow$ $\eta(x) = a$

но это противоречит тому факту, что η зависит от x.

Сл-но, * было неверно.

$y = x\eta(x) + \psi(\eta(x))$ (17')

получили явн. ф-ия

обозначения $y'_x = y_x$

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p) \\ 0 = x + \psi'(p) \end{cases}$$

$$* \begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ F'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}$$ такая система описывает дискриминантную кривую

$$\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{cases}$$ если опр-ль из коэф-ов равен 0, то (результант) система имеет корень

$Q = P'$ (есть ли у многочлена кратные корни)

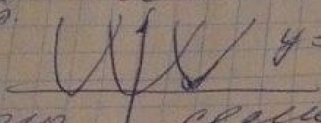
В этом случае результант наз-ся дискриминантом.

Решения системы * наз-ся дискрим. кривой, причем не обязат. многочлен $F(x, y, C)$ может быть функцией

(56) Мы будем предполагать, что
* имеет решения в виде
$y(x)$, а не ~~точки~~ мн-во точек.

Особ. кривая: 1) огибающая части кривых
2) мн-во особых точек ($F_x = F_y = 0$)

Пусть есть семейство парабол.



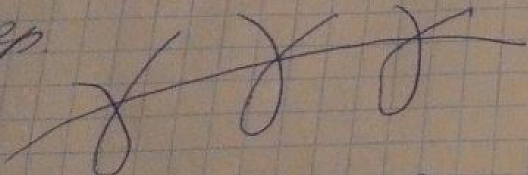
$y = (x - c)^2$

У такого семейства есть огибающая $y = 0$.

Если она $\exists$, она обязат-но будет решением, т.к. пр-ая огибающей будет совпадать с произв-ой интегр. кр-ой.

А вот с особыми точками (г) сложнее.

Пример:



①.

Точки пересе-ия — особые точки, узловые точки.

Линии, прох-ие через них не будут реш-ием, т.к. пр-ая у интегр. кр-ой и этой линии не совпадает

57

② Пусть сем-во кривых представ. такие „кеиновы"

Тогда мн-во таких точек заострения может быть реш-ем, т.к. касат-ые в них могут равн-ся касат-ым интегр. кривых.

Чтобы это узнать нужно подставить в изнач. ур-е ...

потом решить задачу Коши

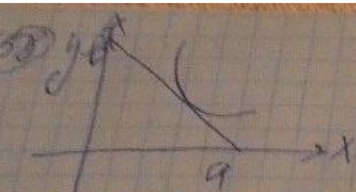
$$\begin{cases} y_1(x) = y_c(x_0) \\ y_1'(x_0) = y_c'(x_0) \end{cases} \quad **$$

Вывод: решением (17') явл-ся огибающая общего решения ур-ия Клеро (16) сем-ва прямых.

К ур-ию Клеро приводят геом. задачи в которых треб-ся определить кривую по какому либо св-ву ее касат-ой

Пример: найти кр-ую кас-ая к которой вырезает вместе с осями коорд. Δ с $S = 2 = const$ (треуг-ик постоянной площади)

53



$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1 \\ \dfrac{ab}{2} = 2 \\ b = \dfrac{4}{a} \end{cases}$$

получим однопараметрическое семейство прямых $\dfrac{x}{a} + \dfrac{ay}{4} = 1$

его явл-ся ур-ием 1в.

Тогда мы можем найти ур-ие клеро

$$-\frac{x}{a^2} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow \cancel{\frac{x}{a^2} - \frac{y}{4} = 1}$$ не то!

проверить!

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{ay}{4} = 1 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{ay'}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = xy' + 2\sqrt{-y'}$$

это ур-ие клеро

$y = cx + 2\sqrt{-c}$ — общее реш-ие этого ур-ия

теперь найдем особое решение

$$\cancel{-\frac{x}{a^2} + \frac{y}{4} = 1} \qquad \begin{cases} y = cx + 2\sqrt{-c} \\ 0 = x - \dfrac{1}{\sqrt{-c}} \end{cases}$$

$$C = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$ — равнобоч. гипербола.

$$a^2 = -\frac{4}{y'} \qquad a = \frac{2}{\sqrt{-y'}}$$

Тогда касат-ая, провед-ая к ней будет удовл-ть $S = 2$.

59

Замечание 1: Пусть $\psi_{(1)}'(p) = const$ (частн. случай) $\psi = ap + b$

тогда $y = xy' + ay' + b$

$y' = \frac{y-b}{x+a}$ — ур-ие с разд. пер-ными

$$\frac{dy}{y-b} = \frac{dx}{x+a}$$

Имеет особую точку $(-a; b)$ (то есть в этом случае огибающая кривая вырождается в одну точку).

Замечание 2: всякое сем-во прямых зависящее от одного параметра, кроме сем-ва паралл. прямых при исключении параметра дает ур-ие Клеро.

Док-во: самостоят-но.

$$\begin{cases} y = k(t)x + b(t) \\ \frac{dk}{dt} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$ избавляясь от t мы всегда получаем ур-ие Клеро.

Задача о траектории

Пусть дано сем-во плоских кривых $F(x, y, a) = 0$ (1).

60. **Опр.** Кривая, образующая в каждой своей точке постоянный угол α с проходящей через эту точку кривой сем-ва (1), наз-ся изогональной траекторией этого сем-ва.

Част. случ.: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — ортогональные тр-ии

1) $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

изогон. кривая

$\varphi_1 - \varphi = \alpha$ (см рис)

$k = \operatorname{tg} \alpha$

$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = \operatorname{tg} \alpha = k$

x, y — кривая сем-ва

x_1, y_1 — изогон. тр-ия

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi} = k$$

см ур-ие 1

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1}\frac{dy}{dx}} = k \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}(x_1, y_1, a)\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}}{\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1} - \frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}\frac{dy_1}{dx_1}} = k \quad (3)$$

т.к. ур-ие 3 входит a, хотим избавиться от нег. (61)

т. т. (x_1, y_1) выт-ся усл-ие $F(x_1, y_1, a) = 0$, тогда получим $\Phi(x_1, y_1, y_1') = 0$ — ДУ орт. тр-ий

решим его: $\psi(x, y, C) = 0$ — сем-во орт. тр-ий

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad tg\,\varphi_1 = -ctg\,\varphi$

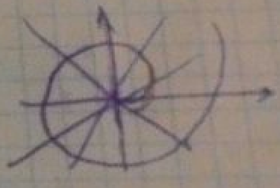
$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx_1} \frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1} - \frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1} = 0 \quad (3') \\ F(x_1, y_1, a) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ избавимся от a и получим ДУ ортогон. траек-ий

Пример:

$y = ax$



1) $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

$k = a = \frac{y}{x}$ $\quad y' = \frac{y}{x}$

не будем писать y_1, x_1!

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = k \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y + kx}{x - ky}$$

62

Ответ: $\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$

в полярн. координатах $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ — сем-во логариф. спиралей

$-\infty < \varphi < +\infty$

2) $\alpha = \frac{\pi}{2}$. $\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{q} = -\frac{1}{\frac{y_1}{x_1}}$

$x_1 dx_1 + y_1 dy_1 = 0$

$x_1^2 + y_1^2 = C$ — сем-во концентрич. окр-тей в $O(0,0)$.

2/3) $\frac{x^2}{1+\lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1$ $\quad x = \pm 1$, $y = 0$. найти сем-во ортогон. тр-ий

сем-во софокусных эллипсов. (фокус одинаков)

$\Phi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ (4) хотим получить ДУ изогон. тр-ий

из (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k\frac{dy_1}{dx_1} + 1}$ $\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}$

$\Phi_1\left(x_1, y_1, \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - k}{k\frac{dy_1}{dx_1} + 1}\right) = 0$ (5) описывает сем-во изог. тр-ий

в результате реш-ия получим общ. интеграл вид-а $\psi(x, y, c) = 0$

Всегда $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$F(x,y,y')=0$ (1) — ур-ие

$y(x_0)=y_0$ (2) — нач ус-ие

Ур-ие (1) в с н у 2 имеет в некоторой замк решении окр. (x_0,y_0) если

1) F — непрер

2) $\exists\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$

3) $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}\right| \leq M$ (ограничена по модулю)

Если 1, 2, 3 выполнены, то $\exists$ единств. реш-ие!

Рассмотрим случай, когда нарушено усл-ие 2.

$$\begin{cases} F(x,y,y')=0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'}=0 \end{cases}$$

$p=y'$ — искусств. введен-ая перем-ая.

$$\begin{cases} F(x,y,p)=0 \\ \dfrac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0 \end{cases} \quad (3)$$

Мн-во точек, определяемое системой 3 наз-ся p-дискриминантной кривой.

Можно изб-ся от P и получим $\varphi(x,y)=0$ (4).

Дискр. кр-ая может состоять из нескол. кривых и если (1) имеет особое реш-ие, то оно будет среди этих кривых.

Кривые из (4) могут быть: част. реш-ями и кривыми, составленными из особых точек, а те в свою очередь могут явл. или не явл. реш-ием.

$p = y'$ найдем y, подставим в ур-ие 1 и проверим, выполняется или нет.

$$y = \varphi(x, c)$$

1) $\varphi(x,c) = \psi(x)$

2) $\varphi'(x,c) = \psi'(x)$

Если найдется c — не особ., а если нет такого, реш, то — особое.

<u>Пример</u> а) $y = 2xy' - y'^2$ (Лагранжа).

$$\begin{cases} y = 2xp - p^2 \\ 0 = 2x - 2p \end{cases} \Rightarrow y = x^2 \text{ — дискрим. кривая (ДК)}$$

проверим реш-ие или нет подставлением в нач. ур-ие.

$y^2 = 4x^2 - 4x^2 \Rightarrow x^2 = 0$ (противоречие)

то есть такой кривой нет

поэтому не решение

б) $4y'^2 - y^3 = 0$

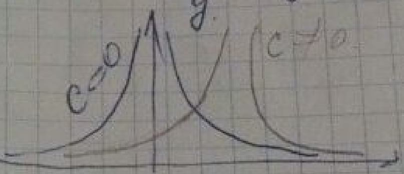
$$\begin{cases} p^2 - y^3 = 0 \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ (Дк)}$$

(это решение)

Но будет ли это особым решением?

$y' = \pm y^{3/2}$

$\Rightarrow y = \frac{4}{(x+c)^2}$ — общее реш-ие



$\frac{4}{(x+c)^2} = 0$ (н)

Вывод: $y = 0$ не является особым (это частн. реш-ие)

в) $y = y'^2 + 2xy' + \frac{x^2}{2}$

$$\begin{cases} y = p^2 + 2xp + \frac{x^2}{2} \\ 2p + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} \text{ (Дк)}$$

$y' = -x$

$-\frac{x^2}{2} = x^2 - 2x^2 + \frac{x^2}{2}$ (в)

$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{2}$ — решение.

Проверить явл-ся ли особым. (Решить исход. ур-ие) решение получили;

4) $y = -\frac{x^2}{4} + Cx + C^2$

$$\begin{cases} -\frac{x_0^2}{4} + Cx_0 + C^2 = -\frac{x_0^2}{2} \\ -\frac{x_0}{2} + C = -x_0 \end{cases}$$

имеет реш-ие: $C = -\frac{x_0}{2}$.

$\forall\ x_0\ \exists$ такое C, что наше реш-ие отличается от общего, но будет совпадать в этой точке по кр-ии. Иначе говоря это особое реш-ие.

$\Psi(x,y,C) = 0$ (5) пусть есть сем-во

Получим C-дискрим-ую кривую в рез-те реш-ия (6)

$$\begin{cases} \Psi(x,y,C) = 0 \\ \Psi_C(x,y,C) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Среди точек этой кривой может встрет-ся огибающая, она будет реш-ием (особым всегда).

Линия Γ наз-ся огибающей однопарам-ого сем-ва (5), если в каждой своей точке касается некоторой кривой сем-ва, причем в различных точках Γ касаются различные кривые сем-ва.

Пусть система 6 имеет реш-е $y = \varphi(x)$.
Рассмотрим точку $M(x,y) \in \gamma$. Она также по кр-вой (некоторой) принадлежит, а она опр-ся сем-ва значением c.

Тогда можно говорить, что появл-се $c = c(x,y)$ (в этой она меняется, постоянна), а ...

Получаем $\psi(x, y, c(x,y)) = 0$ (7)

Допустим, что $c \neq const$, мы найдем интегральную огибающей.

У ур-ия 7 найдем учет вол коэф-ент левую часть продиф-ав

$$\psi'_x + \psi_y y' + \psi_c(c_x + c_y y') = 0.$$

$$\psi_x + \psi_y y' = 0$$ (вып-ся для интегр. кривой условие на учет коэф)

$$\psi_c(\underline{c_x + c_y y'}) = 0.$$

$$\frac{dc}{dx} \neq 0.$$

тогда $\psi_c = 0$ это и означает выполнение усл-ий (6)

$$\begin{cases} \psi_x = 0 \\ \psi_y = 0 \end{cases}$$ — особые точки кривой

Говоря: в С-риск-ую кривую может входить кроме особых решения кривые, состоящие из особых точек.
Хорошего примера у него не было :(

Док-во теоремы о $\exists$ единст-ти.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad (1).$$

x_0, $y(x_0)=y_0$ — нач усл.

Предположим f непр-на в обл D. $a>0$, $b>0$.

D: $|x-x_0| \le a$
$|y-y_0| \le b$

f будет огр-на $\Rightarrow$

$\exists\ M>0 \quad |f(x,y)| \le M.$ (2)

Предположим, что ф-ия удовл усл-ию Липшица отн. y:

если рассмотрим произвол. x.

$\forall x$: $|x-x_0| \le a$

и $\forall y_1, y_2$: $|y_1-y_0| \le b$

$|y_2-y_0| \le b$

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \le N|y_2-y_1| \quad (3)$$

$N>0$. тогда $\exists$ единст. реш. ур-ие (1) с нач. усл-ием.

Замечания: 1) нер-во (3) вып-ся всегда, если част. пр-ая по y (f_y) ограничена в обл. D

тогда $f(x,y_2)-f(x,y_1)=f'_y(x,y_1+\theta(y_2-y_1))(y_2-y_1)$

(теорема Лагранжа для y) $0<\theta<1$

Пусть дано $f=|y|$

тогда $f_y \nexists$ при $y=0$, но тем не менее усл-ие Лившица вып-ся.

$$\big||y_2|-|y_1|\big| \le |y_2|-|y_1|$$

Для заданной f, M, N зависит от области.

$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$ (4)

1) рассмотрим $y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx$

найти послед-ть y_n которая в пределе стремилась к f

$|y_1 - y_0| \le b$

30.03.2017

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ (1)

$y(x_0) = y_0$

Д: Продолжение: $|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx\right| \le Mh$

$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

то $|y_1 - y_0| \le b$

$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx$

$|y_2 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx\right| \le Mh \le b$ (5;2)

метод мат. индукц. (самост-но доказать)

$|y_n - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx\right| \le b$ (5;n)

$\{y_n(x)\}$ — получ-ся послед-ть

$|x - x_0| \le h$ $|y - y_0| \le b$

$Y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ (6) предел этой послед-ти.

доказали, что этот предел — решение ур-ия (4)

y - непр. ф-ия.

Исследовать посл-ть на сход-ть, сначала по этому найдём посл-ть и посл-сти ее ряда и на сход-ть.

$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$

$S_1 = u_1(x)$ — частичная сумма

$S_2 = u_1(x) + u_2(x)$ $\{S_n\}$ - посл-ть

$\dots$

$S_n =$

если при $x = x_0$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = A$

то говорят, что ряд сходится к этой точке.

Получим обл-ть (сходимости) для которых предел $\exists$

Признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x_0)}{u_n(x_0)} = C$$

$C = 1$? признак не работает

$C > 1$ - сх-ся

$C < 1$ - рас-ся.

Признак Вейерштрасса

Может оказаться, что предел ряда — разрывная ф-ия

Пусть $f_n(x) = x^n$ непр. и огр. на $[0,1]$

72 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \le x < 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ может быть разрывной ф-ией

нужно, чтобы $\exists$ такой сходящ. числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что $\forall x \in B$ (из обл-ти сх-ти) $a_n \ge 0$ $|u_n(x)| \le a_n$ (значения членов ряда меньше чем a_n), тогда ряд будет сх-ся равномерно, что гарантирует получение непр. ф-ии в пределе из непр. ф-ий. (это справедливо не будет :)

$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots$ (7) – функциональный ряд

Рассмотрим для него частичную сумму.

$f_n(x) = y_n(x)$.

Если докажем сход-ть (7), то f_n имеет предел в виде непр. ф-ии.

Док-во: оценим по абсолют. величине член ряда 7

$$|y_1 - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx\right| \le M|x - x_0| \quad (7.3)$$

$f(x, y_0) \le M$ (усл-ие 2) модуль инт-ла.

$$|y_2 - y_1| = \left|\int_{x}^{x_0} [f(x, y_1) - f(x, y_0)]\,dx\right| \le$$

$$\le \int_{x}^{x_0} |[f(x, y_1) - f(x, y_0)]|\,dx \le$$

интеграл от модуля.

Применим усл-ие 3, 2 Лившица.

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} N|y_1 - y_0|\,dx\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} NM|x - x_0|\,dx\right| =$$

$$= \frac{MN(x - x_0)^2}{2} \quad (8.2)$$

$$|y_3 - y_2| = \left|\int_{x_0}^{x} [f(x, y_2) - f(x, y_1)]\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} |[f(x, y_2) - f(x, y_1)]|\,dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} N|y_2 - y_1|\,dx\right| \le \frac{MN^2}{2}\left|\int_{x_0}^{x} |x - x_0|\,dx\right| = \frac{MN^2|x - x_0|^3}{3!} \quad (8.3)$$

Док. ММИ, что

$$|y_n - y_{n-1}| \le \frac{M N^{n-1}|x - x_0|^n}{n!} \quad (8.n)$$

$$|y_n - y_{n-1}| \le \frac{MN^{n-1}h^n}{n!}$$ (каждый член ряда ограничен членом …)

74

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M\,l^{n-1}h^n}{n!} \quad (9)$$

Тогда по пр. Вейерш. ряд сх-ся равномерно, а значит его предел — непр ф-ия.

$$u_n = \frac{M l^{n-1} h^n}{n!}$$

Найти предел при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{lh}{n+1} = 0$$

по пр. Вейер. равномерно сх-ся ряд и пределом его $\exists$ явл непр ф-ия.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x, y_n) = f(x, y)$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx \quad (10)$$

$\Rightarrow \exists$ реш-ие y ур-ия (1) (мы доказали первую часть теоремы д-ва)

Если $x = x_0 \Rightarrow y = y_0$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$\blacksquare$

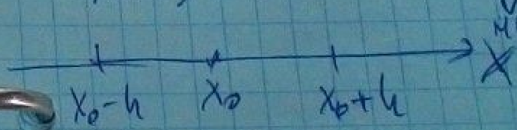
Замечание 1 замена ДУ 1 на интегр. ур-ие 4 нужна потому, что усл-ие равном. сх-ти для послед-ти интегралов значительно проще чем для послед-ти производных.

Замечание 2 Для $\exists$ решения ур-ия (1) требуется только непрерывность ф-ии $f(x,y)$ (можно обойтись без условия Липшица), но тогда не будет единственности реш-ия

Докажем единст-ть решения (методом от противного)

Пусть $\exists$ $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения с нач. условием

$y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$



на (x_0-h, x_0+h) получено реш-ие

Пусть при $x > x_0$ ф-ии различны ($y_1(x) \neq y_2(x)$).

76 рассмотрим $\varepsilon \to 0$ тогда на $[x_0, x_0+\varepsilon]$ $|y_2(x) - y_1(x)|$ будет непрерывн (как разность двух непр.)

Применим наиб. зн-ие $\Theta \to$

$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \Theta$ в ∇ §.

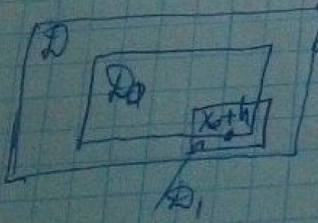
$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} [f(x,y_1) - f(x,y_2)]\,dx\right| \leq$$

$$\leq N\left|\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} |y_2(x) - y_1(x)|\,dx\right| < N\Theta\varepsilon$$

$$\Theta < N\Theta\varepsilon$$

$1 < N\varepsilon \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{N}$ но мы предположили, что ε — любое, но N — фиксировано для данного мол. ус-ие $\Rightarrow$ противоречие

Твор: реш-ие ур-ие 1 — единст-ое ■



D: $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$. D_0: $|x - x_0| \leq h$, $|y - y_0| \leq b$

мы получим решения

I_0: $|x - x_0| \leq h$

Пусть на отрезке I есть некот. реш-ие $y(x)$ $y(x_0+h)$

$|y(x_0+h) - y_0| \leq b$. (удовлетв. усл-ию принадлежности обл-ти D)

77

$y_0^{(1)} = \exists!$ (по опр.) $= y(x_0+h)$. $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}) \in D$

$x_0^{(1)} = x_0 + h$

$\forall$ в этой обл-ти вып-ся усл-ия теоремы, $\exists$ значит

$\Rightarrow$ I_1: $\left.\begin{aligned} |x - x_0^{(1)}| &\le a_1, \\ |y - y_0^{(1)}| &\le b_1, \end{aligned}\right\} D_1$

то есть есть прямоуг-к D_1, в котором $\exists$ единств. реш $y^{(1)}(x)$

Причем при $x < x_0 + h$, где опр-ны оба реш-ия (и реш-е в D и реш-е в D_1), в силу $\exists$ единств-ти этих решений будут совпадать.

А если $x < x_0 + h$ — новое реш-е

$y' = f(x,y)$ (1) 04.04.2017

(1) $f(x,y)$ непр в D

$|x - x_0| \le a$ (2) Усл. Липшица

$|y - y_0| \le b$ $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$

$x_0^{(1)} = x_0 + h$, $y_0^{(1)} = y(x_0^{(1)})$

$f(x,y) \le M$

$h_1 = \min\{h, \frac{b_1}{M}\}$

для пред- лемкиец

(78) $f(x,y)$ – аналит. ф-ия.
Ф-ия имеющая разлож. в степ. р-д в окрестн. др. функц. ф-ии такая что она имеет усл. степ. ...

Теорема Коши

$f(x,y)$, фигурирующая $y' = f(x,y)$, (1)
является аналит. в окр-ти т. (x_0, y_0) тогда $\exists$ единств. решение Д.У. (1), удовлетвор. Н.У. $y(x_0) = y_0$ явл. и это решение $y(x)$ – аналит. ф-ией.

Д-во: пусть дана обл. D в виде прям-ка. Рассмотрим в ней $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, $\frac{x_0}{y_0} = const$ – параметр

$|\bar{y}_0 - y_0| \le \frac{b}{2}$

$y_0 - \frac{b}{2} \le y \le y_0 + \frac{b}{2}$ (пуск)

Для всех $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ решение ур-ия (1) будет $\exists$ при изменении x в интервале $(x_0 - \bar{h}, x_0 + \bar{h})$, где $\bar{h} = \min\{a, \frac{b}{2M}\}$

Таким образом, мы получаем завис. от одного параметра $\bar{y}_0$ решение Д.У. (1) и поскольку $\bar{y}_0 = \varphi(x, \bar{y}_0)$ (1-1) произвол. пар-тр, то такое решение явл. общим
$\forall \bar{y}_0$, удовл. $|\bar{y}_0 - y_0| \le \frac{b}{2}$

79

$y_1, y_2 \dots y_n$ — непр. ф-ии от начал. ус-ий $x_0, \bar{y}_0$

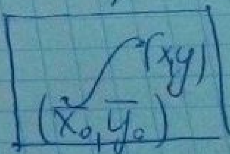
Эта послед-ть ф-ий будет зависить от $\bar{y}_0$, это видно из выр-ия для y_n (посмотреть в теореме)

Т.о посл-ть ф-ий равномерно сх-ся $\Rightarrow$ предел такой посл-ти будет непрер. ф-ия $\Rightarrow$ y непр-но зависит от $\bar{y}_0$

Рассмотрим $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ как перемен. величины.

$$\begin{cases} |\bar{x}_0 - x_0| \le \frac{h}{4} \\ |\bar{y}_0 - y_0| \le \frac{b}{2} \end{cases} \quad D$$

(требуем) не $\frac{h}{2}$, т.к попадем на границу.



$$y = \varphi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0) \quad (12)$$

$$|x - x_0| \le \frac{h}{4}$$

$$\bar{y}_0 = \varphi(\bar{x}_0, x, y) \quad (12)'$$

Если $\bar{x}_0 = const$, $\bar{y}_0$ — параметр, получим решение ДУ (1) в виде общего интеграла, разрешенного отн-но const.

$$\psi(x,y) = C \quad (13).$$

$\blacksquare$

80 $y' = f(x,y)$.

Особые точки — в них нарушаются усл-ия т. сущ.

~~1) усл. непр.~~

Пусть $f(x,y) \to \infty$ (неогр.)

при $(x,y) \to (x_0, y_0) = M_0 \in D$

1 вариант: $\frac{1}{f(x,y)} \to 0$

Пусть $\frac{1}{f(x,y)} = 0$ в т. (x_0, y_0) (но вообще говоря она неопред.)

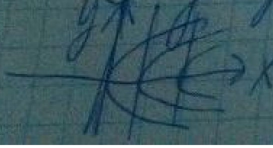
$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$ — будет непр. тогда в силу теоремы ∃ единст-ва [illegible] никаких особенностей у интегр. кривых нет.

$x = \varphi(y)$ в т. M_0 $\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow$ касат-ая вертикальная

Пример. $y' = \frac{1}{y}$ — непр. кроме $x = x_0$, $y = 0$.

$\frac{dx}{dy} = y$ (∃ единст-ти работает)

$\Rightarrow$ ∃ ед. реш. $2(x - x_0) = y^2$ — сем-во парабол.



в вершине — верт. касат.

2 вариант. Пусть $f(x,y) \to \infty$ (81)

при $(x,y) \to (x_0,y_0)$ по некоторому пути.

по этому пути предел принимает другое зн.

Тогда $\lim$ в M_0 не $\exists$ т.к. он зависит от выбора пути

В остальной части окр-ти т. M_0 $f(x,y)$ – непр-на.

Тогда M_0 – изолирован. (особая) точка.

(при любом рассмотрении перем. x, y, т.е $y(x)$ или $x(y)$)

Част. случ. $f(x,y) = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$ (14) $ad-bc=0$

$$y' = \frac{ax+by}{cx+dy}$$

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \delta y \end{cases} \quad (15)$$ – нов. перем.

так хотим

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda \eta}{\mu \xi} \quad (*) \qquad \lambda, \mu = const.$$

$$\begin{cases} d\xi = \alpha dx + \beta dy \\ d\eta = \gamma dx + \delta dy \end{cases}$$

(82) $\dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)}$.

$\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)=\lambda(\gamma x+\delta y)$

$\alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)=\mu(\alpha x+\beta y)$

$\begin{cases} \gamma(c-\lambda)+\delta a=0 \\ \gamma d+\delta(b-\lambda)=0 \end{cases}$ (16) — однородн. система

Хотим нетрив. реш-ие.

$\Delta = \begin{vmatrix} c-\lambda & a \\ d & b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2-(b+c)\lambda+bc-ad=0$ (17).

λ — решение

$\begin{cases} \alpha(c-\mu)+\beta a=0 \\ \alpha d+\beta(b-\mu)=0 \end{cases}$ 16' $\Delta = \begin{vmatrix} c-\mu & a \\ d & b-\mu \end{vmatrix} = 0$.

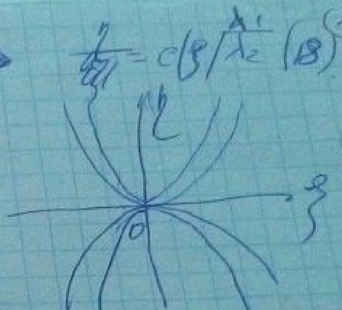
$\mu^2-(b+c)\mu+bc-ad=0$. (17)

Ур-ие 17 имеет λ_1 и λ_2

подставим в (16) выразим γ, δ через a, b, c, d, а если в 16' α и β через a, b, c, d с точностью до мн-ля

$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$. предполож. сущ-во.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\eta}{\xi} \quad (**) \longrightarrow \quad \eta = c|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (18)$$



1) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$

при таких λ мн-во парабол и ось ξ

$\xi = 0$, $\eta = 0$.

(0, 0) — особая точка (в т. не ∃ т.к. частное превращ. ур-ие 14 в разные стороны различных от т. 0) наз-ся узлом.

ось η имеет отличную от остального мн-ва касательную.

Замечание: с геометр. т. ур-ие 15 отвечает переходу к косоугольн. осям η, ξ и далее осуществлен растяжение по этим осям (они у нас ↑ чтобы не усложнять рисунок).

06.04.2017

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm\frac{\lambda_1}{\lambda_2} c|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

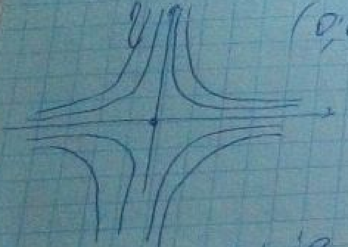
$\frac{d\eta}{d\xi} \to 0$, $\xi \to 0$.

(рисунок) решение $\eta = C\xi^2$ и норм. прям. $\eta = 0$, $\xi = 0$

2) $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ $\quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (разн. зн.)

84 $\quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -k, \quad k > 0.$

$\eta = C|\xi|^{-k}, \quad \eta = 0, \ \xi = 0$ — решения



(0,0) — особая точка (проходят 2 прямые через эту точку) наз-ся «седлом»

3) $\lambda_{1,2} = p \pm iq$ (комплексн.)

Можно подобрать такие постоянные множители α, β для 16 и 16', что будут комплексно-сопряженными α, β.

Система 15 перейдет в ср. α, β, ξ, η — комплексные так:

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \bar{\alpha} x + \bar{\beta} y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \\ z + \bar{z} \in R \\ z - \bar{z} = 2iy \text{ мним.} \end{cases}$$

$u = (\xi + \eta)\frac{1}{2}$

$v = (\xi - \eta)\frac{1}{2i}$

$$\begin{cases} \xi = u + iv \\ \eta = u - iv \end{cases} \qquad \frac{du - i\,dv}{du + i\,dv} = \frac{(p+iq)(u-iv)}{(p-iq)(u+iv)}$$

(85)

$(pv - qu)du = (up + qv)dv$ (19)

$pv\,du - qu\,du = up\,dv + qv\,dv$

$q(v\,dv + u\,du) = p(v\,du - u\,dv)$

$q\left(\frac{u\,du + v\,dv}{u^2+v^2}\right) = p\,\frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}$

$q\,d(uv) = p(v\,du - u\,dv) = p\,v^2\left(d\frac{u}{v}\right)$

$\frac{\frac{v\,du}{u^2} - \frac{dv}{u}}{1+\frac{v^2}{u^2}} = \frac{-d\left(\frac{v}{u}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2} = -\operatorname{arctg}\frac{v}{u}$

$\frac{q}{2}\ln(v^2+u^2) = -p\operatorname{arctg}\frac{v}{u} + \ln|C|$

$\ln(v^2+u^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{v}{u} + \ln|C|$

$u = r\cos\varphi$

$v = r\sin\varphi$ $\qquad \ln r = -\frac{p}{q}\varphi + \ln|C|$

$r = Ce^{-\frac{p}{q}\varphi}$

O(0;0) – фокус

все кривые приближаются к особой точке.

Пусть $\lambda_{1,2} = \pm iq$ – корни числителя

$u\,du + v\,dv = 0$

$u^2 + v^2 = C$ сем-во концентр. окружностей O(0;0) – центр.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$

(86) $D = (b+c)^2 - 4(bc-ad) = 0$

$D = (b-c)^2 + 4ad = 0$!

$\lambda = \frac{b+c}{2}$ подставим в 16^4, $16'$

$$\begin{cases} -\frac{b-c}{2}\alpha + a\beta = 0 \\ d\alpha + \frac{b-c}{2}\beta = 0 \end{cases} \quad (16^4)$$

Рассмотрим первое ур-ие

$a^2+(b-c)^2>0$ не все коэф-ты равны 0

$\alpha = a \quad \beta = \frac{b-c}{2}$

$\xi = ax + \frac{b-c}{2}y$ для 2 бесполезно, получится то же самое

$\eta = y$

$\Delta = \begin{vmatrix} a & \frac{b-c}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$

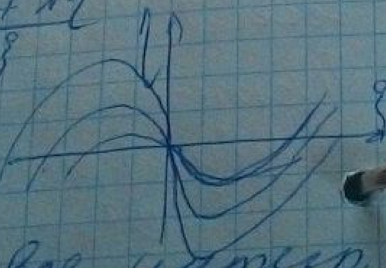
Смотрим по Δ $D(.1)$

если $a=0$, то $b=c$,

$a^2+(b-c)^2>0$?! противоречие $\Rightarrow a\neq 0$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{ax+by}{\lambda\xi} = \frac{\xi+\lambda\eta}{\lambda\xi}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{\lambda}$$



$$\left[\begin{array}{l} \eta = \frac{1}{\lambda}\xi\ln|\xi| + C\xi \\ \xi = 0 \end{array}\right.$$

$O(0,0)$ — узел, все интегр. кривые с общей касательной.

87

$$\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi} = \frac{1}{\lambda}\ln|\Delta\xi| + C$$

Пусть в (16'') $a = \frac{b-c}{2} = 0$

Тогда 16' выполняется для $\forall \alpha, \beta$

$a = d = 0$, $b = c = \lambda$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad y = cx$$

$O(0,0)$ – особая точка узел (дикритический)

У каждой кривой свой угол наклона

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+dy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$M_0(x_0, y_0)$ $\quad P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$ – особая точка

x_0, y_0 можно считать нулями

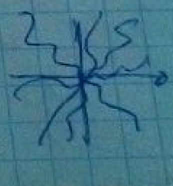
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+\varphi(x,y)}{cx+dy+\psi(x,y)}$$

$$\frac{\varphi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \qquad \sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

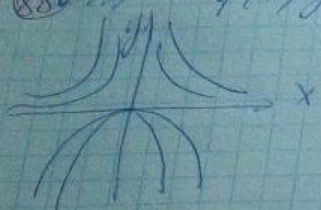
если не все $a, b, c, d = 0$

типы точек особых таких нет.

$$\frac{\psi(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$$



или $a = b = c = d = 0$, то поведение будет равным в окрестности (88) т. $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$



таких примеров не встретится

Дифф-ые ур-ия высших порядков

Опр. ДУ ~~n-го~~ порядка $n > 1$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1),$$

где $y = y(x)$

Предполагаем, что F — непрерывная по всем своим аргументам

Пусть дан набор чисел

$x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(n)}$ если при его подстановке в (1) мы получаем тождество и

$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, то используя теорему неявн. функции мы можем локально (в некоторой окр-ти) выразить

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \quad (1')$$

При каких усл-ия ДУ (1)

имеет реш-ие и когда оно единственно? 8

Теорема Пусть правая часть ур-ия (1') непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет усл-ию Липшица по аргументам, содержащим y $(y, y', \dots y^{(n-1)})$, тогда $\exists$ единственное решение, удовлетворяющее нач.

$$x = x_0,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0' \dots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0)$$

Ее можно решать не для (1'), а для соответствующей системы ур-ий.

$$y_1 = y',\ y_2 = y_1' = y'' \dots y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \dots y_{n-1}) \end{cases}$$

Док-во будет позднее.

Общ. реш-ие ур-ия (1) будет содержать $y = \varphi(x, C_1, \dots C_n)$ (2), или в виде общего интеграла $\Phi(x, y, C_1, \dots C_n) = 0$ (3)

Если не для ∀ набора нач. бу-
(50) ус-ии получутся $C_1 \ldots C_n$, … не с …
… иметь … с набором …
реш-ием, а

Например, $y = x + C + C_2 = x + C_1$
(существенно зависит от одной const)

$\Phi(x_0, y_0, C_1, \ldots C_n) = 0$

Продиф-ть $n-1$ раз.

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) y_0' = 0$$

$$\Phi_x + \Phi_y y'$$

$$\Phi_{xx} + \Phi_{xy} y' + \Phi_{xy} y' + \Phi_{yy} y''$$

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x \partial y}\right) y_0' + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) y_0'' = 0 \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) y_0^{(n-1)} = 0$$

Из этой системы (4) можно найти C_i

Замечание 1: решение системы (4) отн-но C_i возможно лишь для тех нач. значений, для которых вып-ся условия теоремы ∃ неявн. ф-ии, т.е. есть якобиан перехода от C к y должен быть $\neq 0$.
(сист-ма порядка n)

(91)

Если для некотор. зн-ий якобиан ≡ равен 0, то для таких зн-ий C_i для таких невозмож. нач. значений невозм. опр-ть по ним x в массив точно. Это называют — избыточность постоянных. Означает: $C_1, \dots, C_n$ не явл. независимыми и само существование (30) не представляет общего решения.

Замечание 2: как и для ДУ п.п. может случиться, что формула (3) не дает всех частных решений.

Пример.

$$y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y'^2 = 0.$$

$y \neq 0,\ y \neq e$

можно выразить явно y''

Тогда можно получить $\ln y = \frac{x+a}{x+b}$ будет решением.

Если зададим нач. данные:

$x = x_0,\ y = y_0\ (\neq 0, e)\ y'_0 = 0$

Тогда не будет констант a и b таких, чтобы эти нач. ус-ие вып-сь.

$y = C$ (такое реш-ие подходит) $(\neq 0, \neq e)$.

(92) нельзя e т.к. ур-ие станет ДУ п.п. д' ... Потому рассматривать вспом. пор-ёрок.

Сумма $y = C$ и $\ln y = \frac{x+a}{x+b}$ не будет явл. решением. то есть реш-ие зависит либо от одной либо от двух соотв.

Рассмотрим какие типы ур-ий порядка n можно проинтегрировать.

Типы интегрируемых ур-ий n-го порядка.

(1) $$y^{(n)} = f(x) \quad (5)$$

$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, то мы получим

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1$$

Дальше можно интегр-ть везде

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1(x-x_0) + C_2$$

$$y = \int_{x_0}^{x_0} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$$

$$\ldots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n \quad (6)$$

$$y''' = 1$$

$$y'' = x - x_0 + C_1$$

$$y' = (x-x_0)^2 + C_1(x-x_0) + C_2$$

$$y = \frac{(x-x_0)^2}{6} + \frac{C_1(x-x_0)^2}{2} + C_2(x-x_0) + C_3$$

93

$y_0'' = C_1$ если подставить $x = x_0$, то есть

$y_0' = C_2$ константы — это

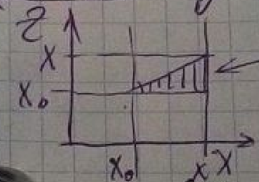
$y_0 = C_3$ нач. зн-ния.

$\tilde{y} = \int_{x_0}^{x} dx \dots \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ удовлетворяет н. у, то есть $\tilde{y}(x_0) = 0$

Можно заменить n интегрирований на одно, но уже по параметру.

рассмотрим ДУ втор. порядка.

$\boxed{n=2}$ $y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(z)dz =$



← обл-ть интегр-ие

$= \int_{x_0}^{x} dz f(z) \int_{z}^{x} dx =$

$= \int_{x_0}^{x} f(z)(x-z)dz$

$\boxed{n=3}$

$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)dx =$

$= \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-z)f(z)dz = \int_{x_0}^{x} dz f(z) \int_{z}^{x} (x-z)dx =$

$= \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^2}{2} f(z)dz.$

(с.94) $$\boxed{y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{n-1}f(z)\,dz} \quad (7)$$ ф-ла Коши

Это реш-ие ур-ия с нач. ус-ием $x = x_0$, $y = y' = \ldots = y^{n-1} = 0$

② $F(x, y^{(n)}) = 0$ (5')

разрешить отн-но $y^{(n)}$ нельзя.

Предположим, что оно может быть решено в параметр. виде $x = \varphi(t)$,

$y^{(n)} = \psi(t)$, тогда

$dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$

$dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt$

$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t)dt$ (в интеграле и содерж-ся константа, т.к. неопред-ый)

$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$

$y^{(n-2)} = \int dx \int \psi\varphi' dt =$

$= \int \varphi' dt \int \psi \varphi' dt$

В итоге получим $\begin{cases} y = \Phi(t, C_1, \ldots C_n) \\ x = \varphi(t) \end{cases}$

Если из этой системы удается исключить t, то получим общ. интеграл.

Пример (дома): $e^{y''} + y'' = x$

$y'' = t$

95

$x = t + e^t$

$dy' = t(1+e^t)dt$

$y' = \int t(1+e^t)dt \ldots$

③ $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (8)

всегда можно свести к квадратурам, для этого обозначаем $y^{(n-1)} = z$, как новую переменную.

$z' = y^{(n)} \Longrightarrow F(z, z') = 0$ (8')

3а) пусть z' можно выразить явно $z' = f(z)$ (случай 1)

$x - C_1 = \int \frac{dz}{f(z)}$ (9)

$x - C_1 = \Phi(z) \to x - C_1 = \Phi(y^{(n-1)})$.

Придем к ур-ию 5'

Пример(дома): $ay'' = -(1+y')^{3/2}$

$(x-C_1)^2 + (y-C)^2 = a^2$

④ $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ (10)

18.04.2017

$F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0$ (1)

$y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$

$z = y^{(n-2)}$ (11)

(96) $F(z, z'') = 0$. (12) называется ур-ие второго порядка.

а) $z'' = f(z)$ ур-ие 12 разрешимо относ-но произ-ей.

(12')

$$\cancel{\frac{z'}{2} z'' = f(z) \frac{z'}{2}} \qquad 2z'z'' = 2z' f(z)$$

$$(z'^2)' = 2z' f(z)$$

$$z'^2 = \varphi(z)$$

$$\varphi'(z) = f(z) z'$$

$$z' = \pm\sqrt{\varphi(z)}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}} = \pm dx$$

$$\cancel{\int dz = \pm \int \sqrt{\varphi(z)}\, dx}$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n-2)} = \pm\, \psi(x)\, C_1 C_2$$

След-но, заметим, что и ур-ие (10) интегр-ся ~~в за..~~

б) $z = \varphi(t)$ $\quad z'' = \psi(t)$

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx \qquad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx$$

$$y^{(n-1)} d^{(n-1)} = y^{(n)} dy^{(n-2)}$$

$$y^{(n-1)} dy^{(n-1)} = \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt.$$

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \varphi'(t)\psi(t)\, dt + C_1}$$

След-но, тоже сводится к квадратурам

Пример.

$$a^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$z = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$a^2 z'' = z$

$a^2 2z'z'' = z2z'$

$a^2 (z'^2)' = 2zz'$

$a^2 (z'^2)' = (z^2)'$

$a^2 z'^2 = z^2 + C_1$

$a z' = \sqrt{z^2 + C_1}$

$a\int \frac{dz}{\sqrt{z^2+C_1}} = \int dx$ что получится слева зависит от C

$C>0$ — длинный логарифм

$c<0$ — arcsin. $c=0$ → тоже ln.

$x = \pm \int \frac{a\,dz}{\sqrt{z^2+C_1}}$

$C_1 > 0$:

$y = Ae^{x/a} + Be^{-\frac{x}{a}} + \{Cx + D\}$

A, B, C, D выраж-ся через a

Уравнения, допускающие понижение порядка.

Имели дело по-прежнему с 1 неиз. 1'

Предполагаем, что есть общее реш-ие:

$\Phi(x, y, C_1 \dots C_n) = 0$

Но такое реш-ие не всегда можем получить.

(1 случай)

Иногда можно получить нек. промежуточное выраж-ие

98 $\Psi(x, y, y', \dots, y^{(k)}, C_1, \dots, C_{n-k}) = 0$ (13)

$(k<n)$

продифф.-ем по x:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}y' + \frac{\partial\Psi}{\partial y'}y'' + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)} = 0$$

дифф-ем $n-k$ раз, тогда получаем:

$$\frac{\partial^{n-k}\Psi}{\partial x^{n-k}} + \dots + \frac{\partial\Psi}{\partial y^{(k)}} y^{(n)} = 0 \quad (13')$$

система из ур-ий 13 и 13' можно исключить const.

Если в рез-те получ-ся ур-ие 1, то выражение $y^{(13)}$ наз-ся промежуточным интегралом ДУ (1)

Част. случай: $\Psi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C)$

наз-ся первым интегралом ур-ия (1) (т.к одна const)

Если проинт-ем ур-ие 13 получим выр-ие от $C_1 \dots C_k$ в совокупности с другими const получим общее реш-ие ДУ (1), зависящ. от n постоянных.

(99)

Каждое решение ур-ия (13) будет р-ием ур-ия (1). И наоборот, что мы (при условии, что можем разрешить систему (3')).

Теоретически: происходит понижение порядка (до k).

Замечание: Если мы знаем 2 первых интеграла, то теорет-ки мы можем исключить произв-ую n-1 порядка и получить ур-ие порядка (n-2). Это ур-ие будет содержать c_1 и c_2.

$$\Psi_1(x,y,y',\dots,y^{(n-1)},c_1) \text{ и } \Psi_2(x,y,y',\dots,y^{(n-1)},c_2)$$

Если будет изв-но n первых интегралов, то теор-ки из такой системы мы можем выразить y через $c_1 \dots c_n$, т.е. найти общее реш-ие без интегрирования.

Св-ва надо почитать насчёт промежуточного интеграла.

Если рассматривать ДУ как многообр. пов-ть, то знания определяются некоторые гиперповерхности (на 1 меньше), р-ие будет проходить внутри них (нет оснований полагать так).

(100) $F(x, y^{(k)} \dots y^{(n)}) = 0$ (14) (2 случай)

ДУ не содержит ф-ию и ее младшие произ-ые.

$z = y^{(k)}, \dots \quad z^{(n-k)} = y^{(n)}$

$F(x, z, \dots z^{(n-k)}) = 0 \Rightarrow$ порядок понизился

3 случай

$$F(y, y' \dots y^{(n)}) = 0 \quad (15).$$

Введем $p = \frac{dy}{dx}$ $\quad p = p(y)$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = p'p$$

ММИ можно доказать, что

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = p^{(n-1)}p \, f\left(p, \frac{dp}{dy} \dots \frac{d^{(n-1)}p}{dy^{(n-1)}}\right)$$

Дома вывести $\frac{d^3y}{dx^3} = \dots$

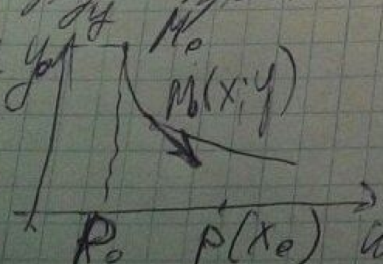
В итоге получим

$\tilde{F}(y, p, \dots p^{(n-1)}) = 0$ (15'). получим

$\Phi(y, p, C_1, \dots C_{n-1}) = 0$ общий интеграл.

Останется подставить и еще раз проинтегрировать.

Пример



Точка P двиг-ся по оси X с постоянной скор-тью имеет коорд. x_0

(101) $X = x_0 + at$

Точка M_0 дв-ся так, что ее вектор ск-ти всегда направлен на P

$dx^2 + dy^2 = v^2 dt$ $\quad v > a$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{X - x}$ Получаемые линии наз-ся линиями погони

$$y'' = \frac{a}{v}\frac{y'^2}{y}\sqrt{1+y'^2}$$

$p = \frac{dy}{dx}$ $\quad y'' = p'p$

$$p'p = \frac{a}{v}\frac{p^2}{y}\sqrt{1+p^2}$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{a}{v}\frac{p}{y}\sqrt{1+p^2}$$

$$\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}} = \frac{a}{v}\frac{dy}{y}$$

$$\frac{\frac{dp}{p^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1}} = \frac{a}{v}\frac{dy}{y}$$

$\frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2}+1} = (Cy)^{a/v}$ — получили промежут. интеграл

$\frac{1}{p} = 0$ (в нач. момент при $x = x_0$)

$\frac{1}{p} + \sqrt{\frac{1}{p^2}+1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{a/v}$ и приравняем ($y = 0$)

1) Абсцисса точки встречи?

2) Продолж-ть погони? (Дома)

з) Понижение порядка однородных ур-ий.

$\forall k$ (16)

(102) $F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

однородное степени m

Если $y_1(x)$ – решение ДУ (1), то $cy_1(x)$ тоже будет реш-ием на ов-ду (16).

Введем $u = \ln y$

u_1 – реш-ие, $u_1 + \ln c = u_1 + C$ – тоже реш.

то есть наше ДУ допускает группу преобраз-ий:

$x_1 = x$

$u_1 = u + C$

f-начит в ДУ ф-ия u не должна входить

Итог: в ДУ нет зависимости от u

$F(x, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0 \qquad z = u'$

$F(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0 \qquad (u = \ln y)$

$y = e^{\int z\,dx}$ (17)

Д/з. $x^2 y y'' = (y - xy')^2$

27.04.2017

$\downarrow$

$u = \ln y \qquad y = e^u \qquad y' = u'e^u, \; y''$

$y'' = u''e^u + u'^2 e^u$

23.
24.
103

$x^2 e^u e^u (u''+u'^2) = (e^u - x e^u u')^2 \quad e^{2u} \neq 0$

$x^2(u''+u'^2) = (1-xu')^2$

$z = u', \ z' = u''$ получили ур-ие перв. порядка

$x^2(z'+z^2) = (1-xz)^2$

$x^2 z' + x^2 z^2 = 1 - 2xz + x^2 z^2$

Ответ: $z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}$

далее возвращаемся к замене и интегрируем.

$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y \dots d^n y) = 0$

Пусть $\Phi(\quad) = 0$ относит-но

x, dx — однородная степени 1

$y, dy, d^2y \dots d^n y$ — однородна ст-ни m

тогда $\frac{dy}{dx}$ — $(m-1)$

Φ если $\frac{d^2y}{dx^2}$ будет иметь однород-ть ст-ни $(m-2)$

$x = e^{\xi}$

$y = ue^{m\xi}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{m\xi}du + mue^{m\xi}d\xi}{e^{\xi}d\xi} = e^{(m-1)\xi}\left(\frac{du}{d\xi} + mu\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{d\xi}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d\xi}{dx} = e^{(m-2)\xi}(\dots)$$

И так можно рекуррентно постигать пр-ие к порядку в результате которых выр-ие -х содержит e^{ξ} - однор. ст.

$y = ue^{m\xi}$ - однор. ст m.

Использ-ся св-во ф-ии Ф мы можем вынести экспоненту исчезнет зав-ть от x. (m и относит. (e^{ξ}) к общим множителям и перенос на единицу.

Пример:

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} - (x^3 + 2xy)\frac{dy}{dx} + 4y^2 = 0$$

$2m$

$4 + m - 2$

найдется ли m чтобы все три выр-ие совпадут?

$m = 2$ $\quad 3 = 1 + m$ (в) при $m = 2$

Тогда каждое слагаемое имеет степень одн-сти 4 тогда это ур-ие подходит! тогда переходим к новым коорд-там.

$$\begin{cases} x = e^{\xi} \\ y = ue^{2\xi} \end{cases}$$ решаем $\Rightarrow$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + 2(1-u)\frac{du}{d\xi} = 0.$$

исчезла зав-ть от ξ это специальное выр-ие.

u - нез. перем.

$$\frac{du}{d\xi} = p$$

24.

105

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \left(\frac{d}{du}p\right)\frac{du}{d\xi} = p\frac{dp}{du}$$

$$p\frac{dp}{du} + 2(1-u)p = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} p = 0 \\ \frac{dp}{du} + 2(1-u) = 0 \end{array}\right.$$

1) $u = C_1$

$$\frac{y}{e^{\xi}} = C_1 \Rightarrow y = e^{\xi}C_1$$

2) $p = u^2 - 2u + C_1$

$$y = \frac{(-1+\alpha)x^2 - C_2(1-\alpha)x^{2\alpha+2}}{1 - C_2x^{2\alpha}}$$

$C_1 = 1 - \alpha^2$ (усл-ие вещест. корней.

если корни компл. сопр-ые

$C_1 \neq 1 - \alpha^2$ рассмотр. самост-но.

Пусть

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = \frac{d}{d}\Phi(x, y, y'$$

или это усл-ие вып-ие тождественно по всем пер-ым, то $F = 0$ будет реш-ием $\Phi = C$

И наоборот кажд. реш-ие $\Phi = C$ будет решением F

(проверяется диффер-ием)

Тогда можно понизить порядок.

$y'' - xy' - y = 0$ надо увидеть пр[illegible]

$$(y' - xy)' = 0.$$

$y' - xy = C_1$ ф-ия Лапласа?

(106) $y = e^{x^2/2}\left(C_1 \int e^{-x^2/2}dx + C_2\right)$

Это общее решение

Другие ф-ии мы не будем рассматривать, они более специфичные.

Линейные ДУ порядка n.

Опр ДУ порядка n в котором y и его пр-ые входят в первой степени, наз-ся линейным.

Имеет вид:

(1) $a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = F(x)$

$a_0(x), \ldots, a_n(x), F(x)$ — заданные непрер ф-ии на интервале (a, b). Если на (a, b) $a_0(x) \neq 0$ можно поделить

(1') $y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = f(x)$

Когда $a_0(x) = 0$ мы не будем рассматривать, т.к. там сложно.

Если $f(x) \not\equiv 0$, ур-ие наз-ся линейным неоднородным.

$f(x) \equiv 0$ — однор. ЛУ.

С $\forall$ неоднор однозначно связано однородное

(2) $y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0$

Общие св-ва лин ДУ n порядка

1) ур-ие остается линейным при замене независимой переменной

107

$x = \varphi(\bar{x})$ (3)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\bar{x}}{dx} \cdot \frac{dy}{d\bar{x}}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\bar{x}}} = \frac{1}{\varphi'} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'}\frac{dy}{d\bar{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'}\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\varphi'}\frac{d}{d\bar{x}}\left(\frac{1}{\varphi'}\frac{dy}{d\bar{x}}\right)$$

ММИ можно доказать, что $\frac{d^ky}{dx^k}$ выраж-ся через $\frac{dy}{d\bar{x}} \dots \frac{d^ky}{d\bar{x}^k}$ линейно и даже однородно. Если $\frac{dy}{dx}$ заменить на const она будет выраж-ся

2) ур-ие остается линейн. при замене

$y = u(x)z + v(x)$ (4)

$y' = u'z + uz' + v'$

$y'' = u''z + u'z' + u'z' + uz'' + v''$

пр-ая порядка k будет выр-ся линейно (док-ся аналогично через) но уже неоднородно т.к. k нужно для получения читаемого выражения м-ва добавок v' и v''

$y = u(z)z$ (5)

Замечание: если перепишем в виде $y^{(n)} = -p_1 y^{(n-1)} - \dots - p_{n-1} y' - p_n y + f(x) = F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

108

$\Downarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial y^{i}} = -p_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

например $\frac{\partial F}{\partial y'} = -p_{n-2}$

$[a, b]$ по $\forall$ Коши будет $\exists!$ решение, которое при $x = x_0$ принимает значения $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ y - числа

Для лин. уравн. Т. о единственности верна на всем отрезке $[a, b]$.

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{d}{dx} + p_n \quad (6)$$

(6) – линейный дифференциальный оператор порядка n

(2') $L[y] = 0$ (оператор действует на y)

Св-ва оператора:

1) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$

109

2) $L[cy] = cL[y]$

св-ва линейности тогда.

Теорема 1 если y_1 и y_2 — частное реш-ие ур-ния 2" то их сумма тоже решение

Теорема 2 если y — решение ур-ия 1" то и Cy — тоже решение

Следствие: если $y_1, \ldots y_n$ — частное решение 2" ~~нелин~~, то их лин. комбинация

$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ (7) явл-ся решением содержащим n произвол. постоянных, а если все они существенные то 7 будет общим решением.

07.05 2017 110

$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$

$p = p(x)$

Опр. ф-ии $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ наз-ся линейно зависимыми на (a, b), если $\exists\ \alpha_1, \alpha_2$ $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \neq 0$ (т.е. не все равные 0) такие, что

(8) $\alpha_1 \varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Если ур-ие (8) вып-ся только для нулевых констант, ф-ии явл-ся лин. независ.

1) Если присутствует $\varphi_n = 0$ (нулевая ф-ия), то $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — лин. завис. поскольку можем $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$ выбрать $\alpha_n \neq 0$.

2) $1, x, \ldots, x^n$ на $(-\infty, +\infty)$ будут лин. независимы. Т.к. $\alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots \alpha_n x^n = 0$ вып-ся только для конечного числа x. ур-ие имеет не более двух решений

3) Пусть имеются $0 < k_1 < \ldots < k_n$ (какие-то числа) тогда $x^{k_1}, \ldots, x^{k_n}$ на $[0, +\infty)$ (например)

$\alpha_1 x^{k_1} + \ldots + \alpha_n x^{k_n} = 0$

для целых k рассуждение аналог. 2)

(число корней лин-ная конечно)

Или $k_1 \ldots$ — неравные, можно вынести λ в наим. степени.

$$\lambda^{k_1}(\alpha_1 + \alpha_2\lambda^{k_2-k_1} + \ldots + \alpha_n\lambda^{k_n-k_1}) = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2\lambda^{k_2-k_1} + \ldots + \alpha_n\lambda^{k_n-k_1}) = 0$$

переходим к пределу

тогда $\alpha_1 = 0$

Затем вынесем $k_2 \ldots k_n$

в итоге $\ldots$ $\alpha_n = 0$

таков., лин. независимы

4) $\sin^2 x, \cos^2 x, 1$

$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$. тогда они лин. зависимы $x \in (-\infty; +\infty)$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$

5) $\sin x \; \cos x \; 1$

будет счётное число корней (то есть не везде будет выч-ся $= 0$) $\Rightarrow$ лин. незав.

<u>Определитель Вронского (W)</u>

(вронскиан)

Пусть имеется ф-ия $y_1 \ldots y_n$

с непрерыв. пр-ными до $n-1$ порядка включительно

Составим из них опред-ль

Это и будет опр-ль Вронского

24.

112

$$W[y_1,\dots y_n]=\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Необх. усл-ие лин. завис-ти ф-ий — теорема 3

Если ф-ии $y_1, \dots y_n$ лин. зависимы, то вронскиан тождественно равен 0 на этом интервале.

Д-во. Пусть $\exists\ \alpha_1, \dots \alpha_n$, что $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ (10)

Пусть $\alpha_n \neq 0$, тогда поделим на α_n

$$y_n = \beta_1 y_1 + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1} \quad (11)$$

$$y_n' = \beta_1 y_1' + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}'$$

$$\overline{y_n^{(n-1)} = \beta_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}} \quad (11')$$

если подставить вместо последнего столбца W выр-ия (11') получим столбец, пропорциональное первому столбцам, тогда опр-ль $= 0$. ■

Замечание: обратное утверждение вообще говоря неверно!(

~~$y=0$ $y'=0$~~

Пример.

1) $y_1 = x^2$ $\quad y_2 = x|x|$ $\quad x>0$: $y = x^2$; $\quad x<0$: $y = -x^2$, $y' = -2x$

они дифф-емы 1 раз

$y=0 \Rightarrow y'=0$ (считать по опр-ию через пределы)

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| = x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = 0 \quad x > 0.$$

аналогично, для $x = 0$, $x < 0$.

$W \equiv 0$.

$\alpha x^2 + \beta x|x| = 0$ * $(-\infty; +\infty)$ или другой интервал, содерж-ий и ноль и отриц, имеет место

если только $+ \to x^2\ x^2$

если только $- \to x^2\ x^2$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

вывод: комбинация * равна 0 только если $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow$ ф-ии лин. незав.

Если $y_1 \ldots y_n$ − частное реш-ие лин. однор. ур-ия порядка n, то справедлива соотв. теорема 4.

Теорема 4. Если $y_1 \ldots y_n$ решения лин. ур-ия линейно независимы на (a, b), то W не обращается в ноль ни в одной точке интервала.

(не $\exists$ лин. одн. ур-ия, для которого $y_1 = x^2$ и $y_2 = x|x|$ были бы решениями)

Д-во: Пусть $W(x_0) = 0$

$y_i(x_0) = y_{i0}$ ... $\quad i = \overline{1, n}$

$y_i'(x_0) = y_{i0}'$ $\quad y_i^{(n-1)}(x_0) = y_{i0}^{(n-1)}$

(114)

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + \ldots + C_n y_{n0} = 0 \\ C_1 y'_{10} + \ldots + C_n y'_{n0} = 0 \\ \ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

лин. одн. система отн-но C.

$\Delta = W(x_0) = 0$ предположили.

$\Rightarrow$ система 12 имеет нетрив. реш-ие. (т.е. $C_1 \ldots C_n$ – нетрив.)

составим такую комбинацию

$\tilde{y} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ – реш-ие исх. ур-ия

по теоремам 1, 2.

(умнож. на константу, сложение реш-ий – тоже реш-ие)

Посмотрим какие зн-ия принимает $\tilde{y}$ и его пр-ые.

$\tilde{y}(x_0) = C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0$.

$\tilde{y}'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0$.

$\tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$

Нач усл-ия для $\tilde{y}$ нулевые

А для лин. ур-ия на всем (a, b) работает теорема о $\exists$ единств-ти. (если есть нач набор, то это реш-ие единств-но) $y \equiv 0$ – решение

$\tilde{y} \equiv 0$

Среди $C_1 \ldots C_n$ есть $\neq 0$ (предполож)
~~и что~~ кроме того $y_1 \ldots y_n$ лин. независим.
получили противоречие
(т.к. их комбинация $= 0$) ▤

Т3 и Т4 можно объединить;

Теорема 3-4. Опр-ль Вронского для системы n решений лин. однор. ур-ия порядка n или тождеств. равен 0 и эти реш-ия лин. зависимы или не обращ-ся в ноль ни в одной точке промежутка, где коэф-ты ур-ия непрерывны, и эти решения линейно независимы.

Опр. $\forall$ набор ~~н~~ лин. независ. част. решений лин. однор. ур-ия назыв-ся фундаментальной системой решений (ФС)

Теорема 5. Для всякого лин. однородного ур-ия $\exists$ ФС.

Д-во: возьмем a_{ik} такие, что (произв. набор)

$\det(a_{ik}) \neq 0$ (13) $\quad i \in [1; n]$, $k = \overline{1, n}$

определим n частн. реш-ий ур-ия $(y_1 \ldots y_n)$,

если $x = x_0$, то $y_i(x_0) = a_{i1}$

$y_i'(x_0) = a_{i2}$

116

$y_i^{(n-1)}(x_0) = y_{in}$

Тогда $\det(a_{ik}) = W(x_0) \neq 0$ по усл.

Тогда по теор. 3 $y_1 \ldots y_n$ – лин. незав.

Т.к. они образуют фундам. систему.

Если выбрать a_{ik} специальным образом, например:

$a_{ik} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$ (символ Кронекера)

$y_1(x_0) = 1, \quad y_1'(x_0) = 0, \quad \ldots \quad y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$

$y_2(x_0) = 0, \quad y_2'(x_0) = 1 \quad \ldots \quad y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$

$a_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Если матрица a_{ik} выбрана в таком виде, то соответствующая ей ФС наз-ся нормальной.

Теорема 6. Если $y_1 \ldots y_n$ образуют ФС ЛОУ, то общее решение ЛОУ имеет вид $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ (*)

где $C_1 \ldots C_n$ – произв. постоянные

Д-во: $x = x_0, \; y_0, \; y_0' \ldots y_0^{(n-1)}$ (14)

(пусть есть задача Коши).

117

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + \dots + C_n y_{n0} = y_0 \\ \dots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + \dots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (15)$$

имеет ед. решение, когда

$\Delta \neq 0$

$\Delta = W(x_0) \neq 0$,

поскольку это ФС, её опр-ль отличен от нуля.

Вывод: система 15 имеет ед. реш. (найдутся такие $C_1 \dots C_n$)

* будет ...

Пример: $y'' - y = 0$

угадаем решения: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{общее решение}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

найдем нормальн. ФС, то есть такие $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$

$\hat{y}_1(0) = 1$ $\quad \hat{y}_1'(0) = 0$

$\hat{y}_2(0) = 0$ $\quad \hat{y}_2'(0) = 1$

$$\hat{y}_1 = a y_1 + b y_2 \Rightarrow x = 0: \begin{cases} a + b = 1 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

$$\hat{y}_2 = c y_1 + d y_2$$

усл. произв-ых при $x = 0$: $\begin{cases} a - b = 0 \\ c - d = 1 \end{cases}$

решаем эту систему, тогда (118)

$\hat{y}_1 = \operatorname{ch} x$

$\hat{y}_2 = \operatorname{sh} x$

общее реш. имеет вид: $y = y_0 \hat{y}_1 + y_0' \hat{y}_2$

Теорема 7. Если имеем $n+1$ частное решение $y_1 \dots y_n, y_{n+1}$ ЛОУ порядка n, то ф-ия y зависимы

Д-во: 1 вариант (случай): $y_1 \dots y_n$ — л. зав., то $y_1 \dots y_n, y_{n+1}$ — л. зав.

2 вариант: $y_1 \dots y_n$ — лин. незав. Тогда они образуют ФС и люб. решение — это выражение * т.е. $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ в частности и y_{n+1} ($y = y_{n+1}$) тогда доказано ■

Теорема 8. Если 2 лин. однор. ур-ия со старш. коэф-том 1

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

$$y^{(n)} + \tilde{p}_1 y^{(n-1)} + \dots + \tilde{p}_{n-1} y' + \tilde{p}_n y = 0 \quad (16)$$

имеют общую ФС, то коэф-ты совпадают $p_i(x) \equiv \tilde{p}_i(x)$

Д-во: вычтем их.

$(p_1 - \tilde{p}_1) y^{(n-1)} + \ldots + (p_n - \tilde{p}_n) y = 0$ (1.19)

$p_1 - \tilde{p}_1 \neq 0$ (α_1, β_1) на каком-то интервале

$y^{(n-1)} + q_1 y^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1} y = 0$

имеет те же решения что и ур-ие 16.5 на паре промежутков (ФС) (из $n-1$ реш.) и (из n реш.)

$\Rightarrow p_1 \equiv \tilde{p}_1$

$(p_2 - \tilde{p}_2) y^{(n-2)} + \ldots = 0$

(17) $p_2 \equiv \tilde{p}_2$ (все коэф-ты равны)

$p_n \equiv \tilde{p}_n$

$\blacksquare$

Следствие из Т8! 11.05.17.

ФС решений однозначно определяет лин. одн. ДУ со старш. коэф-том 1

Д-во: Пусть известна ФС требуется найти ДУ на каком-то (a, b), которому удовлетворяет эту систему ФС

ФС: $y_1, \ldots, y_n$

$$W[y_1 \ldots y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \ldots & & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$ (T8)

Если к ФСР добавим еще 1 решение — y (120)

получим лин. зав. С, т.е.:

$$W[y_1 \dots y_n, y] = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n & y \\ y_1' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

Разложим по послед. столбцу

$$y^{(n)} \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}}_{W[y_1 \dots y_n] \neq 0} - y^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots \pm (-1)^n y \begin{vmatrix} y_1' & \dots & y_n' \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

поделим на W

получим ДУ n порядка со старш. коэф. единица.

$$p_1 = - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ \dots & & \dots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1 \dots y_n]} = -\frac{W'}{W}$$

← производная вронскиана

все нули до строки $y^{(n-1)} \dots y_n^{(n-2)}$)

отсюда можно найти W через p_1

$$W = Ce^{-\int p_1(x)dx}$$

(127) Используя н.у.

$x = x_0$; $W = W(x_0)$

$$\boxed{W = W(x_0)e^{-\int p_1(x)dx}}$$

ф-ла Остроградского Лиувилля.

W опр-ся нач. зн-ием и коэф-том p_1

Д/з $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$

y_1 — частн. решение

если y — др. решение

$$W[y_1, y] = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1 dx}$$

$y = ?$ через y_1 и интеграла от выражения и const.

Замечание 1. Всякое однор. лин ДУ имеет бесконечн. мн-во ФС

Замечание 2. пусть $y_1 \ldots y_n$ — ~~ФС~~ (какие-то набор ЛН ф-ций, не решений!)

если $W \neq 0$ в (a, b), то ф-ла 18 дает ДУ, имеющее данную систему ф-ций в качестве ФС

Но поскольку $y_1 \ldots y_n$ — произволь-

(122) ное лежу функции, то усл-ие $W \neq 0$ в (a, b) надо рассматривать как новое требование (а на самом деле это и есть старш. коэф.)

Замечание 3. если составлять ДУ, допускающее в качестве ~~фч~~ ФС заданную систему лин. н/з ф-ций, то точки, в которых $W=0$ будут особыми точками ур-ния (поскольку старш. коэф. обращ-ся в ноль). Мы такие случаи не рассм.

Пример. $y = ?$ найти такое ДУ, для кот. эта пара явл. ФС

$\cos x, \sin x$

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x & y \\ -\sin x & \cos x & y' \\ -\cos x & -\sin x & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

$p_1 = 1$ (при y'')

$p_2 = 0$ (при y') $\Rightarrow$

$p_3 = 1$ (при y).

$$y'' + y = 0$$

Д/З. $y = ?$ $\cos^2 x, \sin^2 x$

123

Понижение порядка линейного однородного ДУ.

$L[y] = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = 0$ (3')

при замене y и его пр-ых на $ky, \ldots, k$ воспроизводится и ур-ие однор. в другом смысле.

Первый смысл однор-ти: можно сделать замену $y = e^{\int z\,dx}$

$\Rightarrow$ для z ур-ие $n-1$ порядка

Практически эта подст-ка бывает неудобна, т.к. оно перестает быть однородн.

Если известно y_1 - част. реш, то можно избежать проблемы перехода от однородного к неодн.

Можно с помощью введения нов ф-ии $y = y_1 z$ получить переход от однор. к однор. (2.1)

$y' = y_1' z + y_1 z'$

$y^{(n)} = y_1^{(n)} z + C_n^1 y_1^{(n-1)} z' + \ldots + y_1 z^{(n)}$

Если эти выр-ия подставить в (3'), получим коэф-ты при z: $y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y_1$ получим из предпост. выр-ия.

124

а поскольку y_1 – реш

$y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \dots + p_n y_1 = 0$.

вывод: ур-ие не содержит z, только $z^{(n)} \dots z'$ $\Rightarrow u = z'$

$u^{(n-1)} + q_1 u^{(n-2)} + \dots + q_{n-1} u = 0$ (22).

$u_1 \dots u_{n-1}$ – ФС (пусть нашли).

$z_1 = \int u_1 dx, \dots, z_{n-1} = \int u_{n-1} dx$

если u_i знаем, находим z с точностью до интегр-ия

тогда по ф-ле 21 получаем ФС неоднор. ур-ия.

ФС(3'): $y_1, y_1 \int u_1 dx \dots y_1 \int u_{n-1} dx$

но, вообще говоря, надо док., что это ФС (лин. нез.)

Д-во (от противного.

Пусть вып-ся: $C_1 y_1 + C_2 y_1 \int u_1 dx + \dots + C_n y_1 \int u_{n-1} dx$ $\ne 0$

$C_1 + C_2 \int u_1 dx + \dots + C_n \int u_{n-1} dx = 0$.

продиф-ем по x

$C_2 u_1 + \dots + C_n u_{n-1} = 0$, а это противоречит усл-ию, что u_i – ФС

$\Rightarrow$ все $C_i = 0$ $i = \overline{1,n}$

а поскольку $y_1 \ne 0$, то $C_1 = 0$.

противоречие, $\Rightarrow$ ФС(3') действ. ФС ▭

Замечание: если известны m частн. реш-ий (они лин. нез.)

125 $y_1 \dots y_m$, можем последовательно понижать порядок. В результате порядок ур-ия понизится до $n-m$.

Если изв-но $n-1$ част. реш-ие ($m = n-1$), то ур-ие можно проинтегрировать 1 раз и получ. реш.

Д/З. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$

$y_1 = x$, $y_2 = x^2$

Неоднор. лин. ДУ

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x) \quad (1')$$

$$L[y] = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0 \quad (3')$$

Теорема. Если изв-но какое-нибудь част. решение ур-ия (1'), то общ. решение этого ур-ия имеет вид

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} \quad (23)$$

Д-во: обозначим $y = y_ч + z$ (*) – решение 1'

$L[y] = L[y_ч] + L[z] = f(x)$ лин. оператор суммы равен сумме лин. операторов

$f(x) + L[z] = f(x)$

$L[z] = 0$

z – реш. одн. ур-ия 3'.

(126) ФС (31'): $y_1 \dots y_n \Rightarrow$ общ. реш (31)

$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$

содержит n произв. постоян.

т.к. явл-ся кандидатом в общ. реш-ие, поэтому

$$y = y_ч + C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \quad (24)$$

Но надо док, что реш ✓ (что это общ. решение)

набора нач. данных

$x = x_0, \ y = y_0, \ y' = y_0' \dots$

по нач. данным C_i, что эти нач. данные будут вып-ся. (что они входят существенным образом, то есть имеет место задача Коши)

$$\left.\begin{aligned} y' &= y_ч' + C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' \\ &\dots \\ y^{n-1} &= y_ч^{(n-1)} + C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \end{aligned}\right\} (25)$$

Подставим $x = x_0$, получим n ур-ний с n неизвестными (24, 25) C_i. Определитель этой системы это вронскиан ФС $y_1 \dots y_n$

$\Delta = W(x_0) \neq 0$.

Значит система (24, 25) имеет единств. решение (набор C_i)

Доказана существенность C_i ■

127

Понижение порядка лин. одн. ДУ.

Пусть известно y_1 — частн. реш. соответст. однор. ур-ия.

$y = y_1 z$

Для z получ-ся д-е ур-ие, где самих z отсутствует, есть только $z' \dots z^{(n)}$, что будет лин. однор. ДУ.

$u = z'$ => ур-ие $(n-1)$ порядка лин. одн. для u.

Пусть изв-но m решений

$y_1 \dots y_m$ — лин. нез. реш. (3')

придем к ур-ию порядка $n-m$

$y_1 \dots y_r$ — частн. лин. нез. реш. (1')

$y = y_1 + z$, $z = y - y_1$

тогда z удовлет. ур-ию 3'

можем получить $r-1$ решение одн. ур-ия из частн. р-ий неод.

$y_2 - y_1, y_3 - y_1, \dots y_r - y_1$ — $r-1$ част. решение 3'.

$n-(r-1)$ понижение порядка.

Д/з. $(2x-x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$.

$y_1 = 1$, $y_2 = x$

24.

(128)

с пом. част. реш. преобр. до конца ур-ие метод подбора.

Метод вариации постоянных

Теорема: если известна ФС соответствующего однор. ур-ия, то общ. решение неод. ур-ия может быть найдено в квадратурах.

Д-во: $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$ ← так общ. реш. од. ур. в окр-се через ФС

будем искать част. решение с произвольными $C_1 \ldots C_n$

$y_r = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n$

нужно n условий

первое усл-ие: решение y_r удовлетвор. (1')

16.05.2017

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \quad (1)$$

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_n y = 0 \quad (3)$$

$y_1 \ldots y_n$

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \quad (*)$$

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$$

$$y' = C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n + C_1 y_1' + \ldots + C_n y_n'$$

потребуем, чтобы $C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0 \quad (26.1)$

(129) $y' = C_1 y_1' + \ldots + C_n y_n'$

$y'' = \underbrace{C_1' y_1' + \ldots C_n' y_n'}_{=0} + C_1 y_1'' + \ldots + C_n y_n''$ (тоже требуем)

$C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' = 0$ (26 2)

— — — — —

$y^{(n-1)} = C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} + C_1 y^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}$

$C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0$ (26_{n-1})

$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}$ (27_{n-1})

$y^{(n)} = C_1' y^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} + C_1 y_1^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}$

Слагаемые, содержащие C_i пропадут в результате подстановки в (3)

$L[y] = C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$ (26_n)

получим и условий на неизвестное C'

$L[\Sigma C_i y_i] = C_i \Sigma L[y_i] = 0$

$C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0$

$\ldots$

$C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0$

$C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$

Определитель этой системы (каждый раз пр-ные) это W

$\Delta = W(x) \neq 0$.

24.

130

части даст вещ. ур-ие. u и v должны обра-щ в усл-ие в 0 => u и v по-отдельности решения:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Если $k_1 = \alpha + i\beta$ — корень, то

$k_2 = \alpha - i\beta$ — корень. Подставив сопряженное в 5' по-прежнему будет равн-ся 0, но только будет $\frac{1}{k}$

$$k_1 \sim e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$$
$$k_2 \sim e^{\alpha x}\cos\beta x,\ -e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$k_1, k_2 \sim 2$ л. решения (лин. незав.)

k_1 — кратности m_1, ...

k_p — кратности m_p тогда

вып-ся усл-ие: $2m_1 + \dots + 2m_p = n$

$$m_1 + \dots m_s + 2m_{s+1} + \dots + 2m_p = 0$$

3 случай: кратные корни.

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$ (ф-ла Лейбница)

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

1

1 1

1 2 1

(13) $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \dots + C_n^{n-1} u' v^{(n-1)} + u v^{(n)}$

$(uv)^{(n-1)} = u^{(n-1)}v + C_{n-1}^1 u^{(n-2)} v' + \dots + C_{n-1}^{n-2} u' v^{(n-2)} + u v^{(n-1)}$

...

$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(uv)^{(0)} = uv$

последнюю умнож на a_n, вторую на a_1 и сложим:

$$L[uv] = vL[u] + \frac{v'}{1!}L_1[u] + \frac{v''}{2!}L_2[u] + \dots + \frac{v^{(n-1)}}{(n-1)!}L_{n-1}[u] + \frac{v^{(n)}}{n!}L_n[u] \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} L_1[y] &= ny^{(n-1)} + (n-1)a_1 y^{(n-2)} + \dots + 2a_{n-2}y' + a_{n-1}y \\ L_2[y] &= n(n-1)y^{(n-2)} + (n-1)(n-2)a_1 y^{(n-3)} + \dots + 2a_{n-2}y \\ &\dots \\ L_{n-1}[y] &= n(n-1)\dots 2y' + (n-1)(n-2)\dots 1 a_1 y \\ L_n[y] &= n(n-1)\dots 2 \cdot 1\, y \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$L_k[y]$ — можно считать произв. порядка k от L

L получ-ся дифф-нием по y, если вместо производных степень рассматривать

ф-ла 14 справедлива для любого дифф оператора, не обязат-но с постоян. коэф-ми.

$C_i' = \varphi_i(x)$

$C_i = \int \varphi_i(x)dx$

$y = C_1y_1 + \dots + C_ny_n + y_1\int\varphi_1(x)dx + \dots y_n\int\varphi_n(x)dx$

Линейное ур-ие с постоян. коэф-тами

предполагаем, что $a_i = const$

Достаточно найти ФС и решение запишется в виде *.

$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$ (1)

$y' = k e^{kx}$, $y^{(n)} = k^n e^{kx}$ (3)

(2) $y = e^{kx}$ (рассмотрим ее т.к. после дифф-ия они будут оставаться, их же можно будет сокращать)

$L[e^{kx}] = e^{kx}(k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_{n-1}k + a_n)$ (4)

$F(k) \equiv k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_{n-1}k + a_n$ (5)

→ характеристич. многочлен

$k^n + a_1k^{n-1} + \dots + a_{n-1}k + a_n = 0$ (5')

(из усл-ия 1) ↓

характеристич. ур-ие

Многочлен имеет n корней с учетом кратности

1 случай: $k_1, \dots k_n \in \mathbb{R}$ — корни (6)

$y_1 = e^{k_1x}, \dots, y_n = e^{k_nx}$

$y = C_1e^{k_1x} + \dots + C_ne^{k_nx}$ (общ. решение, причем только доказать, [illegible] что $y_1 \dots y_n$ — ЛНЗ)

Докажем лин. нез-ть, рассмотрев W; по св-ву опр. можно вынести

(13)
$$W=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & \dots & e^{k_nx} \\ k_1e^{k_1x} & \dots & k_ne^{k_nx} \\ \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1}e^{k_1x} & \dots & k_n^{n-1}e^{k_nx} \end{vmatrix} = e^{(k_1+\dots+k_n)x}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ k_1 & \dots & k_n \\ \vdots & & \vdots \\ k_1^{(n-1)} & \dots & k_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

опр-ль Вандермонда

$$= e^{(k_1+\dots+k_n)x}(k_2-k_1)\dots(k_n-k_1)(k_3-k_2)\dots(k_n-k_2)\dots(k_n-k_{n-1})\neq 0$$

Вандермонд. Это из курса линала, справедливо (не будет повтору), доказана лин. нез-ть.

Пример:

$$y''-3y'+2y=0$$

$$k^2-3k+2=0, \quad k_1=1, \quad k_2=2$$

$$y_{oo}=C_1e^x+C_2e^{2x}$$

2 случай: $k_1\in\mathbb{C}$, $k_1=\alpha\pm i\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$e^{(\alpha+i\beta)x} \quad (9)$$

$$f(x)=u(x)+iv(x) \quad (10)$$ можно представить

Лемма: Если есть комплекс. решение вида 10 у ур-ия (1) (не обязательно с постоян. коэф-ми), то ф-ии u и v по отдельности явл-ся решениями ур-ия 11.

$$L[y]=0 \quad (11)$$

Д-во:

Поскольку L — лин. опер., сумма равна сумме действ-ий на всех.

если $a_i = const$, тогда L действ. на y дает характер. мн-н. (134)

$L[y] \sim F(k)$ и тогда

$L_r[y] \sim F^{(r)}(k)$ (16) (L_r дает производную по k характ. мн-на)

$F_r(k) = F^{(r)}(k)$ (16') ?

Если корни кратности k, общее число корней ↓ => нужны еще ф-ии.

Пусть k_1 – корень кр-ти m_1, то $F(k_1)=0$

и произв-ые до порядка $n-1$ обращаются в ноль

$F'(k_1)=0 \dots F^{n-1}(k_1)=0$ (это утв-е без док-ва)

но $F^{(m)}(k) \neq 0$.

$u = e^{k_1 x}$ (выбираем), а $v = x^{m_1}$

$$L[x^m e^{k_1 x}] = x^m L[e^{k_1 x}] + m x^{m-1} L_1[e^{k_1 x}] + \dots + C_m^{n-1} x L_{n-1}[e^{k_1 x}] + C_m L_m[e^{k_1 x}]$$

действие L на экспоненту дает эксп-ту на характ. мн-ен.

$$L[x^m e^{k_1 x}] = e^{k_1 x}[x^m F(k_1) + C_m^1 x^{m-1} F'(k_1) + \dots + C_m^{m-1} x F^{(m-1)}(k_1) + F^{(m)}(k_1)] \quad 17$$

$F(k_1), F'(k_1) \dots$ обращ. в ноль до тех пор, пока $1 < m \le m_1 - 1$

$e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x} \dots x^{m_1-1} e^{k_1 x}$ (18) — m_1 решений ДУ

135 Число реш-ий соответствует кратности (m_1) корня.

Остается док-ть, что они образуют ФС.

Предположим, что лин. зав-ть есть

$$\sum_{r=1}^{p} \left(A_0^{(r)} + A_1^{(r)} x + \dots + A_{m_r-1}^{(r)} x^{m_r-1}\right) e^{k_r x} \equiv 0$$

(r) — это не производная! и не степень! Это просто индекс.

$A_i^{(r)}$ — const

$$\sum_{r=1}^{p} P_r(x) e^{k_r x} \equiv 0$$

$P_p(x) \not\equiv 0$ имеет хотя бы один ненулевой коэф.

$$P_1 e^{k_1 x} + P_2 e^{k_2 x} + \dots + P_p e^{k_p x} \equiv 0$$

$$P_1 + P_2 e^{(k_2-k_1)x} + \dots + P_p e^{(k_p-k_1)x} \equiv 0$$

продифф. m_1 раз.

получим часть от перв. слагаемого

18.05.2011

$$P_1(x) + \sum P_r(x) e^{(k_r-k_1)x}$$

$$R_p(x) e^{(k_p-k_{p-1})x} = 0.$$

$R_p(x) \not\equiv 0$ исход. предп-ие, что ур-ие лин. зав. опровергнуто.

22.
23.

(136)

$$y = \sum_{r=1}^{p} B_r(x) e^{k_r x} \quad (20)$$

B_r - мн-н ст $m_r - 1$

$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x$, $e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x$

$\alpha_1 \pm i\beta_1 x$

$$y = \sum_{r=1}^{e} e^{\alpha_r x}\left(C_r(x)\cos\beta_r x + D_r(x)\sin\beta_r x\right)$$

Пример: $y''' - y'' - y' + y = 0$.

$k^3 - k^2 - k + 1 = 0$

$k_1 = k_2 = 1 \quad k_3 = -1$

$y_1 = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3$

$L[y] = f(x)$ (21) - неодн. с пост. коэф.

Лемма: если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то можно рассмотреть вместо

$L[y] = f_1 + f_2$ $\quad L[y] = f_1$ и $L[y] = f_2$

y_1, y_2 — част. реш

$y_{чн} = y_1 + y_2$

док-во из свойств лин. операторов.

Если $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$ (22)

можно обойтись без интегрирования

$P_m(x) = p_m x^m + \ldots + p_1 x + p_0$ $\quad p_i$ известн.

1 случай) α не явл-ся корнем характ. ур-ия

(137) будем искать ч.р.

$$y = Q_m(x)e^{\alpha x} \quad (23)$$

$Q_m = q_m x^m + \ldots + q_0$ q_i надо найти. Для этого подставим в $L[y]$

$$L[Q_m(x)e^{\alpha x}] = P_m e^{\alpha x}$$

$$e^{-\alpha x}L[Q_m(x)e^{\alpha x}] = P_m(x)$$

$$L[Q_m(x)] = P_m(x)$$

Доп. самост-но, что помест. решение, то есть q_i можно выразить через p_i

2 случай: α - корень х.р.

$r \geq 1$ хар ур

$F(\alpha) = 0$ $F'(\alpha)$ ... $F^{(r-1)}(\alpha) = 0$ $F^{(r)}(\alpha) \neq 0$

Ф-ла 17 в этом случае дает:

$e^{\alpha x} R_{m-r}(x)$ (многоч-н степени $m-r$)

$$y = x^r e^{\alpha x} Q_{m-r}$$

(домножили на x^r чтобы вернуть степень как в (23))

$$L[x^r e^{\alpha x} Q_{m-r}(x)] = P_m(x)e^{\alpha x}$$

$$e^{-\alpha x}L[x^r e^{\alpha x} R_{m-r}(x)] = P_m(x)$$

$$q_m \{ C^r_{m+r} x^m F^{(r)}(\alpha) + C^{r+1}_{m+r} x^{m-1} F^{(r+1)}(\alpha) + \ldots F^{(m+r)}(\alpha) \} + q_{m-1}\{ C^r_{m+r-1} x^{m-1} F^{(r)}(\alpha) + \ldots$$

38

$+ C_{m+r-1}^{r+1} \lambda^{m-2} F^{(r+1)}(\alpha) + \dots + F^{(m+r-1)}(\alpha) q_x$

$C_{r+1}^{r} \lambda F^{(r)}(\alpha) + F^{(r+1)}(\alpha) q_x$

$+ \dots + q_1$

$+ q_0 F^{(r)}(\alpha)$

$\Delta = C_{m+r}^{r} C_{m+r-1}^{r} \dots C_{r+1}^{r} C_{r}^{r} \left[F^{(r)}(\alpha)\right]^{m+1} \neq 0$

опр-ль системы не $\neq 0$ т.к. по усл-ию пр-ая (r) $\neq 0$.

Замечание: если в правой части будут более общие выр-ия

$e^{\alpha x} P_m(x) \cos\beta x$ или $e^{\alpha x} P_m(x) \sin\beta x$

$e^{i\beta}, e^{-i\beta}$ (cos и sin выр-ся линейно ч/з ф-лу Эйлера) таким образом тоже ищется решение

можно расширить вид правой части

$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m^{(1)}(x)\cos\beta x + P_l^{(2)}(x)\sin\beta x\right]$

$x^r e^{\alpha x}\left[Q_n^{(1)}\cos\beta x + Q_n^{(2)}\sin\beta x\right]$

$n = \max(m, l)$

Краевые задачи для лин ДУ

Пусть $y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$.

$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_0'$ (задача Коши)

Но в физике встр-ся другой

139

Постановка задачи:

Дано: x_1, x_2 $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$

$\alpha y(x_1)+\beta y'(x_1)=a_1$, $\gamma y(x_2)+\delta y'(x_2)=b$

$y(x_1)-y(x_2)=a_1$, $y'(x_1)-y'(x_2)=b$

(двухточечная лин. краевая задача) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — const

Для ДУ перв. порядка краев. задачи не может быть

через перв. точку проходит ед. решение, во второй точке не

Краевая задача не будет иметь реш.

Если через точку проходит много кривых, возможно, начав будут проходить и через др. точку

если $a_1 = b = 0$ краев. задача наз-ся однородной

если хотя бы a или b $\neq 0$, неоднород. к.з.

Опр. кр. задачи: найти ДУ решение лин. одн. при однородных краевых условиях

В отличие от задачи Коши может иметь реш-ие, может иметь беск. кол-во, а может не иметь реш.

Пример: $y''+y=0$

$y(0)=0$ $y(\frac{\pi}{2})=a$

140

$y_{оо} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ $C_1 = 0$

$y = a \sin x$ — ед. реш. (чтобы выполн-сь $y(0)=0$)

(т.к. $C_2 = a$)

2) $y'' + y = 0$

$y(0) = 0$, $y(\pi) = b$

$y = C \sin x$ (беск. мн-во решений)

Если $b = 0$ $\forall C$ имеем реш.

Если $b \neq 0$ $\varnothing$ (реш. нет)

В отличие от зад. Коши, краевая задача имеет разные варианты

Пусть имеется одн. лин ДУ

$a_1(x) y^{(n)} + a_2(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y' + a_{n+1}(x) y = 0$ (1)

лин. неод: $a_1(x) y^{(n)} + \ldots + a_{n+1}(x) y = f(x)$ (2)

Пусть дано $AY = B$ (*)

A — матрица $n \times 2n$

Y — это столбец из $2n$ чисел

B — столбец из n чисел (степени n)

$$Y = \begin{pmatrix} y(x_1) \\ y'(x_1) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_1) \\ y(x_2) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_2) \end{pmatrix}$$

Теорема об альтернативе:

(14) если a_i и f непрерывны на (a,b), возможно варианта:
либо краев. задача (*) имеет решение при f в правой части ур-ния 2 и векторе β в условии *.
либо однородная кр. задача имеет бесчисл. мн-во решений, тогда неодн. задача при некоторых правых частях имеет бесч. мн-во решений, а при всех других не имеет решения.

(без док-ва)

Д/з $y'' + ay = 1$

$y(0) = y(1) = 0$

при каких a краев. задача не имеет реш.
(для д/з посмотреть при каких имеет)

$k^2 + a = 0$

$a > 0$

$a < 0$

$k_{1,2} = \pm\sqrt{a}$

$a = 0$

$k_{1,2} = 0$

Системы обыкновенных ДУ

$$F_i(x, y_1, y_1', \dots y_1^{(m_1)}; y_2, y_2' \dots y_2^{(m_2)}; \dots y_k, y_k' \dots y_k^{(m_k)}) = 0, \quad i = \overline{1,k}$$

система мн. ур-ний ДУ

общ. случай рассматривать не будем (142)

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, \dots y_1^{(m_1-1)}, \dots y_k^{(m_k-1)}) \\ \dots \\ y_n^{(m_n)} = f_n(x, \dots) \end{cases}$$

— канонич. система

введем $y_1' = y_{11}$, $y_1'' = y_{12} \dots y_1^{(m_1-1)} = y_{m_1+1}$

вместо первого ур-ия получим всю систему ДУ первого порядка

$y_{1m_1-1}' = f_1(x, y_1, y_{11}, \dots y_{m_1-1}, \dots)$

$n = m_1 + \dots + m_k$ (перв. порядка)

число ур-ий m_i

Такая система наз-ся нормальной формой

канон. сист-ма → нор. форма

При этом увел-ся число ур-ий, но зато все перв. пор.

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots y_n) \end{cases}$$

система в норм. форме

для нее имеется теор. ∃ и единст-ве (спрашивать будет без док-ва) найти теорему рожд

Когда мы система эквивалентна ур-ию высшего порядка (то есть верно мы система → ДУ высш. пор., мы знаем, что верно ДУ высш. → система)

143

Рассмотреть лин. однор. системы, понятие фундаментальных реш., лин. незав. решений

Уметь решать лин. системы с пост. коэф. путём сведения системы к ур-ию порядка n.

Познакомиться с понятием устойчивости и асимптот. уст-ти.

gvp12345@ya.ru