

Оглавление

1	Введение	3
1.1	Монохроматические волны	11
1.1.1	Плоские	11
1.1.2	Цилиндрические	14
1.1.3	Сферические	18
1.2	Энергетические характеристики волн	20
1.3	Принцип суперпозиции	21
1.4	Условие излучения. Принцип предельного поглощения	22
1.5	Метод преобразования Фурье	25
2	Волны в жидкостях и газах	38
2.1	Физические свойства тел	38
2.1.1	Гипотеза сплошной среды	42
2.2	Лагранжев и Эйлеров формализм	43
2.3	Уравнение Навье-Стокса	52
2.4	Проблема замыкания системы уравнений МСС	54
2.4.1	Приближение несжимаемой жидкости	54
2.4.2	Баротропные процессы в сплошной среде	54
2.4.3	Закон сохранения энергии	55
2.4.4	Вязкость и теплопроводность в МКТ. Идеальные жидкость и газ	58
2.5	Граничные условия	59
2.6	Уравнения линейной акустики и газодинамики	60
2.6.1	Линеаризация уравнений	60
2.6.2	Переход к потенциальности	63
2.7	Энергетические характеристики звука	66
2.8	Звуковые волны в вязкой диссипативной среде	67
2.9	Задачи излучения звука	71
2.9.1	Колеблющийся поршень	71
2.9.2	Излучение пульсирующей сферы	74
2.9.3	Силы реакции излучения	78
3	Волны в упругих твёрдых телах	80
3.1	Математическое описание деформации тела	83
3.2	Продольные и поперечные волны	91
3.3	Отражение и преломление упругих волн	92
4	Практика	94

4.1	07.02.2019	94
4.2	21.02.2020	101
4.3	06.03.2020	108
Список литературы		115

1 Введение

Понятия волны и колебательных процессов. В повседневной жизни мы используем такие понятия, как время, пространство, точка, поверхность – которые являются аксиоматическими понятиями и не могут быть определены исчерпывающе строго.

Понятие колебаний так же не может быть определено строго. Основанное на интуитивных представлениях, достаточно устоявшееся определение звучит так:

Определение. Колебания – это периодический или почти периодический процесс, в котором значение некоторой физической величины повторяется точно или приближённо через равные промежутки времени.

Математической строгости в этом определении нет.

Что такое волна? Мы можем представлять себе колебания некоторых физических величин в средах, которые передаются от одних частиц среды другим и распространяются все дальше и дальше от источника колебаний. Такое распространение колебаний и называют волной или волновым процессом:

Определение. Волна – это возмущение среды или изменение её состояния, распространяющееся в среде и несущее с собой энергию.

Основные виды волновых процессов. Первым волновым процессом, который был обнаружен человеком, был процесс колебания поверхности воды. Леонардо-да-Винчи еще в XV веке писал:

Импульс гораздо быстрее воды, потому что многочисленны случаи, когда волна бежит от места своего возникновения, а вода не двигается с места - наподобие волн, образуемых в мае на нивах течением ветров: волны кажутся бегущими по полю, а нивы с своего места не сходят.

Фактически, да-Винчи подметил важнейшее свойство: перенос энергии без переноса вещества среды.

В обширный класс волн относятся и электромагнитные, и упругие (звуковые, сейсмические и т.д.), и волны вероятности (волны де-Бройля), и недавно открытые в общей теории относительности гравитационные волны.

Волны могут переносить информацию от источника к приемнику – на этом основано телевидение, радиолокация и т.п.

Волны часто несут важную информацию не только об источнике этих волн, но и о среде, в которой они распространяются: например, флюорография – рентгеновские лучи, проходя через ткани человека дают их картину. В радиоастрономии по характеристикам волн можно получить важную информацию о каких-то космических объектах и областях, удалённых от Земли: рассматривая волны, излученные далекими звездами, можно получить много информации о межзвездном пространстве, пройденном волнами.

Волны переносят энергию и используются для изменения физических свойств разных объектов: в качестве бытового примера можно упомянуть СВЧ-печь, где микроволновое излучение наводит токи в еде, вследствие чего выделяется джоулево тепло и происходит нагрев.

С понятием волны тесно связано понятие физического поля. Исторически, впервые понятие поля ввел Леонард Эйлер в гидродинамике: это поля скорости, плотности и т.д. в жидкостях и газах.

Позднее, в середине 19-го века, в работах Фарадея появилось понятие электромагнитного поля. Его ввел Фарадей, используя представление силовых линий поля. Фарадей изложил теорию поля в классическом понимании.

Виды полей. Поле характеризуется некоторой функцией, определённой в каждой точке заданной области пространства и времени, т.е. вообще говоря, описывается функцией четырёх переменных. Если поведение некой функции хорошо описывает какие-либо эксперименты, то она обретает смысл физического поля.

Мы будем рассматривать поля в сплошных средах. Квантовых эффектов мы касаться не будем. В зависимости от вида функции можно разделить поля в сплошных средах на скалярные, векторные и тензорные.

Скалярное поле требует для задания скалярной функции: например,

поле давления, плотности:

$$p(x, y, z, t), \quad \rho(x, y, z, t) \equiv \rho(\vec{r}, t), \quad (1.1)$$

где $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

Векторные поля – например напряжённость электрического поля:

$$\vec{E}(x, y, z, t) \equiv \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (1.2)$$

Для задания векторного поля нужно задать три скалярные функции:

$$E_x(\vec{r}, t), \quad E_y(\vec{r}, t), \quad E_z(\vec{r}, t). \quad (1.3)$$

Часто нам будет встречаться поле скоростей $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Еще более общий случай – тензорные поля: например, поле тензора внутренних напряжений второго ранга

$$p_{ik}(\vec{r}, t), \quad \text{где } i, k = 1, 2, 3. \quad (1.4)$$

Можно сказать, что тензорным полем мы обобщаем понятие векторного (тензор 1-го ранга) и скалярного (тензор 0-го ранга) полей. Тензорное поле требует задания 9-ти скалярных функций.

Существуют еще спинорные поля (квантовая механика), которые сводятся к вышеупомянутым типам полей. Но в нашем курсе их не будет.

Изменение в пространстве и времени самых разных по своей физической природе полей почти всегда представляет собой волну или волновой процесс.

Самые разные физические задачи описываются одними и теми же универсальными математическими моделями, точно так же, как это описывается в теории колебаний: в ней рассматривались колебательные процессы системы, строилась универсальная модель и говорилось, что она применима для совершенно, казалось бы, разных задач.

Уравнения колебательных и волновых процессов. Наш курс, по сути, обобщает теорию колебаний, переходя к волновым процессам. Давайте начнём с теории колебаний, записав ОДУ 2-го порядка

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{du}{dt} + \gamma u = 0, \quad u = u(t). \quad (1.5)$$

Это известное уравнение гармонического осциллятора. Например, оно описывает динамику колебательного контура в радиотехнике:

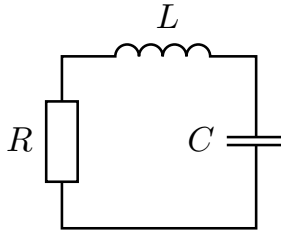


Рис. 1: Колебательный контур

Здесь

$$\alpha = L, \quad \beta = R, \quad \gamma = \frac{1}{C}, \quad u = q(t). \quad (1.6)$$

В механике это же уравнение описывает колебание подпружиненного грузика по доске с трением β :

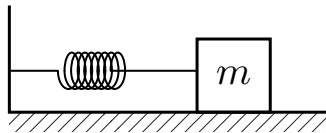


Рис. 2: Грузик на пружине

Здесь

$$\alpha = m, \quad \gamma = k, \quad u = x(t). \quad (1.7)$$

Что будет, если допустить, что функция u зависит не только от времени, но и от координат? Наиболее простой случай – когда u зависит только от координат:

$$u = u(x, y, z), \quad \Delta u = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u = 0 \quad (1.8)$$

Это уравнение Лапласа. Оно встречается для потенциальных полей в электростатике и для поля скорости идеальной несжимаемой жидкости

в гидродинамике:

$$\vec{E} = -\nabla u, \quad \vec{v} = \nabla u. \quad (1.9)$$

Можно получить очень часто встречающееся неоднородное уравнение Лапласа – уравнение Пуассона

$$\Delta u = q(\vec{r}). \quad (1.10)$$

Уравнение Пуассона встречается в электростатике, когда

$$q = -4\pi\rho(\vec{r}), \quad \vec{E} = -\nabla u, \quad (1.11)$$

т.е. идёт расчет поля, создаваемого плотностью электрического заряда.

В ньютоновской механике q описывает гравитацию:

$$q = 4\pi\rho, \quad \vec{g} = -\nabla u \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{g}. \quad (1.12)$$

Модифицируем уравнение Лапласа и добавим в него производную по времени:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \xi \Delta T, \quad \xi > 0. \quad (1.13)$$

Это уравнение теплопроводности, где $T \equiv u$.

В электродинамике, если пренебречь в уравнениях Максвелла током смещения по сравнению с током проводимости, получим

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \Delta \vec{H} \quad (1.14)$$

В квантовой механике движение частицы описывается уравнением Шредингера

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \Delta \Psi. \quad (1.15)$$

Если мы модифицируем уравнение Лапласа добавлением второй производной по времени (введя размерный коэффициент c – скорость – для наблюдения размерностей), получим волновое уравнение:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.16)$$

Если мы добавим в волновое уравнение потери

$$\Delta u - \beta \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.17)$$

то получим волновое уравнение с поглощением.

Волны в реальных средах всегда испытывают поглощение: в электродинамических задачах – за счёт проводимости среды, в упругих волнах – за счёт вязкости среды.

Отметим, что под u во всех вышеприведенных уравнениях понимается некая абстрактная физическая величина, которой потом придается смысл в соответствующих моделях.

Сделаем ещё обобщение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega_p^2 u = c^2 \Delta u \quad (1.18)$$

Это уравнение Клейна-Гордона, описывающее распространение волн в плазме. Исторически оно возникло в квантовой механике и описывало волновую функцию частиц со спином $S = \frac{1}{2}$:

$$u = \psi, \quad \omega_p = \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \quad (1.19)$$

Оно даёт правильную связь энергии и импульса, если подставить волну де-Бройля.

Введём в уравнение Клейна-Гордона потери:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \nu \frac{\partial u}{\partial t} + \omega_p^2 u = c^2 \Delta u, \quad (1.20)$$

где $\nu > 0$ отвечает некоторой эффективной частоте соударений частиц в плазме.

Последнее уравнение наиболее общее и обобщает все написанные ранее уравнения. Левая часть этого уравнения – это уравнение гармонического осциллятора с поглощением, но справа стоит лапласиан – описывается распределённая система. Решения этого уравнения будут похожи на распространение по среде колебаний маятника.

Математический аппарат описания колебания важен в любой из физических дисциплин. В первых разделах мы построим математическое введение аппарата, используемого в теории волновых процессов, а потом кратко рассмотрим волновые процессы в разных средах.

Рассмотрим простой пример – уравнение в частных производных бегущей вдоль оси x волны

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (1.21)$$

Решение уравнений в частных производных зависит от целого класса функций. Общее решение этого уравнения, получаемое интегрированием:

$$u = f(x - ct). \quad (1.22)$$

К уравнению в частных производных для полного решения необходимо задать начальные и граничные условия.

Введение дифференциального оператора. Заметим, что все эти уравнения в частных производных вплоть до последнего можно и удобно представлять символически следующим компактным образом:

$$\hat{L}u = \rho, \quad (1.23)$$

где \hat{L} – дифференциальный оператор, $u(\vec{r}, t)$ – физическая величина, а правая часть $\rho(\vec{r}, r)$ – заданная функция источников поля.

$$\hat{L} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}, \dots, \Delta, \dots \right) \quad (1.24)$$

В частном случае волнового уравнения

$$\hat{L} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square. \quad (1.25)$$

Здесь \square называют оператором Даламбера.

Мы будем рассматривать линейные волновые процессы, и дадим определение линейному оператору.

Оператор линеен тогда и только тогда, когда он удовлетворяет свойствам аддитивности и однородности:

1. Линейность $\hat{L}(U_1 + U_2) = \hat{L}U_1 + \hat{L}U_2$
2. Однородность $\hat{L}(aU) = a\hat{L}(U)$.

Монохроматические поля. При рассмотрении процессов в линейных средах важнейший интерес представляют монохроматические поля.

Определение. Монохроматическим называется поле, которое от времени зависит только посредством множителя

$$\cos(\omega t + \alpha), \quad (1.26)$$

где ω – константа (циклическая частота), не зависящая от координат и времени, а α – фаза, которая может зависеть от координат.

При рассмотрении монохроматических линейных процессов можно и удобно ввести комплексную форму записи монохроматического поля. Если мы знаем, что функция источника $\rho(\vec{r}, t)$ работает на монохроматической частоте ω , то всегда можно ее представить в виде

$$\rho(\vec{r}, t) = \text{Re}[\tilde{\rho}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}]. \quad (1.27)$$

Аналогично

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re}[\tilde{u}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}]. \quad (1.28)$$

Другими словами, вместо действительных функций вводим в рассмотрение комплексные и ищем решение линейных уравнений поля в комплексном виде.

$$\vec{L}u = \rho \quad (1.29)$$

Пользуясь свойством аддитивности оператора \hat{L} , получаем

$$\begin{aligned} \hat{L}(\text{Re}[\tilde{u}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}] + i \text{Im}[\tilde{u}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}]) &= \\ &= \text{Re}[\tilde{\rho}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}] + i \text{Im}[\tilde{\rho}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

В силу линейности оператора \hat{L} :

$$\begin{aligned} \hat{L}(\text{Re}[\tilde{u}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}]) + \hat{L}(i \text{Im}[\tilde{u}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}]) &= \\ &= \text{Re}[\tilde{\rho}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}] + i \text{Im}[\tilde{\rho}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Приравнивая реальные и мнимые части, получим

$$\hat{L} \operatorname{Re}[\tilde{u}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[\tilde{\rho}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}], \quad \hat{L} \operatorname{Im}[\tilde{u}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}] = \operatorname{Im}[\tilde{\rho}(\vec{r}) \cdot e^{i\omega t}] \quad (1.32)$$

Введение комплексного формализма позволяет для монохроматических полей исключить время из уравнений. Прделаем это на примере волновых уравнений:

$$\square u = \rho \quad (1.33)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \tilde{u} e^{i\omega t} = \tilde{\rho} e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \Delta \tilde{u} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{u} = \tilde{\rho} \quad (1.34)$$

Последнее уравнение очень важно и называется уравнением Гельмгольца (или его также называют волновым уравнением).

1.1 Монохроматические волны

1.1.1 Плоские монохроматические волны

Определение. Плоская монохроматическая волна описывается уравнением

$$u(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi), \quad (1.35)$$

где \vec{k} – волновой вектор $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$.

Волна подпадает под определение монохроматической волны, данное ранее, с $\alpha = -\vec{k}\vec{r} - \varphi$. Почему она плоская? Введём полную фазу этого поля

$$\Theta = \omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi \quad (1.36)$$

и зафиксируем время $t = \text{const}$. Тогда получим уравнение поверхности, на которой $\Theta = \text{const}$ (поверхность постоянной полной фазы).

Легко показать, что поверхностью постоянной фазы в данном случае будет как раз плоскость.

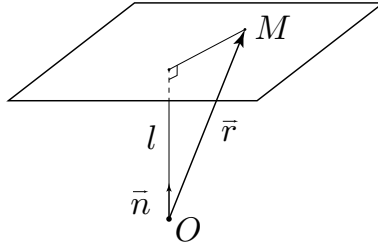


Рис. 3: Плоскость

Если мы задали расстояние l и единичный вектор \vec{n} , то мы однозначно определяем положение плоскости. Можем написать такое соотношение прямо из рисунка:

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = l. \quad (1.37)$$

Это уравнение плоскости в аналитической геометрии. Приведём к такому виду уравнение полной фазы:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t - \varphi - \text{const} \quad \left| \cdot \frac{1}{k}, \right. \quad (1.38)$$

$$\underbrace{\frac{\vec{k}}{k}}_{\vec{n}} \cdot \vec{r} = \underbrace{\frac{\omega t - \varphi - \text{const}}{k}}_l. \quad (1.39)$$

Из этого соотношения сразу можно найти скорость перемещения плоскости поверхности постоянной фазы (фазовую скорость):

$$v_{\text{ф}} = \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (1.40)$$

Давайте зададимся вопросом, является ли плоская монохроматическая волна решением волнового уравнения, и если является, то в каком случае?

Прежде всего введём комплексную амплитуду

$$\tilde{u}(\vec{r}) = A e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\varphi} \quad (1.41)$$

и подставим её в однородное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \tilde{u} + \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{u} = 0. \quad (1.42)$$

Дифференцирование комплексной амплитуды даст

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\varphi} \right) = -i k_x A e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\varphi} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(A e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\varphi} \right) = -k_x^2 A e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\varphi}. \quad (1.44)$$

Подставляя все в уравнение Гельмгольца, получим

$$\left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 \right) A e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\varphi} + \frac{\omega^2}{c^2} A e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\varphi}. \quad (1.45)$$

Отсюда получаем простое соотношение

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) A e^{-i\vec{k}\vec{r} - i\varphi} = 0. \quad (1.46)$$

Очевидно, здесь $A = 0$ – тривиальное решение. Для существования нетривиального решения нужно, чтобы обращалась в ноль первая скобка: такое равенство представляет собой дисперсионное соотношение (дисперсионное уравнение)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.47)$$

Только в случае его выполнения плоская монохроматическая волна будет являться решением волнового уравнения. Отсюда сразу следует

$$v_\Phi = c. \quad (1.48)$$

Это равенство дает физический смысл константе c : это фазовая скорость волны – скорость перемещения поверхности постоянной фазы.

Эта константа зависит только от свойств среды. Для вакуума это скорость света, для твёрдых тел – скорость звука.

Когда фазовая скорость не зависит от частоты, говорят об отсутствии дисперсии. В реальных средах всегда есть дисперсия, и фазовая скорость $v_\Phi = v_\Phi(\omega)$, причём связь может быть очень непростой.

1.1.2 Цилиндрические монохроматические волны

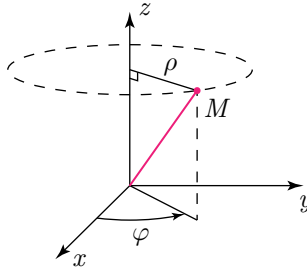


Рис. 4: Цилиндрические координаты

Будем вести описание в цилиндрических координатах: связь с декартовыми задаётся соотношениями

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (1.49)$$

Цилиндрические волны зависят только от ρ . Если перейти в уравнении Гельмгольца к цилиндрическим координатам от общего вида

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = 0, \quad \tilde{u} = \tilde{u}(\rho), \quad (1.50)$$

расписав лапласиан в цилиндрических координатах,

$$\Delta \tilde{u} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} \quad (1.51)$$

то получим *уравнение Бесселя*:

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{u}}{d\rho} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.52)$$

Решение уравнения Бесселя определяется через специальные функции

$$\tilde{u} = C_1 J_0(k\rho) + C_2 Y_0(k\rho), \quad (1.53)$$

где J_0 – функция Бесселя первого рода, Y_0 – функция Бесселя второго порядка, или функция Неймана.

Эти специальные функции¹ называются *цилиндрическими функциями*. Они постоянно встречаются в физике, свойства этих функций хорошо изучены и есть во многих справочниках.

При действительном значении аргумента эти функции действительны:

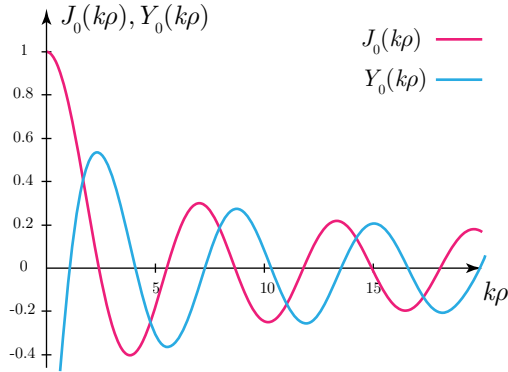


Рис. 5: J_0, Y_0 от $k\rho$

Функция Бесселя осциллирует и затухает. Её первый ноль лежит примерно на значении $k\rho = 2.4$.

Функция Неймана Y_0 обращается в ноль по логарифмическому закону. Первый ноль – примерно на $k\rho = 0.8$.

Физический смысл бесселевых функций – описание стоячих цилиндрических волн, аналогично функциям \sin и \cos в плоской геометрии. Нам более интересен случай бегущих (распространяющихся) волн. В связи с этим бывает удобно представить решение уравнения Бесселя в другом виде:

$$\hat{u}(\rho) = C_3 H_0^{(1)}(k\rho) + C_4 H_0^{(2)}(k\rho) \quad (1.54)$$

где $H_0^{(1,2)}$ – функции Ханкеля первого рода и второго рода нулевого порядка – тоже линейно независимые решения уравнения Бесселя. Они следующим образом выражаются через функции Бесселя:

$$H_0^{(1,2)}(x) = J_0(x) \pm iY_0(x) \quad (1.55)$$

¹То есть эти функции не выражаются через конечные комбинации элементарных функций, а выражаются только в виде интегралов или рядов.

По сути, другая запись решения заключалась только в замене констант.

В задачах с цилиндрической геометрией функции Ханкеля аналогичны экспоненте с мнимым аргументом $e^{\pm ix}$ в задачах с плоской геометрией. Они, конечно, комплекснозначны при действительных аргументах в силу определения (1.55).

Рассмотрим асимптотики специальных функций – выражения при больших и малых значениях аргумента:

$$H_0^{(1,2)}(x \rightarrow 0) \approx 1 \mp \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x}, \quad (1.56)$$

где $\gamma = 1.78$.

В нашем случае $x = k\rho$, и малые x означают, что

$$\frac{2\pi}{\lambda} \rho \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \rho \ll \lambda. \quad (1.57)$$

Это поведение поля вблизи оси на расстояниях меньше длины волны – квазистатическое решение.

Из электростатики можно вспомнить, что примерно так себя ведёт поле заряженной нити. Нам, естественно, более интересен случай распространяющихся волн, при больших значениях аргумента:

$$H_0^{(1,2)}(x \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\pm i(1 - \frac{\pi}{4})}. \quad (1.58)$$

Действительная и мнимые части будут асимптотиками функций J_0 и Y_0 . Можно заметить, что они сдвинуты, как говорится, в квадратуре: где максимум одной функции – там ноль другой, и наоборот.

Последнее приближение отвечает физическому условию

$$\rho \gg \lambda. \quad (1.59)$$

Запишем физически наблюдаемую величину: какую-то компоненту электрического поля в электродинамической задаче, например. Мы нашли такое решение волнового уравнения:

$$u(\rho, t) = \text{Re} [\tilde{u}(\rho)e^{i\omega t}] = \text{Re} [C_3 H_0^{(1)}(k\rho)e^{i\omega t} + C_4 H_0^{(2)}(k\rho)e^{i\omega t}] \quad (1.60)$$

$$u(\rho, t) \approx (k\rho \gg 1) \approx \operatorname{Re} \left[\frac{D_1}{\sqrt{\rho}} e^{i\omega t + ik\rho} + \frac{D_2}{\sqrt{\rho}} e^{i\omega t - ik\rho} \right], \quad (1.61)$$

где $D_1 = C_3 \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-\frac{\pi}{4}}$, D_2 получается аналогично.

Если мы будем смотреть $t = \text{const}$, то увидим, что в каждый фиксированный момент времени физическая величина постоянна на цилиндрической поверхности. Первое слагаемое в (1.61) при увеличении времени «схлопывается» и отвечает сходящейся цилиндрической волне, а второе – расходящейся цилиндрической волне.

В отличие от плоских волн, амплитуда цилиндрических волн не постоянна, а спадает по закону $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$.

Подчеркнём, что эти выражения получены для больших значений $k\rho$. При малых значениях нужно подставлять истинные значения функций Ханкеля.

Мы можем искать решения, зависящие более сложным образом от координат (не только от ρ , но и от φ, z) методом разделения переменных:

$$\tilde{u}(\rho, \varphi, z) = \left[c_1 H_\nu^{(1)}(\chi\rho) + c_2 H_\nu^{(2)}(\chi\rho) \right] \cos(\nu\varphi + \varphi_0) e^{\pm ihz}. \quad (1.62)$$

Здесь константы, возникающие при разделении переменных связаны как

$$\chi^2 + h^2 = k^2, \quad (1.63)$$

что фактически представляет собой дисперсионное уравнение для волн в круглом волноводе.

Полученные уравнения для цилиндрических волн линейны: выполняется принцип суперпозиции, и, перебирая свободные параметры, можно конструировать сложные решения, отвечающие различным граничным условиям. Фактически – это составление ряда Фурье.

1.1.3 Сферические монохроматические волны

Давайте введём сферическую систему координат (r, θ, φ) и договоримся об обозначениях:

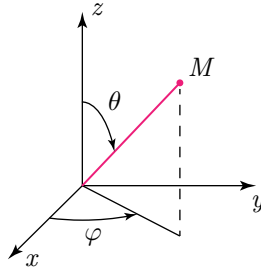


Рис. 6: Сферическая система координат

Здесь

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.64)$$

Будем решать уравнение Гельмгольца:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.65)$$

Найдём решение, зависящее только от r : раскрывая производные, получим

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\tilde{u}}{dr} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad (1.66)$$

Это уравнение, хоть и похоже на уравнение Бесселя, легко решается в элементарных функциях заменой

$$v = r\tilde{u}. \quad (1.67)$$

Легко проверить, что в новых переменных получается уравнение

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + k^2 v = 0. \quad (1.68)$$

Последнее уравнение – уравнение простого гармонического осциллято-

ра. Для бегущих волновых процессов удобно записать решение в виде экспонент

$$v(r) = c_1 e^{+ikr} + c_2 e^{-ikr}, \quad (1.69)$$

или, возвращаясь к исходным переменным,

$$\tilde{u} = \frac{c_1}{r} e^{ikr} + \frac{c_2}{r} e^{-ikr}. \quad (1.70)$$

Домножив на $e^{i\omega t}$, получим решение волнового уравнения:

$$u(r, t) = \text{Re} \left[\frac{c_1}{r} e^{i\omega t + ikr} + \frac{c_2}{r} e^{i\omega t - ikr} \right] \quad (1.71)$$

В каждый момент времени $t = \text{const}$ каждое из слагаемых постоянно на поверхности постоянной фазы и амплитуды $r = \text{const}$ (это сфера). Если мы рассмотрим первое слагаемое, сфера схлопывается с течением времени в центр координат – сходящаяся сферическая волна, а второе слагаемое – расходящаяся сферическая волна.

Амплитуда сферических волн, как и цилиндрических, не постоянна и спадает по закону $\frac{1}{r}$.

Возьмём второе слагаемое как решение волнового уравнения: оказывается, расходящаяся волна удовлетворяет соотношению

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + ik\tilde{u} \right) = 0. \quad (1.72)$$

Если мы будем решать методом разделения переменных уравнение в сферических координатах в случае, когда u зависит от (r, θ, φ) , получим более сложное решение, которое уже не является сферической волной:

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \left[\frac{c_1}{\sqrt{r}} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) \frac{c_2}{\sqrt{r}} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] P_y^\mu(\cos \theta) \cos(\mu\varphi + \varphi_0) \quad (1.73)$$

Если есть 2π – периодичность по θ, φ , то индексы μ будут целыми: это так называемые сферические гармоники. P^μ – функции Лежандра, которые сильно упрощаются при целых индексах μ . Эти специальные функции так же хорошо изучены.

Комбинируя решения с разными константами, можем собрать решение, удовлетворяющее определённым граничным условиям.

1.2 Энергетические характеристики волн

Количественно характеризовать перенос энергии волной принято с помощью вектора плотности потока энергии $\vec{\Pi}$, который для электромагнитных волн называется вектором Пойнтинга, а для упругих – вектором Умова.

Определение. Абсолютная величина p равна количеству энергии, переносимому за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению потока энергии.

Для волн не слишком большой энергии мы напишем значение вектора для самых разных физических задач.

$$\Pi = \alpha u^2, \quad (1.74)$$

где α – некий коэффициент, зависящий от свойств среды, в которой распространяется волна. Например, в электродинамике $\alpha = \alpha(\varepsilon, \mu)$. Важно, что величина вектора плотности энергии всегда (для линейных волновых процессов) квадратична по полю.

Посмотрим, что получится для цилиндрических и сферических волн:

$$\Pi = \alpha A^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi) = \frac{\alpha A^2}{2} \left[1 + \cos\left(2[\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi]\right) \right] \quad (1.75)$$

Обыкновенно интересуются средним значением по периоду:

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi(t) dt = \frac{\alpha A^2}{2} \quad (1.76)$$

В случае комплексных амплитуд для цилиндрических волн

$$\bar{\Pi} = \frac{\alpha \tilde{u} \tilde{u}^*}{2} = \frac{\alpha |\tilde{u}|^2}{2} \sim \frac{1}{\rho} \quad (1.77)$$

Такое спадание соответствует закону сохранения энергии.

Для сферических волн

$$\bar{\Pi} \sim \frac{1}{r^2}, \quad (1.78)$$

что отвечает спаданию энергии, распределённой по площади сферы.

1.3 Принцип суперпозиции. Постановка задач линейной теории волн

Ранее мы говорили о том, что удобно представить уравнения, описывающие волновой процесс, в виде

$$\hat{L}u = \rho. \quad (1.79)$$

Задача будет называться линейной, если условиям однородности и аддитивности будут удовлетворять ещё и начальные и граничные условия:

$$NY(u_1 + u_2) = NY(u_1) + NY(u_2), \quad NY(\alpha u) = \alpha NY(u) \quad (1.80)$$

$$GY(u_1 + u_2) = GY(u_1) + GY(u_2), \quad GY(\alpha u) = \alpha GY(u) \quad (1.81)$$

Приведём для примера граничное условие, условие Неймана:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f \quad (1.82)$$

Очевидно, аддитивность и линейность для такого условия будут выполняться в силу аддитивности и линейности производной.

А вот если взять условие вида

$$u \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f \quad (1.83)$$

Очевидно, что это нелинейное условие и условию линейности и однородности не удовлетворяет.

Вывод такой: даже если уравнение линейно, а условия нелинейны, задача линейной не будет и решается в очень редких случаях, либо вообще численно.

Зачем вообще нужна линейность физикам? Если задача линейна в целом, то выполняется принцип суперпозиции (или суперпозиция решений). Можно складывать частные решения задачи и получать новые, более сложные.

Возьмём для примера колебания струны, закреплённой в точках $x = 0$, $x = l$:

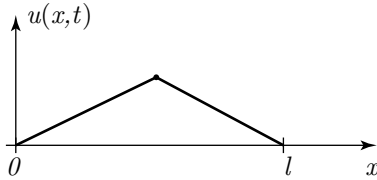


Рис. 7: Струна

Функция отклонения струны $u(x, t)$ удовлетворяет одномерному волновому уравнению

$$\square u = \rho(x, t), \tag{1.84}$$

Пусть у нас есть целый набор задач

$$\square u_i = \rho_i(x, t), \quad i = 1 \dots N \tag{1.85}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad \left. \frac{\partial u_i}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_i(x) \tag{1.86}$$

Тогда в силу линейности

$$u = \sum_{k=1}^N u_k, \quad \rho = \sum_{k=1}^N \rho_k, \quad \varphi = \sum_{k=1}^N \varphi_k, \quad \psi = \sum_{k=1}^N \psi_k \tag{1.87}$$

Принцип суперпозиции позволяет сформулировать общие принципы решения линейных задач.

1.4 Условие излучения. Принцип предельного поглощения

Остановимся несколько подробнее на специфичной задаче возмущения заданных источников, расположенных в ограниченной области пространства.

Реально в жизни часто возникает такая задача: у нас имеется источник волн (например, антенна на спутнике или самолёте) и мы хотим принимать этот сигнал, т.е. знать, как до нас дойдут волны, излучаемые этим источником.

Пусть мы всегда можем провести сферу конечного радиуса a , внутрь которой попадают все источники, а вне неё во всем безграничном про-

странстве источников нет. Это всегда идеализация, безграничного пространства нет.

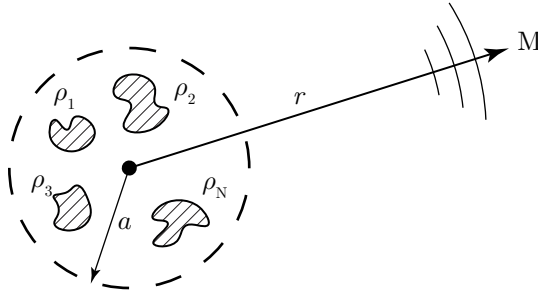


Рис. 8: Источники

Нам нужно определить поле этих источников в точке наблюдения. Пусть источники монохроматические:

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = \tilde{\rho}, \tag{1.88}$$

где $\tilde{\rho} = \sum_i \tilde{\rho}_i$.

Здесь, казалось бы, нет никаких граничных условий, но всегда для решения ПДУ нужно задать граничные условия (для монохроматических процессов время исключается из решения).

Можно рассуждать таким образом: пусть у нас расстояние от начала координат до точки наблюдения r стремится к бесконечности: уходим на бесконечность от источников. Сфера конечного радиуса с бесконечности будет выглядеть как точечный источник, а точечный источник даст расходящуюся сферическую волну, которая, как мы говорили ранее, удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + ik\tilde{u} \right) = 0 \tag{1.89}$$

Это условие называется *условием Зоммерфельда* или *условием излучения*.

Сходящаяся волна этому условию не удовлетворяет. Условие излучения можно рассматривать как граничное условие на сфере бесконеч-

ного радиуса, и позволяет отсеять математически правильные решения, удовлетворяющие сходящимся волнам. Естественно, так как вне сферы источников нет, никакие волны внутрь неё приходить не могут.

Можно математически строго доказать теорему существования и единственности волнового уравнения, которое удовлетворяет условию Зоммерфельда.

Специфика такой характерной задачи теории излучения обязательно приводит к появлению условия излучения. В волноводах, например, было все просто: граничные условия на стенках. Теперь нужно добавлять условие излучения, которое соответствует исключению из рассмотрения сходящейся волны.

Не всегда волны могут описываться строго волновым уравнением: это простейшая модель. В сложных средах могут быть более сложные уравнения. Как убрать расходящиеся решения в более общем случае? Для этого формулируется принцип предельного поглощения для задачи с источниками в ограниченной области.

Модель, которую мы рассмотрели ранее

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = \tilde{\rho} \tag{1.90}$$

не учитывает поглощение, которое в реальности существует в любой среде, в которой распространяются волны. Более правильная постановка задачи с учётом поглощения среды имеет вид

$$\Delta u - \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho, \tag{1.91}$$

где ν – положительный действительный коэффициент поглощения. Например, в него может входить проводимость среды, в акустике – вязкость и теплопроводность.

Если мы теперь будем искать решение в виде комплексных амплитуд $u(\vec{r}, t) = \tilde{u}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\rho(\vec{r}, t) = \tilde{\rho}(\vec{r})e^{i\omega t}$, то получим

$$\Delta \tilde{u} + \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - i \frac{\omega \nu}{c^2} \right)}_{q^2} \tilde{u} = \tilde{\rho} \tag{1.92}$$

$$q^2 = k^2 \left(1 - i \frac{\nu}{\omega} \right) \Rightarrow q = \pm k \left(1 - i \frac{\nu}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.93}$$

Одно из решений будет экспоненциально возрастать, а одно - убывать.

Как можно отобразить решения, отвечающие расходящимся на бесконечности сферическим волнам? Для этого нужно взять предел ограниченного решения уравнения с поглощением при потерях, стремящихся к нулю. Тогда мы получим физически правильное решение волнового уравнения без потерь. Этот подход является более общим, так как относится не только к конкретному уравнению. Всегда можно ввести поглощение, найти решение уравнения с поглощением и устремить его к нулю.

В уравнении Зоммерфельда мы учли конкретный вид решения. Мы сначала должны знать поведение поля на бесконечности, знать поведение поля на бесконечности.

В более трудных задачах (например, в анизотропных средах, где есть две нормальные волны) такой подход не годится: поле не будет иметь вид \exp/r . Но метод потерь по-прежнему будет применим.

1.5 Применение преобразования Фурье для решения линейных уравнений математической физики с постоянными коэффициентами

Физически линейные уравнения с постоянными коэффициентами описывают распространение волн в однородных изотропных средах.

Принцип суперпозиции, о котором мы говорили ранее, позволяет для линейных задач сформулировать общие методы решения. Важнейшим методом является метод преобразования Фурье. Рассмотрим уравнение

$$\hat{L}u = \rho. \quad (1.94)$$

Представим правую часть уравнения (1.94) в виде интеграла Фурье:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \rho(x, y, z, t) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\rho}(k_x, k_y, k_z, \omega) \exp\{i\omega t - ik_x x - ik_y y - ik_z z\} dk_x dk_y dk_z d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{k}, \omega) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} d\omega \quad (1.95) \end{aligned}$$

Такое разложение называют ещё разложением по плоским монохроматическим волнам. Именно это и есть физический смысл четырёх-кратного

преобразования Фурье.

Обратное преобразование Фурье имеет вид:

$$\tilde{\rho}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{r}, t) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} dt \quad (1.96)$$

Будем искать решение u в виде

$$u(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\omega, \vec{k}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} d\omega, \quad (1.97)$$

тогда уравнение (1.94) перепишется как

$$\hat{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\omega, \vec{k}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{k}, \omega) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} d\omega \quad (1.98)$$

Важно, что оператор \hat{L} можно внести под знак интеграла, другими словами, продифференцировать интеграл по параметрам x, y, z, t и воспользоваться свойством однородности оператора:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{L} \left\{ \tilde{u}(\omega, \vec{k}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \right\} d\vec{k} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\omega, \vec{k}) \hat{L} \left\{ e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \right\} d\vec{k} d\omega \quad (1.99)$$

Дифференцирование экспоненты даст следующие множители:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow -ik_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow -ik_y, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -ik_z, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad \Delta \rightarrow -k^2 \quad (1.100)$$

В итоге получим алгебраическое выражение:

$$\hat{L} \left\{ \tilde{u}(\omega, \vec{k}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} \right\} = D(\omega, \vec{k}) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}, \quad (1.101)$$

где $D(\omega, \vec{k})$ - дисперсионная функция. Например, для волнового уравне-

ния $D(\omega, \vec{k}) = -k^2$. В итоге уравнение (1.99) запишется в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [D(\omega, \vec{k})\tilde{u}(\omega, \vec{k}) - \tilde{\rho}(\omega, \vec{k})] e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} d\omega d\vec{k} = 0, \quad (1.102)$$

причём это равенство должно быть тождеством (выполняться при любых x, y, z, t). Для этого необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение обращалось в ноль:

$$D(\omega, \vec{k})\tilde{u}(\omega, \vec{k}) = \tilde{\rho}(\omega, \vec{k}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}(\omega, \vec{k}) = \frac{\tilde{\rho}(\omega, \vec{k})}{D(\omega, \vec{k})} \quad (1.103)$$

Теперь остаётся записать решение в виде преобразования Фурье:

$$u(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\rho}(\omega, \vec{k})}{D(\omega, \vec{k})} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} d\omega d\vec{k} \quad (1.104)$$

Часто при записи уравнения без потерь такой интеграл расходится. Для расчётов интегралов (в общем случае нетривиальных) используются разные методы, в том числе численные.

Коэффициент возбуждения зависит от источника $\tilde{\rho}$ и от дисперсионной функции D .

Если мы подставим в уравнение плоскую монохроматическую волну, получим дисперсионное уравнение – условие существования нетривиального решения уравнения в виде плоской монохроматической волны.

$$\hat{L}e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad D(\omega, \vec{k})\cancel{e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}} = 0 \quad (1.105)$$

Если рассматривать интеграл (1.104) в комплексной плоскости, то полюса подынтегрального выражения будут определять зависимость между ω и \vec{k} .

Если вдуматься, метод разложения Фурье представляет собой метод разделения переменных, только на бесконечной области. Для примера рассмотрим волновое уравнение струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.106)$$

Можно было разделить переменные и получить решение в виде:

$$u(x, t) = \sum_n \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} ct + B_n \sin \frac{\pi n}{l} ct \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.107)$$

Здесь можно ввести спектр частот $\omega_n = \frac{\pi n}{l} c$ и спектр волновых чисел $k_n = \frac{\pi n}{l}$. Также здесь выполняется дисперсионное соотношение:

$$\frac{\omega_n}{k_n} = c \quad (1.108)$$

При $l \rightarrow \infty$ произойдёт переход в непрерывный спектр, и ряд Фурье обратится в интеграл Фурье.

Само представление плоской монохроматической волны можно понимать как разделение переменных:

$$e^{i\omega t} \cdot e^{-ik_x x} \cdot e^{-ik_y y} \cdot e^{-ik_z z} \quad (1.109)$$

Вернёмся к дисперсионному уравнению. Оно определяется только видом оператора \hat{L} , т.е. видом волнового уравнения. Можно задать действительные значения \vec{k} и найти комплексные $\omega(\vec{k})$, как говорят, разделить спектр частот собственных колебаний струны.

А можно, наоборот, задать действительные ω и находить комплексные $\vec{k}(\omega)$. Каким образом поступать, зависит от постановки задачи: в теории волн различают начальную задачу (первый подход) и граничную задачу (второй подход).

Начальная задача (Коши). Пусть в пространственно-однородной безграничной среде некоторыми источниками создано в начальный момент времени $t = 0$ распределение поля (электромагнитного или акустического).

Возникает вопрос: как это поле будет эволюционировать при $t > 0$ при уже отключённом источнике? Математически это уравнение поля

$$\hat{L}u = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad \text{где} \quad \left. \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right|_{t=0} = v_n(\vec{r}). \quad (1.110)$$

Здесь $n = 0, 1, \dots, N - 1$, где N – порядок старшей производной по времени в операторе \hat{L} .

Применим метод Фурье – разложим поле в трёхмерный интеграл

только по пространственным переменным:

$$u(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \quad (1.111)$$

Подставив разложение в уравнение (1.110), получим

$$\begin{aligned} \hat{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{L} \tilde{u}(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \hat{D} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{k} \right) \tilde{u}(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = 0 \end{aligned} \quad (1.112)$$

Оператор \hat{D} получается из оператора \hat{L} . Для выполненная тождества (1.112) положим подынтегральное выражение равным нулю – это обыкновенное дифференциальное уравнение для Фурье-образа \tilde{u} :

$$\hat{D} \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{k} \right) \tilde{u}(\vec{k}, t) = 0 \quad (1.113)$$

Решение в общем виде можно искать в виде

$$\tilde{u}(\vec{k}, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{u}_n(\vec{k}) e^{i\omega_n(\vec{k})t} \quad (1.114)$$

где $\omega_n(\vec{k})$ – решение уравнения $D(\omega, \vec{k}) = 0$.

Можно разложить в ряд и начальный условия v_n , откуда найдутся \tilde{u}_n , и решение начального задачи запишется в виде

$$u(\vec{r}, t) = \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_n(\vec{k}) e^{i\omega_n(\vec{k})t - i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \quad (1.115)$$

Такие волны называются *нормальными волнами* среды, и уравнение – ни что иное, как разложение по нормальным волнам.

Понятие нормальных волн в распределённых системах обобщает понятие нормальных колебаний в сосредоточенных системах.

Знак мнимой части ω_n покажет развитие во времени: если для всех

$n \operatorname{Im} \omega_n > 0$, то амплитуда поля всех нормальных волн среды будет спадать во времени, и $\operatorname{Im} \omega_n$ называется *декрементом затухания* соответствующего возмущения.

Если какой-то корень ω_n чисто действительный, то это решение описывает собственные незатухающие колебания среды.

Если же имеется хотя бы один корень дисперсионного уравнения ω_n с отрицательной мнимой частью, то это достаточное условие неустойчивости среды, и соответствующее возмущение будет экспоненциально нарастать во времени. В этом случае $\operatorname{Im} \omega_n$ называется инкрементом нарастания соответствующего возмущения.

Давайте рассмотрим для наглядности одномерный случай: одномерное поле, заданное в начальный момент времени, например, в виде синуса:

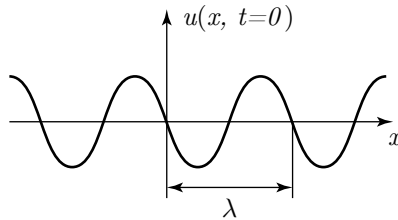


Рис. 9: Начальное распределение

Пусть мы знаем дисперсионное уравнение среды. Определим пространственный период

$$k = k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.116)$$

и подставим в дисперсионное уравнение. К полученным корням применимы все рассуждения выше о затухающих, нарастающих и незатухающих решениях эволюции распределения поля.

Граничная задача. При постановке граничной задачи подразумевается, что заданы источники с известной временной зависимостью $\rho(\vec{r}, t)$: в простейших случаях это монохроматическое поле $\tilde{\rho}(\vec{r})e^{i\omega t}$. Если поле не монохроматическое, то можно разложить в ряд по монохроматическим.

Теперь мы находим из заданных действительных ω комплексные значения $\vec{k}(\omega)$. Поле представляется в виде суперпозиции нормальных мод

$$u = \sum_n u_n e^{i\omega t - i\vec{k}_n(\omega)\vec{r}} \quad (1.117)$$

В электродинамике, при решении задач на волны в волноводе дисперсионное соотношение связывает продольную и поперечную по отношению к оси компоненты вектора \vec{k}

$$\kappa_{mn}^2 + h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.118)$$

Метод функций Грина. Этот метод тесно связан с преобразованием Фурье и широко применяется в физике. Функция Грина, или, как её ещё называют, фундаментальное решение – это решение уравнения с мгновенным источником в правой части и удовлетворяет по определению следующему соотношению:

$$\hat{L}G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (1.119)$$

где $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$. В точке (x', y', z') расположен точечный источник и он «срабатывает» в момент времени t' .

Функция Грина является решением при таком точечном мгновенном возмущении. Её можно найти с помощью преобразования Фурье. Введём плотность источника

$$\rho_\delta(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (1.120)$$

Можно найти Фурье-образ $\tilde{\rho}(\omega, \vec{k})$ и, пользуясь свойствами дельта-функции, легко найти интеграл:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_\delta(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\delta(\vec{r}, t) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \exp\{-i\omega t' + i\vec{k}\vec{r}'\}. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Фурье-образ мгновенного точечного источника – это и есть плоская монохроматическая волна, и наоборот.

Подставляя ρ_δ в исходное уравнение $\hat{L}G = \rho_\delta$, получаем по выведенной ранее формуле решения (1.104) интегральное представление функции Грина:

$$G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega(t-t') - i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{D(\omega, \vec{k})} d\omega d\vec{k} \quad (1.122)$$

Отсюда видно, что функция Грина представляет собой преобразование Фурье от $\frac{1}{D}$.

Пусть мы вычислили этот интеграл и нашли функцию Грина. Тогда, с помощью этой функции, можно очень легко находить решения уравнения с произвольной правой частью

$$\hat{L}u = \rho(\rho, t). \quad (1.123)$$

Решение этого уравнения представляется в виде свёртки функции Грина с функцией источника

$$u(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{r}', t') G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d\vec{r}' dt', \quad (1.124)$$

что легко проверить, подставив этот интеграл в уравнение (1.123):

$$\begin{aligned} \hat{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{r}', t') G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') d\vec{r}' dt' &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{r}', t') \hat{L}\{G(\vec{r} - \vec{r}', t - t')\} d\vec{r}' dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\vec{r}', t') \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') d\vec{r}' dt' = \rho(\vec{r}, t). \quad \square \quad (1.125) \end{aligned}$$

Подытожим: решение можно представить как в спектральном виде, так и в виде свёртки с функцией Грина. Если источник хитро распределён, удобнее использовать преобразование Фурье; а в электродинамике (например, когда задана пара диполей) удобнее функция Грина. Оба

метода основаны на принципе суперпозиции.

Физический смысл свёртки с функцией Грина – это суперпозиция расходящихся сферических волн:

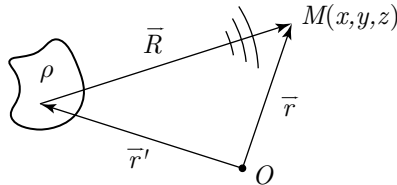


Рис. 10: Точка наблюдения волны от произвольного источника

Мы мысленно разбиваем источник на суперпозицию точечных, каждый из которых излучает расходящуюся сферическую волну (описываемую функцией Грина), и поле в точке наблюдения получается как суперпозиция таких волн.

Равенство подходов функции Грина и разложения Фурье представляет собой *равенство Парсеваля*: интеграл Фурье от произведения двух функций есть свёртка их фурье-образов (и наоборот).

Групповая скорость. Можно ввести понятие групповой скорости. Мы вводили плоскую монохроматическую волну:

$$u = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi_0) \quad (1.126)$$

Это математическая абстракция, волна осциллирует в бесконечном пространстве и времени. Реальный источник имеет время включения и его волна локализована в пространстве. Для этого надо как-то модулировать правую часть (1.126): например, задать амплитуду (амплитудная модуляция)

$$A(t) = \begin{cases} A_0, & |t| < T \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (1.127)$$

Независимо от того, какой параметр волны мы меняем, спектр такой модифицированной функции даст не одну частоту, а целый континуум: поле реального источника представляется как разложение по плоским монохроматическим волнам.

Возникает вопрос: как будет распространяться такое поле, которое имеет модуляцию и что с ним будет происходить? Для этого удобно посмотреть на начальную задачу в одномерном случае. Пусть у нас в начальный момент времени задано распределение

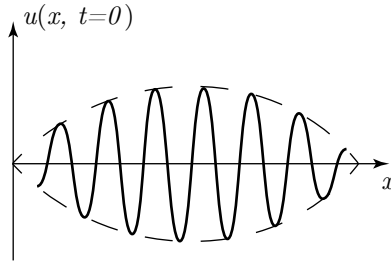


Рис. 11: Начальный пакет

Пусть у нас в некий начальный момент времени некоторым источником создана локализованное в пространстве распределение поля, которое схематически изображено на рис. 11.

Как будет происходить эволюция такого распределения в последующие моменты времени?

$$u(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\vec{k}) e^{i\omega(\vec{k})t - i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \quad (1.128)$$

Естественно, вычислить интеграл в таком виде, ничего не конкретизируя, невозможно. Но можно приближенно его вычислить, если задаться приближением квазимонохроматического сигнала (или импульса). Это означает, что мы будем рассматривать сигнал, слабо отличающийся от монохроматической волны – достаточно протяжённый в пространстве и времени с плавно меняющейся амплитудой.

Чем плавнее изменение этого сигнала, тем уже его пространственный спектр. В пределе плоской монохроматической волны спектр переходит в дельта-функцию.

Для квазимонохроматического импульса качественно спектр можно изобразить в одномерном случае (для наглядности) следующим образом:

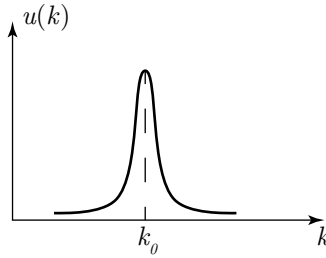


Рис. 12: Спектр квазимонохроматического импульса

В упрощающем предположении квазимонохроматичности можно сказать: поскольку подынтегральная функция быстро спадает при удалении от окрестности несущего волнового вектора, то для приближенной оценки интеграла можно разложить подынтегральную функцию в этой окрестности

$$\begin{aligned} \omega(k_x, k_y, k_z) &= \\ &= \omega(k_{0x}, k_{0y}, k_{0z}) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right|_{\vec{k}_0} (k_x - k_{0x}) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right|_{\vec{k}_0} (k_y - k_{0y}) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right|_{\vec{k}_0} (k_z - k_{0z}) = \\ &= \omega(\vec{k}_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{k}_0} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0). \end{aligned} \quad (1.129)$$

При удалении от \vec{k}_0 следовало бы брать следующие члены разложения, но нам они не нужны: при удалении от окрестности амплитуда подынтегрального выражения быстро спадает.

Подставив разложение (1.129) в интеграл (1.128), получим

$$\begin{aligned} u(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\vec{k}) e^{i\omega(\vec{k}_0)t + i \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right|_{\vec{k}_0} (\vec{k} - \vec{k}_0)t - i\vec{k}_0 \vec{r} - i(\vec{k} - \vec{k}_0) \vec{r}} d\vec{k} = \\ &= e^{i\omega(\vec{k}_0)t - i\vec{k}_0 \vec{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\vec{k}) e^{-i \left(\vec{r} - \left. \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{k}_0} t \right) (\vec{k} - \vec{k}_0)} d\vec{k}. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Сделаем линейную замену $\vec{k}' = \vec{k} - \vec{k}_0$. Якобиан этого преобразования

равен 1, а пределы не меняются:

$$u(\vec{r}, t) = e^{i\omega(\vec{k}_0)t - i\vec{k}_0\vec{r}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\vec{k}') e^{-i\left(\vec{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\Big|_{\vec{k}_0} t\right) \cdot \vec{k}'} d\vec{k}' \quad (1.131)$$

Последний интеграл представляет собой ни что иное, как преобразование Фурье от следующей функции:

$$A\left(\vec{r} - \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\Big|_{\vec{k}_0} t\right) \quad (1.132)$$

Подставив начальный момент времени $t = 0$, получим

$$u(\vec{r}, 0) = e^{-i\vec{k}_0\vec{r}} A(\vec{r}) \quad (1.133)$$

Из уравнений (1.131), (1.132), (1.133) следует, что квазимонохроматический импульс распространяется со скоростью $\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}$ без искажения формы. Естественно эту скорость назвать групповой и обозначить

$$\vec{v}_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\Big|_{\vec{k}_0}, \quad (1.134)$$

где \vec{k}_0 – несущий волновой вектор, а $\omega(\vec{k}_0)$ – несущая частота.

Если есть несколько нормальных волн, то групповую скорость вводят для каждой из них.

Понятие групповой скорости не так просто: им далеко не всегда можно пользоваться. Во-первых, для коротких импульсов (в пространстве и во времени) приближение квазимонохроматичности не работает и понятие групповой скорости ввести невозможно. Это совершенно очевидно, так как в реальных средах есть дисперсия, фазовая скорость зависит от частоты – и при распространении импульс может существенно деформироваться:

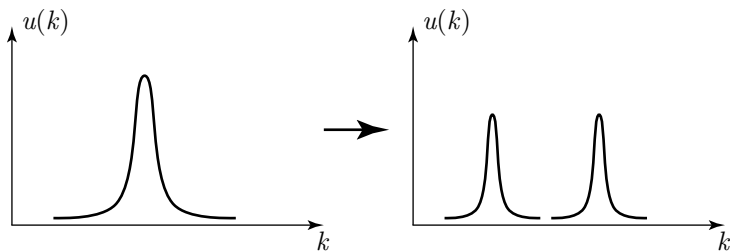


Рис. 13: Изменение формы спектра при распространении в среде с дисперсией.

Непосредственно с этим связан вопрос о групповой скорости в среде с поглощением. На самом деле, учёт поглощения даёт дисперсию, и волновой пакет может и деформироваться, и его амплитуды могут уменьшаться. В этом случае тоже бессмысленно вводить групповую скорость: ею можно ввести только в области прозрачности среды, где можно пренебречь поглощением.

Групповая скорость, в отличие от фазовой, всегда меньше скорости света:

$$|v_{gr}| \leq c \quad (1.135)$$

Фазовая скорость – понятие более формальное и для неё такое соотношение не верно.

2 Волны в жидкостях и газах

2.1 Физические свойства тел

Поговорим о физических свойствах тел, встречающихся в природе: в первую очередь, о жидкостях и газах. Прежде всего, жидкости и газы обладают общим свойством текучести. Можно сказать, что они не обнаруживают сил сопротивления при изменении своей формы. Вследствие текучести математическое описание жидкостей и газов одинаково.

Существенно отличаются термодинамические свойства жидкостей и газов. Если взять, например, газ, то простейшая модель идеального газа (или более сложная Ван-дер-Ваальса) имеют уравнение состояния, то есть связь в равновесном состоянии $p = p(V, T)$.

$$pV = \nu RT \quad (2.1)$$

В то же время для жидкостей записать уравнение состояния записать не получается, хотя физически возможно. Дело в том, что на самом деле в газе можно пренебречь взаимодействием между частицами и вычислить статистический интеграл – получить уравнение состояния; учёт же взаимодействия (а в жидкостях взаимодействие существенно) делает расчёт стат-интеграла (точнее, стат-суммы, так как есть квантовые эффекты) очень сложным. Во многом эта задача не решена, и получить теоретически уравнение состояния жидкости или твёрдого тела удаются только в отдельных моделях.

В то же время существует большое число полуэмпирических уравнений состояния для жидкости: экспериментально измерили некие параметры и аппроксимировали их некой кривой.

Следующий тип среды – твёрдое тело: в отличие от жидкости и газа, твёрдые тела не обладают свойством текучести и имеют определённую форму, и даже небольшие попытки изменить эту форму приводят к значительным упругим силам, противодействующим попыткам изменить форму (так называемая сдвиговая упругость). Это качественное отличие. В жидкостях есть объёмная упругость. В твёрдых телах объёмная упругость выше, чем у жидкостей и газов.

Это качественное отличие приводит к существенному отличию волновых процессов в этих средах.

Твёрдые тела делятся на три класса: кристаллы – твёрдые тела, имеющие трёхмерную периодическую атомную структуру (атомную решёт-

ку). Про кристаллы иногда ещё говорят, что они монокристаллы: хотят отличить их от другой большой группы – поликристаллов.

Кристаллы, встречающиеся в природе – кварц, алмаз и так далее. Для монокристаллов из-за наличия периодической атомной структуры существенно анизотропны физические свойства: это означает наличие выделенных направлений (так называемых кристаллографических осей симметрии) и разные свойства кристалла различны по отношению к рассматриваемому направлению кристаллографической оси. Распространение электромагнитных волн вдоль, поперёк, под углом к кристаллографической оси будут происходить по разным законам.

В быту более привычный класс сред – поликристаллы: совокупность мелких монокристаллов, сросшихся между собой и хаотически ориентированных в пространстве. Эта хаотичность в макромасштабе даёт изотропность физических свойств.

Все металлы, сплавы, керамики являются поликристаллами.

Третий, последний выделенный нами класс твёрдых тел – аморфные тела: в них даже в малом масштабе отсутствует любая периодичность атомов. Это стекла, смолы, пластмассы. Аморфные тела занимают промежуточное положение между жидкостями и твердыми телами, и иногда бывает удобно описывать их как жидкость с очень высоким коэффициентом вязкости. Они обладают некой текучестью, и она проявляется на больших временах.

Для общего познания скажем, что есть четвёртый класс твёрдых тел – квазикристаллы, не так давно открытые: тела, в которых имеется упорядоченная, но не периодическая атомная структура.

Свойства веществ зависят от среднего расстояния между частицами и потенциала сил межатомного взаимодействия. Атомы и молекулы в разных средах – частицы нейтральные, но они взаимодействуют по достаточно универсальному закону $\Phi(R)$:

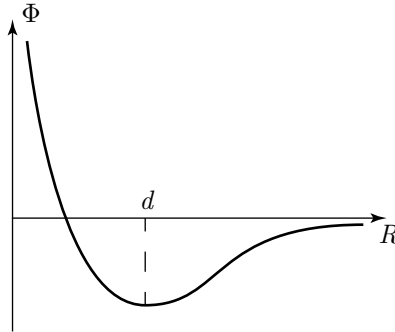


Рис. 14: Потенциал частиц в общем случае

На малых расстояниях частицы сильно отталкиваются друг от друга, дальше есть потенциальная яма на характерном расстоянии d , в котором частицы находятся в устойчивом состоянии равновесия относительно друг друга. В жизни $d \sim 1 \div 3$ ангстрем².

Самая простая и известная аппроксимация потенциала – аппроксимация Ленарда-Джонса:

$$\Phi = \Phi_0 \left[\left(\frac{\sigma}{R} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{R} \right)^6 \right] \quad (2.2)$$

Константы Φ_0 и σ можно найти только из эксперимента и из теории практически не находятся. Дифференцируя потенциал, получим силу:

$$\vec{F} = - \text{grad } \Phi. \quad (2.3)$$

Согласно этой аппроксимации, сила отталкивания пропорциональна R^{-13} . Это не вызывает большого удивления: атом в атом захихнуть нельзя. Гораздо интереснее вопрос о том, почему нейтральные частицы притягиваются на больших расстояниях? Она достаточно слабая, пропорциональная R^{-7} , но присутствует.

Это так называемые ван-дер-ваальсовы силы: они обусловлены диполь-дипольным взаимодействием. У многих молекул имеется дипольный момент: самый знакомый пример – водяной пар.

²1Å = 10⁻¹⁰ м

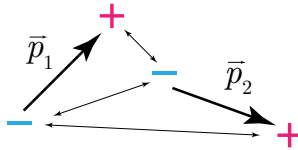


Рис. 15: Диполь-дипольное взаимодействие

Условно говоря, поскольку расстояние между разнозаряженными частями двух диполей разное, суммарная сила взаимодействия может оказаться не равной нулю. Ван-дер-Ваальс еще до появления квантовой механики на основе этого соображения получил полуэмпирическое уравнение состояния.

Если же два атома в основном состоянии не имеют дипольного момента (например, два атома водорода, у которых усреднение оператора дипольного момента по сферически симметричной волновой функции даёт ноль). Однако система двух атомов не обладает сферической симметрией волновой функции, есть некое искажение – получаем наведённый дипольный момент, и опять приходим к ван-дер-ваальсовым силам.

В твёрдых телах $d_{sr} \sim d$, и по порядку величины можно оценить

$$d_{sr} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{N}} = N^{-\frac{1}{3}} \quad (2.4)$$

В жидкостях $d_{sr} \gtrsim d$. Строгого порядка нет, и расстояния могут изменяться. А в газах $d_{sr} \gg d$, и если смотреть на кривую потенциала, то мы находимся в правой части графика.

Что происходит с твёрдым телом при нагревании? При некоторой температуре происходит переход в жидкое состояние. При этом, как правило, изменение плотности незначительно (несколько процентов). При дальнейшем нагревании жидкости в конце концов происходит фазовый переход в газообразное состояние с существенным понижением плотности: характерное значение – в 1000 раз.

Если мы введём эффективную тепловую энергию неупорядоченного движения частиц как

$$E = \varkappa T \approx 0.1 - 1 \text{ eV} \quad (2.5)$$

При таких температурах и энергия частиц может происходить дис-

социация – распад молекул на атомы: например,



При дальнейшем повышении энергии, например, до 10^3 электрон-вольт может произойти ионизация: в результате соударений электроны отрываются от атомов и формируется ионизированный газ – состоящий из заряженных частиц. Его ещё называют четвёртым агрегатным состоянием вещества – плазмой.

2.1.1 Гипотеза сплошной среды

Неважно, с каким телом мы имеем дело: у нас основная масса вещества сосредоточена в ядрах атомов и эти атомы разделены достаточно большими, по сравнению с их размерами, пустотами. Допустим, мы хотим ввести плотность этого вещества. Как тогда поступать? Пусть для простоты все частицы одной массы m , тогда плотность

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^N m \delta(\vec{r} - \vec{r}_k(t)). \quad (2.7)$$

Мы всегда будем говорить о сплошных средах, содержащих число молекул порядка числа Авогадро $N \sim N_A \sim 10^{23}$. Для всех частиц нужно решать уравнения движения: колоссальное число уравнений, и это совершенно невозможно. Кроме того, даже если бы это было возможно, неудобно дальше работать с дельта-функциями.

На этом моменте нужна и вводится гипотеза сплошной среды: введём понятие физически бесконечно малого объёма ΔV . Под ним будем понимать следующую величину:

$$d_{sr}^3 \ll \Delta V \ll L^3, \quad (2.8)$$

где L – характерный размер рассматриваемого объекта, например, длина волны.

Также введём физически бесконечно малый промежуток времени: он должен быть много больше характерного времени флуктуаций в веществе (эффективного времени соударений) и много меньше характерного времени макроскопической задачи T , например, временного периода

волны.

$$T \gg \Delta t \gg \tau, \quad \tau \approx \frac{d_{sr}}{\langle v \rangle} \quad (2.9)$$

Мы можем сделать следующее: пусть у нас имеется некая абстрактная физическая величина $u(x, y, z, t)$. Мы проведём усреднение по физически бесконечно малым объёму (сфере радиуса a) и промежутку времени:

$$u(\vec{r}, t) = \frac{1}{\Delta T} \int \frac{1}{\Delta V} \int_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2} u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + t') d\xi d\eta d\zeta dt' \quad (2.10)$$

Такие средние величины будут непрерывными функциями координат и времени, и таким усреднением мы сглаживаем флуктуации, обеспеченные микроскопическим строением среды как совокупности отдельных частиц.

Для таких функций можно составлять дифференциальные уравнения, решать их, сравнивать с экспериментом.

Такой подход и называется гипотезой сплошной среды. Он совершенно естественен и понятен. Однако, математически строго доказать справедливость такого усреднения невозможно – поэтому оно и называется гипотезой.

Если задуматься, любой физический прибор неявным образом производит такое усреднение: пусть мы хотим померить температуру или плотность воздуха в комнате. Мы должны взять термометр (барометр). Очевидно, он должен быть по размерам много меньше комнаты, но, с другой стороны, много больше расстояний между частицами. Подержав некоторое время его в комнате (время, много большее микрофлуктуаций – чтобы установилось равновесие между прибором и средой, но разумное – нет смысла измерять годами). По сути, приведённый пример повторяет гипотезу сплошной среды.

2.2 Лагранжев и Эйлеров формализм

Движение в жидкостях и газах можно описывать двумя подходами: Эйлера и Лагранжа.

Лагранжев формализм. Лагранж предложил проследить за движением выделенного физически бесконечно малого объёма – условно говоря, частицы сплошной среды (часто пишут просто – жидкой частицы)

и построить её траекторию $\vec{r}(\vec{\xi}, t)$. Очевидно, траектория будет зависеть от начального положения частицы $\vec{\xi} = \vec{r}|_{t=0}$, где $\xi = \vec{e}_x x_0 + \vec{e}_y y_0 + \vec{e}_z z_0$.

Эйлеров формализм. Подход Эйлера же состоит в следующем: можно наблюдать за средой, находясь в неподвижной точке с радиусом-вектором \vec{r} , и измерять скорость пролетающих «через нас» частиц. Такая, измеренная в точке наблюдения скорость, называется эйлеровой:

$$\vec{v}(\vec{r}, t)$$

Определение. Изменение некоей физической величины u в фиксированной точке пространства M описывается частной (или локальной) производной по времени

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{u(M, t + \Delta t) - u(M, t)}{\Delta t}. \quad (2.11)$$

Определение. Изменение физической величины u , привязанной к жидкой частице определяется полной (субстанциональной) производной по времени:

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{u(M', t + \Delta t) - u(M, t)}{\Delta t}, \quad (2.12)$$

где M' – положение частицы в момент времени $t + \Delta t$.

Полная (2.11) и частная (2.12) производные связаны соотношением

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla), \quad (2.13)$$

где $\vec{v} \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$ в декартовых координатах.

Операция взятия производной (как полной, так и частной) применима и к векторным, и к скалярным, и к тензорным величинам.

Уравнение неразрывности. Попробуем записать уравнение, которому подчиняются функции поля скоростей и плотности среды. Для этого можно использовать законы сохранения количества вещества, импульса, момента импульса и энергии в сплошной среде.

Самый простой и хорошо известный – закон сохранения массы (количества вещества). Выделим в среде объем V , неподвижный в нашей системе координат и ограниченный поверхностью S с внешней нормалью. Масса такого объема $m = \int_V \rho dV$. Если среда может двигаться через выделенный объем, то

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho \vec{v} d\vec{s} \quad (2.14)$$

Можно поменять местами интегрирование и дифференцирование, с одной стороны, а с другой – применить теорему Гаусса-Остроградского:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \rho \vec{v} d\vec{s} = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV \quad (2.15)$$

Отсюда

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \vec{v}] \right) dV = 0. \quad (2.16)$$

Так как необходимо выполнение закона при произвольном выборе объема интегрирования, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}[\rho \vec{v}] = 0 \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) представляет собой известное уравнение непрерывности (иногда говорят – неразрывности). Можно записать его в другом виде. Для этого нужно расписать второе слагаемое – div:

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho}_{\frac{d\rho}{dt}} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.18)$$

Ещё один способ записи уравнения неразрывности получается при введении понятия удельного объема, то есть объема единичной массы

$V = \rho^{-1}$. Подставив удельный объем в (2.18), получим

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \operatorname{div} \vec{v} \quad (2.19)$$

Уравнение движения. Запишем второй закон Ньютона для жидкой частицы массой dM :

$$dM \frac{d\vec{v}}{dt} = d\vec{F}_0 + d\vec{F}_s. \quad (2.20)$$

Здесь dF_0 – объёмная сила, действующая на каждый атом или молекулу среды. Например, это может быть сила тяжести, сила Лоренца для заряженной частицы, сила инерции. Часто вводят объёмную силу \vec{f} – силу, отнесённую к единице объёма:

$$d\vec{F}_0 = \vec{f} dx dy dz \quad (2.21)$$

Второе слагаемое $d\vec{F}_s$ – это сила со стороны внешней среды, действующая только на поверхность и возникающая за счёт вязкости (внутреннего трения в жидкостях и газах).

$$dM = \rho dV = \rho dx dy dz \quad (2.22)$$

Оказывается, $d\vec{F}_s$ удобно и полезно для дальнейших выкладок выразить через *напряжение*, которое вводится следующим образом:

Определение. Напряжение в сплошной среде в точке M с нормалью \vec{n} и поверхностью σ определяется как

$$\vec{p}_n = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{\vec{F}_{sn}}{\sigma}. \quad (2.23)$$

Предел здесь отражает локальность напряжения.

Для того, чтобы выразить поверхностную силу через напряжение, проведём локальное рассмотрение физически бесконечно малого объёма в виде параллелепипеда со рёбрами dx , dy , dz .

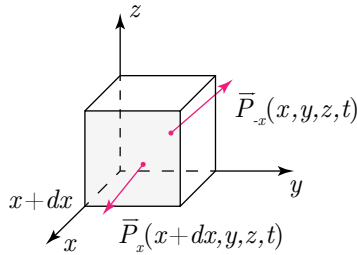


Рис. 16: Кубический объем и вектора \vec{p}_x, \vec{p}_{-x}

Рассмотрим грани, перпендикулярные оси x (для других будет аналогично). Напишем вектор напряжения на передней грани:

$$\vec{p}_x(x + dx, y, z, t) \tag{2.24}$$

На удалённой от нас грани

$$\vec{p}_{-x}(x, y, z, t) \tag{2.25}$$

Запишем равнодействующую сил, приложенных к этим двум граням, которые действуют со стороны внешней среды. В этом случае $\sigma = dx dy$, тогда

$$d\vec{F}_{sx} = (\vec{p}_x(x + dx, y, z, t) + \vec{p}_{-x}(x, y, z, t)) dx dy \tag{2.26}$$

Первое слагаемое можно разложить в ряд, а для второго учесть, что из третьего закона Ньютона следует $\vec{p}_{-x} = -\vec{p}_x$. Тогда получаем, что

$$d\vec{F}_{sx} = \vec{p}_x(x, y, z, t) + \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx - \vec{p}_x(x, y, z, t) = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx dy dz \tag{2.27}$$

В силу симметричности для осей y, z получится такое же выражение. Тогда суммарная сила, действующая на объем, будет

$$d\vec{F}_s = d\vec{F}_{sx} + d\vec{F}_{sy} + d\vec{F}_{sz} = \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dx dy dz. \tag{2.28}$$

Вектора $\vec{p}_{x,y,z}$ называются главными векторами напряжений: они дают напряжение в сплошной среде на трёх перпендикулярных площадках в точке M . Если спроецировать главные вектора напряжений на оси, то

можно посчитать число величин, задающих напряжение:

$$\begin{aligned}\vec{p}_x &= p_{xx}\vec{e}_x + p_{xy}\vec{e}_y + p_{xz}\vec{e}_z, \\ \vec{p}_y &= p_{yx}\vec{e}_x + p_{yy}\vec{e}_y + p_{yz}\vec{e}_z, \\ \vec{p}_z &= p_{zx}\vec{e}_x + p_{zy}\vec{e}_y + p_{zz}\vec{e}_z\end{aligned}\quad (2.29)$$

Девять величин составляют тензор второго ранга, который называется тензором внутренних напряжений, или, как часто сокращают в литературе, просто *тензором напряжений*. Если занумеровать координатные оси по определённом правилу, например $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$, то компоненты тензора напряжений можно записать как p_{ik} , где $i, k = 1, 2, 3$.

Подставив выражения для сил (2.27), (2.21) в уравнение движения (2.20), получим

$$\rho dx dy dz \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} dx dy dz + \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (2.30)$$

На объём, естественно, можно сократить, а получившееся уравнение записать в индексном виде через проекции на i -тую ось:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \quad (2.31)$$

В литературе никогда суммы по повторяющимся (немым) индексам не пишут и вводят соглашение, по которому сумма не пишется, но подразумевается. Далее мы будем пользоваться этим соглашением, и в соответствии с ним уравнение движения

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \quad \Rightarrow \quad \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = f_i + \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} \quad (2.32)$$

Можно записать поверхностную силу в индексных обозначениях³

$$dF_{si} = \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} dV, \quad (2.33)$$

выбрать объём (уже не обязательно физически бесконечно малый) и найти для него суммарную поверхностную силу. При этом для тензорного

³Здесь видно, что производная имеет размерность и смысл силы, приложенной к единице объёма.

поля справедлива теорема Гаусса-Остроградского, и с учётом этого

$$F_s = \int_V \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_k} dV = \oiint_S n_k p_{ki} dS, \quad (2.34)$$

где n_k – нормаль в текущей точке интегрирования.

Из последнего выражения видно, что $n_k p_{ki}$ имеет смысл i -той компоненты силы, приложенной в сплошной среде к единичной площадке с нормалью, направленной по оси с номером k .

Отметим, что проинтегрировав по объёму, мы формально перешли к поверхностному интегралу. Но физически это отражает тот факт, что поверхностные силы, действующие внутри объёма, уравниваются за счёт третьего закона Ньютона, а на поверхности уравнивающая сила отсутствует.

Без вывода отметим, что тензор напряжений в силу закона сохранения момента импульса симметричен, и имеет не 9, а 6 компонент:

$$p_{ki} = p_{ik} \quad (2.35)$$

От чего должны зависеть компоненты тензора напряжений? Прежде всего рассмотрим неподвижную среду: из школьного курса физики знаем, что силы давления в жидкостях и газах действуют по нормали на стенки сосуда, независимо от ориентации площадки, на которую действуют.

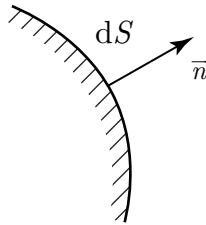


Рис. 17: Стенка объёма, на которую действует среда

Сила давления, очевидно, в таком простом случае

$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS \quad \Rightarrow \quad dF_i = -p n_i dS \quad (2.36)$$

С другой стороны, если вспомнить понятие тензора напряжений, можно

записать

$$dF_i = p_{ik}n_k dS \quad (2.37)$$

Для общности записи можно ввести обозначение нормали через символ Кронекера $n_i = \delta_{ik}n_k$:

$$-p\delta_{ik}n_k dS = p_{ik}n_k dS \quad \Rightarrow \quad p_{ik} = -p\delta_{ik} \quad (2.38)$$

В данном случае получили, что тензор напряжений оказался диагональным, $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$, что отражает закон Паскаля: сила давления не зависит от ориентации площадки и действует по нормали.

В общем случае жидкость уже не будет неподвижной, и сила будет действовать не только по нормали, но и по касательной. Такие тангенциальные силы возникают из-за вязкости (внутреннего трения). Поэтому в общем случае удобно записать тензор напряжений таким образом:

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + p'_{ik}. \quad (2.39)$$

Здесь p'_{ik} – тензор вязких напряжений.

Интуитивно понятно, что тензор вязких напряжений может зависеть от свойств среды и от градиентов поля скоростей (то есть от того, как происходит обтекание поверхности).

Рассмотрим распределение поля скоростей $\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t)$ в жидкой частице (физически бесконечно малом объёме):

$$\begin{aligned} v_i(\vec{r} + d\vec{r}, t) &= \\ &= v_i(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x} dx + \frac{\partial v_i}{\partial y} dy + \frac{\partial v_i}{\partial z} dz = v_i(\vec{r}, t) + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx_k \end{aligned} \quad (2.40)$$

Обозначим последнюю производную как тензор и тождественно разобьём на симметричный ($S_{ik} = S_{ki}$) и антисимметричный ($A_{ik} = -A_{ki}$) тензоры⁴:

$$D_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}[D_{ik} + D_{ki}] + \frac{1}{2}[D_{ik} - D_{ki}] = S_{ik} + A_{ik} \quad (2.41)$$

Исходя из определения тензора D_{ik} нетрудно найти элементы тензора A

⁴Такое разложение можно осуществлять для любого тензора

и его матрицу:

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.42)$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = A_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (2.43)$$

Можно заметить, что последнее выражение представляет собой компоненту ротора скорости, и легко проверить, что

$$\hat{A} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} [\text{rot } \vec{v} \times d\vec{r}] = [\vec{\omega} \times d\vec{r}], \quad (2.44)$$

где введено понятие завихрённости (мгновенной угловой скорости вращения жидкой частицы) $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$.

Окончательно с учётом вышесказанного поле скоростей

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t) &= \vec{v}(\vec{r}, t) + \hat{A} \cdot d\vec{r} + \hat{S} \cdot d\vec{r} = \\ &= \vec{v}(\vec{r}, t) + [\vec{\omega} \times d\vec{r}] + \hat{S} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Последнее соотношение представляет собой ни что иное, как *теорему Коши-Гельмгольца*: она говорит о том, что движение жидкой частицы можно разложить на три составляющие – первые два соответствуют параллельному переносу и повороту жидкости как целого без изменения формы, и последнее отвечает деформационному движению (изменению объёма и формы жидкой частицы).

Тензор \hat{S} называется тензором скоростей деформаций:

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (2.46)$$

Формально запишем тензор скоростей деформаций в виде суммы бесследового тензора и отдельно – следа

$$S_{ik} = \left[S_{ik} - \frac{1}{3} \text{Tr}(S_{ik}) \delta_{ik} \right] + \frac{1}{3} \text{Tr}(S_{ik}) \delta_{ik}, \quad (2.47)$$

где $\text{Tr}(S_{ik}) = S_{11} + S_{22} + S_{33}$. Нетрудно заметить, что

$$\text{Tr}(S_{ik}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \vec{v} \quad (2.48)$$

Смысл такого добавления и вычитания в том, что первое слагаемое получилось бесследовое – описывает деформации чистого сдвига без изменения объёма (сдвиговые деформации), а второе – объёмные деформации.

2.3 Уравнение Навье-Стокса

Тензор напряжений должен быть связан с полем скоростей и должен быть связан с тензором S_{ik} . В основе этой связи лежит гипотеза Ньютона (1640): *напряжение пропорционально скоростям деформаций*.

Ньютон получил эту гипотезу, рассматривая следующий эксперимент:

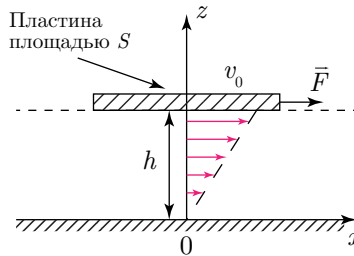


Рис. 18: Жидкость с пластиной на поверхности

На верхнем слое жидкости лежит пластина площади S . Если тянуть с некоторой постоянной силой F эту пластинку по поверхности, оказывается, что в конце концов устанавливается постоянная скорость пластины v_0 : значит, тянущую силу уравнивает некая противоположная сила. При этом в слое жидкости устанавливается линейный профиль скорости

$$v_x = v_0 \frac{z}{h}. \tag{2.49}$$

Измерив силу, Ньютон получил, что

$$F = \eta \frac{v_0}{h} S. \tag{2.50}$$

Здесь η – коэффициент вязкости, зависящий от свойств жидкости⁵.

⁵В реальности коэффициент вязкости сильно зависит ещё от температуры

Можно найти касательные компоненты тензора внутренних напряжений

$$p_{xz} = p_{zx} = \frac{F}{S} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (2.51)$$

Обобщая опытные факты Ньютона о течении реальных жидкостей, почти два века спустя Навье и Стокс записали в общем виде формулу для связи p_{ik} и S_{ik} :

$$p_{ik} = 2\eta \left[S_{ik} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ik} \right] + \zeta \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ik} \quad (2.52)$$

Множитель в квадратных скобках первого слагаемого (2.52) иногда называют *девиатором*.

Видно, что из этого выражения легко получить полученное Ньютоном для чисто сдвигового движения (бездивергентного). Если мы будем наблюдать (при условиях эксперимента Ньютона) за движением жидкой частицы в виде параллелепипеда при сдвиговом движении, очевидно, что верхняя часть жидкой частицы, двигаясь с большей скоростью, «убежит» вперёд и обгонит нижнюю часть: получится скошенный параллелепипед – изменилась форма, но не объем – потому и можно говорить о бездивергентном движении.

Подставив (2.52) в уравнение движения (2.32) получаем⁶ следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_i}{dt} &= f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = f_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-p\delta_{ik} + 2\eta S_{ik} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ik} \right) = \\ &= f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\operatorname{div} \vec{v}}_{\frac{\partial v_k}{\partial x_k}} = \\ &= f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Восстановим вид уравнения в векторном виде:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} \quad (2.54)$$

Уравнение (2.54) называется уравнением Навье-Стокса. Здесь η – сдви-

⁶В случае однородной жидкости, где η, ζ не зависят от координат

говая вязкость, ζ – объёмная.

Формула Навье-Стокса не справедлива в средах с большими градиентами: в этом случае нельзя ограничиться линейным приближением p'_{ik} , и вообще говоря, приближением сплошной среды тоже. Также формула Навье-Стокса не работает для суспензий (мелкодисперсных взвесей).

2.4 Проблема замыкания системы уравнений МСС

В любом случае система уравнений «уравнение Навье-Стокса + уравнение непрерывности» не позволяет решить задачу: скалярных уравнений всего 4, а переменных 5: p, ρ, v_x, v_y, v_z .

Существуют разные методы замыкания системы уравнений. Один из методов – использование закона сохранения энергии, но в этом случае получающиеся уравнения очень сложны, так как выводятся из термодинамики. Кроме этого, можно использовать ещё некоторые упрощённые методы.

В МСС применяются приближенные методы замыкания этой системы уравнений.

2.4.1 Приближение несжимаемой жидкости

В реальных экспериментах можно пренебречь сжимаемостью жидкости и положить $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Тогда уравнение непрерывности можно переписать в виде

$$\text{div } \vec{v} = 0, \quad (2.55)$$

и система уравнений становится замкнутой. Но нельзя применять это приближение для газов, так как они легко сжимаемы.

2.4.2 Баротропные процессы в сплошной среде

Исходя из соображений, зависящих от постановки задачи, можно добавить к системе условие баротропии $p = p(\rho)$. Функцию $p(\rho)$ можно считать адиабатической. Например, распространение звука в жидкостях и газах происходит так, что сжатие частиц происходит настолько быстро, что температура не успевает измениться и $dQ^* = 0$.

В простейшем случае идеальных газов

$$p \sim \rho^\gamma, \quad (2.56)$$

и такое соотношение замыкает систему.

2.4.3 Закон сохранения энергии

Наиболее последовательный способ – это использовать закон сохранения энергии. Рассмотрим первый принцип термодинамики применительно к физически бесконечно малому объему, содержащего большое число частиц

$$dQ = d\mathcal{E} + pdV, \tag{2.57}$$

где $V = \frac{1}{\rho}$ – удельный объем.

Существует два механизма передачи тепла в среде. Это теплопроводность – *перенос вещества, не связанный с макроскопическим движением среды*, и трение – *выделение тепла за счет сил вязкого трения, связанное с макроскопическим движением среды*.

$$\delta Q = \delta Q_{\text{теп}} + \delta Q_{\text{тр}} \tag{2.58}$$

Для первого слагаемого справедлив закон теплопроводности, он же закон Фурье: плотность потока тепла⁷ $\vec{\Pi}_Q$ определяется формулой

$$\vec{\Pi}_Q = -\kappa \nabla T, \quad \kappa > 0, \tag{2.59}$$

где κ - коэффициент теплопроводности.

Закон Фурье является простым линейным приближением закона теплопроводности. При больших градиентах температур (2.59) может нарушаться, но в таких случаях обычно уже нельзя применять гипотезу сплошной среды.

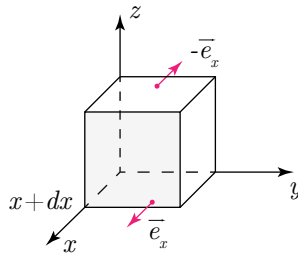


Рис. 19: Бесконечно малый объем $dx dy dz$

⁷Количество энергии, проходящее через единичную площадку в направлении, перпендикулярном направлению распространения в единицу времени

Проведём локальное рассмотрение физически бесконечно малого объёма в виде параллелепипеда со рёбрами dx, dy, dz (см. рис. 19). Запишем поток тепла через грани параллелепипеда, перпендикулярные оси x :

$$\vec{\Pi}_Q(x + dx, y, z, t) \vec{e}_x dydzdt + \vec{\Pi}_Q(x, y, z, t) \cdot (-\vec{e}_x) dydzdt \quad (2.60)$$

Проецируя на ось x и раскладывая в ряд, получаем

$$\begin{aligned} & [\Pi_{Qx}(x + dx, y, z, t) - \Pi_{Qx}(x, y, z, t)] dydzdt = \\ & \left(\Pi_{Qx}(x, y, z, t) + \frac{\partial \Pi_{Qx}}{\partial x} dx - \Pi_{Qx}(x, y, z, t) \right) dydzdt = \\ & = \frac{\partial \Pi_{Qx}}{\partial x} dx dydzdt \quad (2.61) \end{aligned}$$

Обобщая результат на все оси, имеем

$$dQ_{\text{теп}} = -\text{div} \vec{\Pi}_Q \frac{dx dy dz dt}{dM}, \quad (2.62)$$

где $dM = \rho^{-1} dV$ – единичная масса. Далее подставим поток тепла из закона Фурье и получим

$$dQ_{\text{теп}} = -\text{div} \vec{\Pi}_Q \frac{dt}{\rho} = \varkappa \text{div grad } T \frac{dt}{\rho} = \varkappa \Delta T \cdot \frac{dt}{\rho} \quad (2.63)$$

Теперь займемся теплом трения. Снова рассматриваем грани, перпендикулярные оси x . Аналогично предыдущим выкладкам для потока тепла можно рассчитать работу сил вязкого трения на гранях, перпендикулярных оси x за время dt

$$\frac{\partial}{\partial x} (p'_{ix} v_i) dx dy dz dt, \quad (2.64)$$

где p'_{ix} – тензор вязких напряжений. Тогда суммарная работа (по всем граням) будет

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (p'_{ix} v_i) + \frac{\partial}{\partial y} (p'_{iy} v_i) + \frac{\partial}{\partial z} (p'_{iz} v_i) \right] \frac{dx dy dz dt}{dM} = \frac{\partial}{\partial x_k} (p'_{ik} v_i) \frac{dt}{\rho}. \quad (2.65)$$

Не вся работа сил вязкого трения идет на изменение внутренней энергии. Часть этой энергии идет на изменение кинетической энергии части-

цы. Если мы, например, мы трем два бруска, то мы не преобразуем всю энергию в тепло, а буквально одним бруском мы перемещаем другой брусок. Поэтому из (2.65) необходимо вычесть ту часть работы, которая не преобразуется в тепло.

Для этого формально запишем уравнение движения при условии $f_i = 0$ и сразу подставим общий вид тензора $p_{ik} = -\delta_{ik}p + p'_{ik}$ (2.31). Полученное уравнение домножим его на $v_i p^{-1}$:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p'_{ik}}{\partial x_k} \Big| \cdot \frac{v_i}{\rho} \quad (2.66)$$

Получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial p'_{ik}}{\partial x_k} \frac{1}{\rho} \quad (2.67)$$

Последнее слагаемое как раз и отражает изменение кинетической энергии за счет трения. Тогда окончательное выражение для потерь тепла за счет трения

$$dQ_{\text{тр}} = \left[\frac{\partial(p'_{ik} v_i)}{\partial x_k} - v_i \frac{\partial p'_{ik}}{\partial x_k} \right] \frac{1}{\rho} dt = p'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{dt}{\rho} \quad (2.68)$$

Подставим теперь выражения для $Q_{\text{теп}}$ и $Q_{\text{тр}}$ в первый принцип термодинамики (2.57):

$$d\mathcal{E} = -pdV + Q_{\text{теп}} + Q_{\text{тр}} \quad (2.69)$$

$$d\mathcal{E} = -pdV + \kappa \Delta T \frac{dt}{\rho} + p'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{dt}{\rho} \quad (2.70)$$

Домножим получившееся уравнение на $\frac{\rho}{dt}$

$$\rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -p \underbrace{\rho \frac{dV}{dt}}_{\text{div } \vec{v}} + \kappa \Delta T + p'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (2.71)$$

Получили уравнение переноса тепла. Обычно его записывают в другом виде, подставляя тензор вязких напряжений через соотношение Навье-

Стокса $p'_{ik} = 2\eta[S_{ik} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ik}] + \zeta \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ik}$:

$$\rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -p \operatorname{div} \vec{v} + \kappa \Delta T + 2\eta \left[S_{ik} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ik} \right]^2 + \zeta (\operatorname{div} \vec{v})^2. \quad (2.72)$$

Уравнение переноса энергии получилось весьма сложным из-за тензора вязких напряжений. Поэтому часто это уравнение решают приближенно.

В частном случае неподвижной среды уравнение (2.72) преобразуется в уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \quad \text{где} \quad \chi = \frac{\kappa}{\rho c_v}. \quad (2.73)$$

Стоит отметить, что основной перенос тепла происходит не из-за теплопроводности, а за счет наличия конвекции: конвективные члены в уравнении переноса тепла содержат поле скоростей.

Допишем к уравнению Стокса уравнение непрерывности и рассмотрим идеальный газ. В этом случае получается замкнутая система уравнений: неизвестны скалярные поля ρ, p, T , векторное \vec{v} , и для их решения у нас есть 6 уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \operatorname{grad} p + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \eta \Delta \vec{v} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -p \operatorname{div} \vec{v} + \kappa \Delta T + 2\eta \left[S_{ik} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ik} \right]^2 + \zeta \operatorname{div}^2 \vec{v} \\ \mathcal{E} = c_v T \\ p = \frac{\rho}{M} RT \end{array} \right. \quad (2.74)$$

2.4.4 Вязкость и теплопроводность в МКТ. Идеальные жидкость и газ

МКТ рассматривает движение газа как движение частиц, из которых состоит среда. С точки зрения классических частиц вязкость отражает перенос импульса молекулами при соударениях, теплопроводность – пе-

ренос энергии.

Модель идеального газа в привычном смысле слова – совокупность материальных точек массы m , не взаимодействующих друг с другом. Но для материальных точек бессмысленно говорить о соударениях: они не могут с собой сталкиваться.

Поэтому под идеальным газом будем считать набор шариков радиуса a , которые взаимодействуют друг с другом только посредством упругих соударений. У них нет притяжения и отталкивания, но они могут упруго сталкиваться. В рамках такой модели «бильярдных шаров» удастся рассчитать коэффициенты \varkappa , η , ζ . С термодинамической точки зрения такая модель является идеальным газом, для которого можно записать уравнения состояния.

Усредняя скорости частиц в различных слоях газа между двумя движущимися пластинами, можно получить профиль скорости течения:

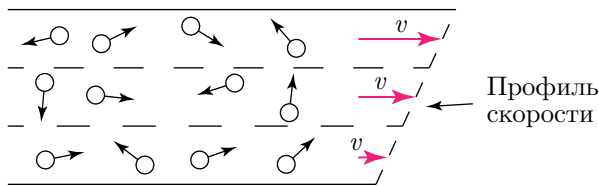


Рис. 20: Мгновенный снимок газа. Шарик – молекулы в нашей модели, а стрелки – мгновенные значения скоростей.

Более реальные модели сделать очень сложно и найти коэффициенты можно в основном только из экспериментов. В жидкости ещё существуют силы межмолекулярного взаимодействия, поэтому «бильярдная» модель не совсем справедлива.

Идеальная жидкость – это такая среда, в которой $\varkappa = \eta = \zeta = 0$, однако для неё несправедливы соотношения идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона).

2.5 Граничные условия

При наличии какой-либо границы раздела двух сред необходимо для решения задачи необходимо добавить *граничные условия* к нашей системе уравнений.

Условие прилипания. $\vec{v}(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in S} = \vec{v}_0$.

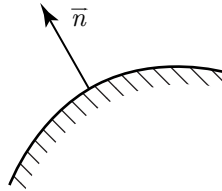


Рис. 21: Иллюстрация к граничным условиям

Если мы выкинем вязкость и теплопроводность, то только нормальная компонента скорости должна совпадать со скоростью поверхности $\vec{n} \cdot (\vec{v} - \vec{v}_0)|_{\vec{r} \in S} = 0$.

Если есть граница раздела между двумя несмешивающимися жидкостями или жидкостью и газом. Какие граничные условия мы должны писать? Совпадают скорости на границе и должен выполняться третий закон Ньютона. Это записывается с помощью тензора внутренних напряжений.

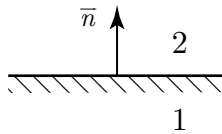


Рис. 22: Граница между двумя несмешивающимися средами

$$p_{ik}^{(1)} n_k|_S = p_{ik}^{(2)} n_k|_S \tag{2.75}$$

2.6 Уравнения линейной акустики и газодинамики

2.6.1 Линеаризация уравнений

Линеаризуем систему уравнений (2.74). Будем считать, что есть невозмущенное равновесное состояние жидкости или газа p_0, ρ_0, T_0 . Будем решать уравнения, представив соответствующие величины как сумму

равновесного значения и малой добавки:

$$p(\vec{r}, t) = p_0 + p_1(\vec{r}, t), \quad \left| \frac{p_1}{p_0} \right| \ll 1 \quad (2.76)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t), \quad \left| \frac{\rho_1}{\rho_0} \right| \ll 1 \quad (2.77)$$

$$T(\vec{r}, t) = T_0 + T_1(\vec{r}, t), \quad \left| \frac{T_1}{T_0} \right| \ll 1 \quad (2.78)$$

Распишем уравнение Навье-Стокса без правой части (внешней силы):

$$(\rho_0 + \rho_1) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \nabla) \vec{v}}_{\rightarrow 0} \right) = -\nabla(p_0 + p_1) + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} + \eta \Delta \vec{v}. \quad (2.79)$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости и убирая зануляющиеся слагаемые, получаем уравнение движения в линейном приближении

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} p_1 + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \eta \Delta \vec{v}, \quad (2.80)$$

и аналогичным образом получаем линеаризованное уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.81)$$

Далее произведем линеаризацию уравнения переноса тепла, сразу подставив $\varepsilon = c_v T$:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho_1) c_v \frac{dT_1}{dt} &= \rho_0 c_v \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T_1 \right) = \\ &= -p_0 \operatorname{div} \vec{v} - \cancel{p_1 \operatorname{div} \vec{v}} + \kappa \Delta T_1 + \text{другие н.л. члены} \end{aligned} \quad (2.82)$$

В итоге получаем линеаризованное уравнение переноса тепла

$$\rho_0 c_v \frac{dT_1}{dt} = -p_0 \operatorname{div} \vec{v} + \kappa \Delta T_1. \quad (2.83)$$

Соответственно получим линеаризованное уравнение состояния в нулевом приближении

$$p_0 = \frac{R}{M} \rho_0 T_0 \quad (2.84)$$

и в первом приближении

$$p_1 = \frac{R}{M}(\rho_0 T_1 + \rho_1 T_0). \quad (2.85)$$

Уравнения (2.80) – (2.85) представляют собой линеаризованную систему. Рассмотрим простейший случай, когда диссипация отсутствует: $\zeta = \eta = \varkappa = 0$. В этом случае получаем

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p_1 \quad (2.86)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.87)$$

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (2.88)$$

Проинтегрируем последнее выражение, учтя при этом нулевое приближение уравнения состояния:

$$\rho_0 c_v T_1 = \frac{p_0}{\rho_0} \rho_1 = \frac{R}{M} \rho_0 T_0 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_0} \Rightarrow T_1 = \frac{R}{M c_v} T_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (2.89)$$

Теперь воспользуемся известным соотношением

$$c_p - c_v = \frac{R}{M} \Rightarrow \frac{c_p}{c_v} - 1 = \frac{R}{M c_v} = \gamma - 1, \quad (2.90)$$

тогда

$$T_1 = (\gamma - 1) T_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (2.91)$$

Подставим полученный результат в уравнение состояния первого порядка:

$$p_1 = \frac{R}{M}(\rho_1 T_0 + \rho_0 T_1) = \frac{R}{M} \left(\rho_1 T_0 + \cancel{\rho_0} (\gamma - 1) T_0 \frac{\rho_1}{\cancel{\rho_0}} \right) = \underbrace{\frac{\gamma R T_0}{c_s^2}}_{M} \rho_1. \quad (2.92)$$

Здесь c_s – скорость звука, или адиабатическая скорость звука Лапласа по размерности. Все формулы, которые мы получили путём линеаризации уравнения теплопереноса, можно решить другим способом: добавить к системе уравнений движения и непрерывности условие баротропии

$p = p(\rho)$, линеаризовав эту зависимость

$$p = p_0 + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) \Rightarrow p - p_0 = p_1 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \quad (2.93)$$

Если сделать предположение об адиабатичности⁸ $p = C\rho^\gamma$, получаем

$$\frac{dp}{d\rho} = C\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma\frac{p}{\rho}, \quad (2.94)$$

тогда

$$p_1 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \cdot \rho_1 = \frac{\gamma RT_0}{M} \rho_1. \quad (2.95)$$

Для жидкости нельзя использовать уравнение состояния Менделеева-Клепейрона, и скорость звука будет уже другой. Но связь $p_1 = c_s^2 \rho_1$ выполняется, правда с другим коэффициентом скорости:

$$c_s = \sqrt{\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0}}. \quad (2.96)$$

2.6.2 Переход к потенциальности

Применим операцию ротора к уравнению

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p_1, \quad (2.97)$$

получаем

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = -\text{rot } \nabla p_1 \equiv 0 \quad (2.98)$$

Отсюда интегрированием получаем

$$\text{rot } \vec{v} = f(\vec{r}) \quad (2.99)$$

При колебательных движениях усреднение по периоду переводит правую часть в ноль, и можно сделать важный вывод: колебательные движения жидкости потенциальны

$$\vec{v} = \nabla \varphi. \quad (2.100)$$

⁸Естественно, в идеальной жидкости в отсутствии вязкости и теплопроводности процесс является адиабатическим.

Подстановка потенциального поля скорости в уравнение движения даст

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\nabla p_1 &\Rightarrow \nabla \left(p_1 + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow p_1 + \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = g(t) \end{aligned} \quad (2.101)$$

Можно заметить, что константу интегрирования $g(t)$ тоже можно убрать. Для этого нужно ввести калибровку потенциала, наложив условие на φ :

$$\boxed{p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}} \quad (2.102)$$

Все полученное – следствие уравнений движения. Теперь можем использовать уравнение непрерывности, которое мы ещё не задействовали:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.103)$$

Подставляя в уравнение непрерывности ρ_1 , получаем

$$-\frac{\rho_0}{c_s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \rho_0 \operatorname{div}(\nabla \varphi) = 0, \quad (2.104)$$

и для потенциала поля скорости получаем хорошо известное волновое уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.105)$$

Действительно, получили, что константа c_s^2 имеет смысл фазовой скорости звуковой волны.

Фазовая скорость не зависит от частоты и звуковые волны распространяются без дисперсии. Если записать простейшее решение волнового уравнения в виде плоской монохроматической волны

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}, \quad (2.106)$$

то отсюда дисперсионное соотношение

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_s^2 = \text{const}. \quad (2.107)$$

Если бы звуковые волны распространялись с дисперсией, то мы бы не могли бы общаться с помощью звука.

Найдём физические поля звуковой волны: поле скорости и поле давления и их связь. Для простоты будем считать, что волна распространяется вдоль оси x : $\vec{k} = k\vec{e}_x$, тогда есть только одна компонента скорости

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -ik\varphi_0 e^{i\omega t - ikx} \quad (2.108)$$

Отсюда видно, что поляризация звуковых волн в жидкостях и газах продольная.

Теперь найдём поле давления:

$$p_1 = -i\omega\rho_0\varphi_0 e^{i\omega t - ikx} \quad (2.109)$$

Поделим p_1 на v_x , получим

$$\frac{p_1}{v_x} = \frac{\omega\rho_0}{k} = \rho_0 c_s, \quad (2.110)$$

что отражает линейную связь полей: коэффициент называется волновым импедансом среды, а поля давления и скорости синфазны. В электродинамике аналогичный физический смысл имеет

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (2.111)$$

Если мы найдём обратное соотношение скорости и давления

$$\frac{v_x}{p_1} = \frac{v_x}{c_s^2 \rho_1} = \frac{1}{\rho_0 c_s} \Rightarrow \frac{v_x}{c_s} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{p_0} \quad (2.112)$$

При линеаризации уравнений мы требовали $\left| \frac{\rho_1}{\rho_0} \right| \ll 1$, отсюда получаем, что в нашем приближении

$$|v_x| \ll c_s. \quad (2.113)$$

По определению, звуковые волны – это волны с малой амплитудой в жидкостях и газах, для которых выполняются линейные соотношения, приведённые выше.

Полезно сравнить скорость звука с средней тепловой (максвеллов-

ской) скоростью неупорядоченного движения:

$$v_T = \sqrt{\frac{8\kappa T_0}{\pi m}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma \kappa N_A T_0}{m N_A}} \quad (2.114)$$

Отсюда видно, что величины почти совпадают. Для воздуха $\gamma = 1.4$, и оказывается $c_s \approx v_T$. Поскольку скорость звука очень важна, выпишем её для разных сред.

Таблица 1: Скорость звука в газах при $T = 0\text{ }^\circ\text{C}$, $p=1$ атм

Формула	Вещество	c_s , м/с
N_2	Азот	334
O_2	Кислород	316
—	Воздух	331
H_2	Водород	1284
H_2O	Вода	1490

2.7 Энергетические характеристики звука

Получим закон сохранения энергии в отсутствии вязкости и теплопроводности. Для этого вернемся к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \left| \times \frac{p_1}{\rho_0} \right. \quad (2.115)$$

и уравнению движения

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla p_1 = 0 \quad \left| \cdot \vec{v}, \right. \quad (2.116)$$

получаем

$$\frac{p_1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + p_1 \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2.117)$$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \vec{v} \nabla p_1 = 0 \quad (2.118)$$

Учтём, что $\rho_1 = \frac{p_1}{c_s^2}$, и сложим полученные последние два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} \right) + \frac{p_1}{\rho_0 c_s^2} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{v} \nabla p_1 + p_1 \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2.119)$$

Упрощая, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{p_1^2}{2\rho_0 c_s^2} \right) + \operatorname{div} (\rho_1 \vec{v}) = 0, \quad (2.120)$$

что можно переписать в виде закона сохранения

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0, \quad (2.121)$$

где

$$W = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{p_1^2}{2\rho_0 c_s^2}, \quad \vec{\Pi} = p_1 \vec{v}. \quad (2.122)$$

Последний вектор называется вектором Пойнтинга и отражает количество энергии, переносимое в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную скорости. Собственно говоря, мы получили закон сохранения энергии в дифференциальном виде.

2.8 Звуковые волны в вязкой диссипативной среде

Мы рассмотрели случай идеализации среды. Давайте вернёмся к вязкой теплопроводящей среде. Запишем уравнение движения (Навье-Стокса)

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p_1 + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v} + \eta \Delta \vec{v}, \quad (2.123)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (2.124)$$

уравнение теплопроводности

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T_1}{\partial t} + \kappa \Delta T_1 + \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (2.125)$$

и линеаризованное уравнение состояния

$$p_1 = \frac{R}{M} (\rho_0 T_1 + \rho_1 T_0). \quad (2.126)$$

Введя стандартным образом $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}$ и взяв от уравнения Навье-

Стокса (2.123) оператор rot , получим

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho_0} \Delta \vec{\omega}. \quad (2.127)$$

Видно, что колебательное движение не обязательно потенциально: для вихря скорости получилось уравнение диффузии. Но решение уравнения диффузии экспоненциально затухает, и происходит диффузия вихря скорости: вихревая компонента будет быстро затухать при удалении от источника колебаний, и на больших расстояниях движение опять перейдёт в потенциальное.

Применяя оператор дивергенции к уравнению Навье-Стокса (2.123) и поставляя в него же $\text{div } \vec{v}$ из уравнения непрерывности (2.124), а из уравнения состояния выражая T_1 и подставляя в уравнение теплопроводности, получим следующую систему:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = \Delta p_1 + \nu^* \Delta \frac{\partial \rho_1}{\partial t}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \xi_V \Delta \right) p_1 = c_s^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi_p \Delta \right) \rho_1 \quad (2.128)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi_{V,p} = \frac{\varkappa}{\rho_0 c_{V,p}}, \quad c_s^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \quad \nu^* = \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{\rho_0}, \quad (2.129)$$

где последнее называется коэффициентом кинематической вязкости.

Учёт вязкости и теплопроводности должен привести к диссипации энергии волны. Математически диссипация проявляется в виде коэффициентов при первых производных по времени в уравнениях.

Система (2.128) – линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Можно искать решения в виде

$$p_1 = \tilde{p} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}, \quad \rho_1 = \tilde{\rho} e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}. \quad (2.130)$$

Подстановка в таком виде в систему (2.128) даст для первого уравнения системы

$$-\omega^2 \tilde{\rho} = -k^2 \tilde{p} - \nu^* k^2 i\omega \tilde{\rho}, \quad (2.131)$$

а для второго

$$(i\omega + k^2 \chi_V) \tilde{p} = c_s^2 (i\omega + k^2 \chi_p) \tilde{\rho}. \quad (2.132)$$

Можно переписать систему в более удобном виде:

$$\begin{cases} (\omega^2 - k^2\nu^*i\omega)\tilde{\rho} - k^2\tilde{p} = 0 \\ c_s^2(i\omega + k^2\chi_p)\tilde{\rho} - (i\omega + k^2\chi_V)\tilde{p} = 0 \end{cases} \quad (2.133)$$

Для существования решения в виде плоской монохроматической волны необходимо и достаточно обращение в ноль определителя системы (2.133), что даёт дисперсионное уравнение

$$\det = -(\omega^2 - k^2\nu^*i\omega)(i\omega + k^2\xi_V) + k^2c_s^2(i\omega + k^2\xi_p) = 0. \quad (2.134)$$

Для более удобного анализа дисперсионное уравнение удобно представить в виде

$$k = \pm \frac{\omega}{c_s} \sqrt{\frac{(1 - i\nu^* \frac{k^2}{\omega})(1 - i\chi_V \frac{k^2}{\omega})}{1 - i\chi_p \frac{k^2}{\omega}}} \quad (2.135)$$

С точки зрения постановки граничной задачи (считая ω действительным), такая форма записи легко позволит найти комплексные k . Естественно брать такую ветвь комплексного корня, которая при стремлении к нулю коэффициентов вязкости и теплопроводности даст положительную реальную часть.

Без всякого ограничения общности, для простоты выкладок будем считать что волна распространяется вдоль оси x . Для идеальных в термодинамическом смысле газов можно рассчитать теоретически коэффициенты вязкости и теплопроводности, и они имеют следующий порядок:

$$\nu^* \sim \chi_v \sim \chi_p \sim \nu_T \cdot l_{св} \quad (2.136)$$

Произведём оценку, реально ли параметры малы:

$$\frac{\chi k^2}{\omega} \sim \frac{\nu_T l k^2}{\omega} = \underbrace{\frac{c_s}{\omega}}_{k^{-1}} l k^2 = kl \approx \frac{l}{\lambda} \ll 1 \quad (2.137)$$

Последнее вообще представляет собой условие применения гипотезы сплошной среды, и все уравнения для непрерывных функций в противоположном случае не работают.

В силу малости диссипации можно искать решение методом возмущений:

$$k = \frac{\omega}{c_s}(1 - i\beta), \quad (2.138)$$

где $\beta \sim \frac{l}{\lambda} \ll 1$. Разложим корень (2.135) в ряд. Он имеет вид

$$\sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{(1-z)}} \approx \left(1 - \frac{x}{2}\right) \left(1 - \frac{y}{2}\right) \left(1 - \frac{z}{2}\right) \approx 1 - \frac{x+y-z}{2} \quad (2.139)$$

Отсюда в первом порядке малости

$$\frac{\omega}{c_s}(1 - i\beta) = \frac{\omega}{c_s} \left(1 - i\frac{\nu^*\omega}{2c_s^2} - i\frac{\chi_V\omega}{c_s^2} + i\frac{\chi_p\omega}{2c_s^2}\right), \quad (2.140)$$

откуда

$$\beta = \frac{\omega}{2c_s^2}(\nu^* + \chi_v - \chi_p). \quad (2.141)$$

В размерном виде обычно ищут коэффициент поглощения α :

$$k = \frac{\omega}{c_s} - i\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\omega^2}{2\rho_0 c_s^3} \left(\zeta + \frac{3}{4}\eta + \varkappa \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right) \quad (2.142)$$

Отсюда вид решения, от которого мы исходили,

$$p, \rho \sim e^{i\omega t - ikx} = e^{i\omega t - i\frac{\omega}{c_s}x} e^{-\alpha x}. \quad (2.143)$$

Мы провели вывод в случае идеального газа. Но оказывается, что все то же самое можно получить в самом общем случае

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T). \quad (2.144)$$

Линеаризуя эти соотношения и используя некоторые термодинамические соотношения, можно получить те же самые формулы. И в линейной теории выражение для α верно не только для газов, но и для жидкостей.

Отметим, что $\alpha \sim \omega^2$: высокие частоты поглощаются сильнее. Зададимся вопросом, какой вклад дают в поглощение коэффициенты вязкости и теплопроводности по отдельности? Оказывается, в газах по порядку величины обе вязкости и теплопроводность дают одинаковый вклад, а в жидкостях основную роль играет вязкость. Существуют экзотические исключения, например, жидкие металлы – ртуть.

Наиболее важнейшие среды – воздух и вода. Для них, оказывается,

$$\frac{\alpha_{\text{воздуха}}}{\alpha_{\text{воды}}} \sim 10^3. \quad (2.145)$$

Это означает, что звук в воде поглощается гораздо слабее. С этим связаны разные явления: например, морские животные имеют слабо развитые органы зрения, но очень хорошо развитые органы слуха – им легко ориентироваться за счёт эхолокации.

На самом деле, в реальных средах коэффициенты поглощения измерить бывает достаточно трудно: формулы относятся к идеально чистым средами, а реально есть пыль, неоднородности из-за температуры и так далее. Это приводит к рассеянию звуковых волн на неоднородностях и тоже ослабляет звуковую волну. Это «неистинное» поглощение наслаивается на «истинное», обусловленное внутренними физическими процессами, и отделить их может быть трудно.

2.9 Задачи излучения звука

2.9.1 Колеблющийся поршень

Бесконечный поршень совершает колебания, например в воздухе, и создает звуковую волну. Возникает вопрос, какое отношение имеет такая идеализация к реальной задаче? Раскачать пластину в идеальной задаче нельзя, для этого нужна бесконечная энергия. В реальности пластина будет конечных размеров, например, l_x и l_y . Помещаем такую пластину в жидкость или газ и будем двигать по гармоническому закону $x = a \sin \omega t$.

Понятно, что на небольшом расстоянии волновой фронт будет практически плоским, но на больших расстояниях ($r \rightarrow \infty$) пластина будет выглядеть как точечный источник: произойдет дифракция волнового фронта, и на больших расстояниях волна будет иметь сферической. Но в некоторой области (геометрической акустики) можно пренебречь дифракционной расходимостью поля и считать её плоской. Для такого разделения можно взять параметры Френеля для отделения области геометрической акустики:

$$\lambda \ll r \ll k \cdot \min \{l_x^2, l_y^2\}, \quad (2.146)$$

где $k = \frac{\omega}{c_s}$, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Можно говорить о том, что излучение бесконечного поршня может в некотором грубом приближении моделировать движение поршня конечных размеров в области геометрической акустики.

Поле у нас одномерное, все величины будут зависеть от x и t . Вы-

числим сразу скорость движения пластинки:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t = v_m \cos \omega t = \operatorname{Re} (v_m e^{i\omega t}) \quad (2.147)$$

Запишем волновое уравнение для потенциала:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.148)$$

Будем искать решение в виде

$$\varphi = \tilde{\varphi}(x)e^{i\omega t}, \quad (2.149)$$

и, подставляя его в (2.148), получаем уравнение осциллятора

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dx} + k^2 \tilde{\varphi} = 0. \quad (2.150)$$

Известное решение уравнения осциллятора даёт выражение для потенциала

$$\varphi = c_1 e^{i\omega t + ikx} + c_2 e^{i\omega t - ikx} \quad (2.151)$$

Для определения констант у нас есть условие излучения: из него не должно быть приходящей с бесконечности волны $\Rightarrow c_1 = 0$. Константу же c_2 будем определять из граничного условия на поверхности поршня:

$$v_x = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=a \sin \omega t} = a\omega \cos \omega t \quad (2.152)$$

Даже сейчас задача не простая, с параметрическим граничным условием (условием на движущейся поверхности). Можно потребовать упрощающее условие, что амплитуда колебаний $a \ll \lambda$. Такая ситуация достаточно типична для задач гидроакустики. Тогда можно ставить граничное условие на так называемой контрольной поверхности $a \rightarrow 0$:

$$v_x = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} \approx v_m e^{i\omega t}. \quad (2.153)$$

Подставляя потенциал (2.151) в граничное условие, получаем

$$-ikc_2 e^{i\omega t - ikx} \Big|_{x=0} = v_m e^{i\omega t} \Rightarrow c_2 = i \frac{v_m}{k}, \quad (2.154)$$

и тогда окончательный вид потенциала в такой задаче

$$\varphi = i \frac{v_m}{k} e^{i\omega t - ikx}. \quad (2.155)$$

Отсюда поле скорости

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_m e^{i\omega t - ikx}, \quad (2.156)$$

поле давления

$$p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho_0 i \frac{v_m}{k} i \omega e^{i\omega t - ikx} = \rho_0 c_s v_m e^{i\omega t - ikx}, \quad (2.157)$$

поле плотности

$$\rho_1 = \frac{p_1}{c_s^2}. \quad (2.158)$$

Энергетические характеристики.

$$\mathcal{E} = \frac{\rho_0 v_x^2}{2} + \frac{p_1^2}{2\rho_0 c_s^2} \quad (2.159)$$

В случае монохроматических полей представляет интерес среднее по периоду значение энергетических характеристик, поэтому будем искать именно их.

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}}^T &= \frac{\rho_0 v_x v_x^*}{4} + \frac{p_1 p_1^*}{4\rho_0 c_s^2} = \\ &= \frac{\rho_0 v_m^2}{4} + \frac{\rho_0^2 c_s^2 v_m^2}{4\rho_0 c_s^2} = \frac{\rho_0 v_m^2}{4\rho_0 c_s^2} = \frac{\rho_0 v_m^2}{2} \end{aligned} \quad (2.160)$$

Запас кинетической энергии оказался в плоской волне равен запасу потенциальной энергии в единице объёма.

Теперь найдём поток плотности энергии:

$$\Pi_x = p_1 v_x \Rightarrow \overline{\Pi}_x^T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} p_1 v_x^*, \quad (2.161)$$

$$\overline{\Pi}_x^T = \frac{1}{2} \rho_0 c_s v_m^2. \quad (2.162)$$

Отсюда видно, что если умножить плотность энергии на групповую ско-

рость c_s , то получим плотность потока энергии.

Найдём полную мощность излучения для конечной пластины (логично, что для бесконечного поршня она бесконечна). Для её нахождения нужно проинтегрировать по плоскости, через которую проходит поток энергии:

$$W = \overline{P}_x \cdot S = \frac{1}{2} \rho_0 c_s v_m^2 S \quad (2.163)$$

Эта формула является хорошим приближением для достаточно большой пластины. Заметим, что свойства среды заложены здесь только в акустическом импедансе $\rho_0 c_s$. Пусть у нас есть одинаковые пластины с одинаковыми амплитудами и частотами колебаний, погруженные в разные среды: например, в воздух и в воду. Насколько разную энергию будут излучать эти пластины в единицу времени? Это зависит от импедансов:

$$\rho_0 c_s \Big|_{\text{воздух}} = 430 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \text{с}}, \quad \rho_0 c_s \Big|_{\text{вода}} = 1.5 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2 \text{с}}$$

В воде поршень излучает примерно в 3000 раз большую мощность, чем в воздухе.

2.9.2 Излучение пульсирующей сферы

Реальный источник всегда имеет конечные размеры. Для изучения таких источников удобно ставить задачу в одномерном случае. Представим себе такую ситуацию: в газ или жидкость с параметрами p_0 , ρ_0 , c_s (вязкостью и теплопроводностью пренебрегаем) помещается сфера с радиусом a , меняющимся во времени по следующему закону:

$$a(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t, \quad a_1 \ll a_0, \quad a_1 \ll \lambda \quad (2.164)$$

Такая формула отражает требование малых колебаний в окрестности постоянной сферы с радиусом a_0 .

Такой сферический излучатель уже совершенно физически реализуем. Техническая реализация нас не интересует, но только важно отметить, что она возможна, в отличие от бесконечного поршня.

Сразу найдём скорость движения оболочки:

$$\frac{da}{dt} = a_1 \omega \cos \omega t = \text{Re} (v_m e^{i\omega t}), \quad (2.165)$$

где $v_m = \omega a_1$.

В силу сферической симметрии все поля зависят только от r, t . Запишем волновое уравнение:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (2.166)$$

Опять ищем решение в виде $\varphi(r, t) = \tilde{\varphi}(r)e^{i\omega t}$, подставляем в волновое уравнение и получаем

$$\frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\tilde{\varphi}}{dr} + k^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (2.167)$$

Отсюда решение представляет суперпозицию двух сферических волн, где в силу условия излучения сходящаяся волна физически нереализуема, значит, $c_1 = 0$:

$$\varphi(r, t) = \frac{c_1}{r} e^{i\omega t - ikr} + \frac{c_2}{r} e^{i\omega t - ikr}. \quad (2.168)$$

Исходя из малости амплитуды колебаний, запишем граничное условие на контрольной поверхности $r \approx a_0$:

$$v_r = \nabla\varphi = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r \approx a_0} = v_m e^{i\omega t}. \quad (2.169)$$

Подставляя потенциал (2.168) в граничное условие (2.169), получим отличие от задачи с бесконечным поршнем: в отличие от плоской волны, у сферической амплитуда зависит от r и дифференцирование даст два слагаемых:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a_0} = \left(-\frac{c_2}{r^2} - ik \frac{c_2}{r} \right) e^{i\omega t - ikr} \Big|_{r=a_0} = v_m e^{i\omega t}, \quad (2.170)$$

отсюда, приводя к общему знаменателю и подставляя $r = a_0$

$$-c_2 \left(\frac{1 + ika_0}{a_0^2} \right) e^{ika_0} = v_m. \quad (2.171)$$

Теперь можем найти c_2 :

$$c_2 = -\frac{a_0^2 v_m e^{ika_0}}{1 + ika_0} \quad (2.172)$$

Тогда окончательно можем записать потенциал

$$\varphi(r, t) = -\frac{a_0^2 v_m}{1 + ika_0} \frac{1}{r} \exp\{i\omega t - ik(r - a_0)\} \quad (2.173)$$

Найдём физические поля:

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{a_0^2 v_m}{1 + ika_0} \left(-\frac{1}{r^2} - ik \frac{1}{r} \right) \exp\{i\omega t - ik(r - a_0)\} = \\ &= \frac{a_0^2 v_m (1 + ikr)}{1 + ika_0} \frac{1}{r^2} \exp\{i\omega t - ik(r - a_0)\}, \end{aligned} \quad (2.174)$$

$$p_1 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{i\omega a_0^2 v_m}{1 + ika_0} \frac{1}{r} \exp\{i\omega t - ik(r - a_0)\}, \quad (2.175)$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{c_s^2}. \quad (2.176)$$

Обратим внимание на следующее: сравним поля давления и скорости. Поле давления содержит общий знаменатель $1 + ika_0$ и содержит мнимую единицу в числителе: у поля же скорости слагаемое при мнимой единице спадает как r^{-1} . Получается, что одна составляющая поля скорости находится в фазе с давлением. Она и является полем излучения. Наряду с ней, есть и другая компонента поля скорости, спадающая как r^{-2} , и находящаяся в квадратуре с полем давления (сдвиг фаз $\frac{\pi}{2}$). Это так называемое *ближнее* или *квазистатическое* поле. Оно не даёт вклада в поток энергии, но доминирует вблизи источника волн. Амплитуда ближнего поля при малых r преобладает.

Ближнее поле присутствует в любой задаче о излучении источника конечных размеров любой физической природы. В случае поршня его не было: это следствие идеализации бесконечных размеров.

Энергетические характеристики пульсирующей сферы. Найдём плотность потока энергии:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_r^T &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (p_1 v_r^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{i\omega \rho_0 a_0^2 v_m}{1 + ika_0} \frac{1}{r} \cdot \frac{a_0^2 v_m (1 - ikr)}{1 - ika_0} \frac{1}{r^2} \right\} = \\ &= \frac{\omega \rho_0 a_0^4 v_m^2 k}{2(1 + k^2 a_0^2)} \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (2.177)$$

Поскольку плотность потока энергии (интенсивность излучения) не зависит от углов (изотропная диаграмма направленности), такой излучатель называют *изотропным* излучателем, или ещё *акустическим монополем*.

В электродинамике невозможно создать излучатель с изотропной диаграммой направленностью, в отличие от акустики. Это связано с различием поляризации волн: у электромагнитных волн она поперечная, а у звуковых – продольная.

Найдём полную мощность излучения. Формально, для этого нужно проинтегрировать по сфере радиуса r , охватывающей излучатель:

$$W = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{\Pi}_r^T r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2 \bar{\Pi}_r^T. \quad (2.178)$$

Удобно ввести $S = 4\pi a_0^2$, тогда

$$W = \frac{\rho_0 c_s v_m^2 S (ka_0)^2}{2(1 + k^2 a_0^2)}. \quad (2.179)$$

Формально здесь можно выделить полную мощность излучения с площадью S

$$\frac{\rho_0 c_s v_m^2 S}{2}, \quad (2.180)$$

которая умножается на безразмерный множитель

$$\frac{k^2 a_0^2}{1 + k^2 a_0^2}. \quad (2.181)$$

Тогда можно рассмотреть два случая:

$$W = \frac{\rho_0 c_s v_m^2 S}{2} \begin{cases} 1, & \text{при } ka_0 \gg 1 (a_0 \gg \lambda) \\ k^2 a_0^2 \sim \left(\frac{a_0}{\lambda}\right)^2, & \text{при } ka_0 \ll 1 (a_0 \ll \lambda) \end{cases} \quad (2.182)$$

Точно так же, как в электродинамике для излучателя Герца, получается пропорциональность мощности излучения квадрату отношения характерного размера излучателя и длины волны.

2.9.3 Силы реакции излучения

Если у нас есть любой физический источник, на него в результате излучения будет действовать сила. Подсчитаем её на примере акустического монополя:

$$\begin{aligned}
 F_r &= -4\pi a_0^2 (p_0 + p_1(a_0, t)) = \\
 &= -4\pi a_0^2 p_0 - \frac{4\pi i \rho_0 \omega^2 a_0^3 a_1}{1 + ika_0} e^{i\omega t} = \\
 &= -F_0 - \frac{4\pi \rho_0 a_0^3}{1 + k^2 a_0^2} (i\omega + ka_0 \omega) v_m e^{i\omega t} \quad (2.183)
 \end{aligned}$$

Заметим, что слагаемое $i\omega v_m e^{i\omega t}$ пропорционально производной скорости $v = v_m e^{i\omega t}$, а второе слагаемое пропорционально скорости. Размерность первого множителя по размерности представляет собой массу: тогда

$$F_r = -M_{\text{пр}} \frac{dv}{dt} - \beta_i v - F_0, \quad (2.184)$$

где введены обозначения

$$M_{pr} = \frac{4\pi \rho_0 a_0^3}{1 + k^2 a_0^2}, \quad \beta_i = \frac{4\pi \rho_0 a_0^4 \omega^2}{c_s (1 + k^2 a_0^2)}. \quad (2.185)$$

Здесь β_i – можно назвать *коэффициентом трения* или *коэффициентом излучения*, а M_{pr} – *присоединённой массой*.

Чтобы выяснить физический смысл этих величин, нужно подставить силу во второй закон Ньютона. При этом обозначим $r(t) = a(t) - a_0$. Колебание механических упругих колебаний сферической оболочки определяется уравнением движения

$$M \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \beta \frac{dr}{dt} + \gamma r = F_s + F_r, \quad (2.186)$$

где M – масса оболочки, β – коэффициент трения в механическом колебательном контуре (например, потери на деформацию резиновой оболочки), γ – коэффициент упругости оболочки, F_s – вынуждающая колебания сила, F_r – сила со стороны среды.

Подставляя во второй закон Ньютона записанное выше выражение

для силы реакции, получаем

$$(M + M_{pr}) \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + (\beta + \beta_i) \frac{\partial r}{\partial t} + \gamma r = F_s - F_0 \quad (2.187)$$

Действие силы реакции приводит к «увеличению» массы: это часть среды, вовлечённая в ближнем поле в колебания. Второе – источники звука испытывают сопротивление колебанию в результате излучения, что отражено в коэффициенте β_i .

Можно продолжить и получить полную аналогию с электродинамикой: сравним уравнение (2.187) с уравнением колебательного контура, возбуждаемого монохроматической ЭДС.

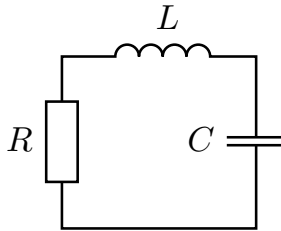


Рис. 23: Контур колебательный

Уравнение колебаний в контуре

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (2.188)$$

Для монохроматических сигналов удобно ввести импеданс

$$Z = \frac{\mathcal{E}}{I} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \quad (2.189)$$

По аналогии можем ввести импеданс для пульсирующей в среде сферы:

$$Z = \frac{F_s - F_0}{v} = \beta + \beta_i + i\omega(M + M_{pr}) + \frac{\gamma}{i\omega} \quad (2.190)$$

Можно разделить импеданс на механическую и акустическую части:

$$z = z_m + z_a, \quad z_a = i\omega M_{pr} + \beta_i. \quad (2.191)$$

Важнейшей характеристикой любого излучателя является сопротивление излучения: некое эффективное сопротивление, на котором выделяется такое же количество энергии, что и на излучателе в процессе излучения волн:

$$W = \frac{R|I|^2}{2} \quad (2.192)$$

Для акустического монополя, сравнивая по аналогии уравнения колебательного контура и колебаний сферы, очевидно $I \rightarrow v$, и тогда

$$W = \frac{\beta_i v_m^2}{2}, \quad (2.193)$$

что показывает, что β_i представляет собой сопротивление излучения акустического монополя.

3 Волны в упругих твёрдых телах

В отличие от жидкостей и газов, твёрдые тела не обладают свойством текучести, но могут менять свою форму и объём под действием приложенных сил, то есть деформироваться.

Деформации твёрдых тел можно разделить на два типа: упругие, при которых объём и форма тела полностью восстанавливаются после устранения действия внешних сил, и пластические (остаточные), при которых объём или форма не восстанавливаются полностью.

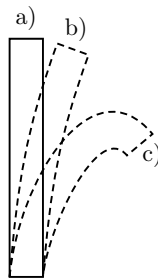


Рис. 24: Деформация стержня

Рассмотрим металлический стержень (рис. 24а): можно его согнуть, не сильно деформируя (рис. 24б). Отпустив его, увидим некоторые ко-

лебания, и со временем стержень примет прежнюю форму.

Можно же приложить большую силу и согнуть стержень (рис. 24с): это пример пластической деформации.

Характер деформации зависит от величины приложенной силы и материала, к которому она приложена. Для тел простой формы (стержни, проволоки) можно найти справочные значения критических напряжений

$$p > p_{cr} = \frac{F}{S}. \quad (3.1)$$

При больших критического значения напряжений деформация пластическая, при меньших – остаётся упругой.

Упругие деформации можно разделить на сдвиговые и объёмные. При сдвиговых меняется форма но не меняется объём, при объёмных наоборот – меняется объём, но не форма. Например, рассмотрим кубик: если его равномерно сжимать, прикладывая равное напряжение ко всем граням, то он сожмётся, сохранив форму. Это объёмная деформация.

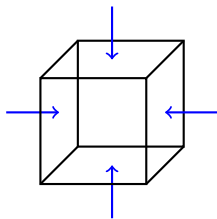


Рис. 25: Деформация куба

А можно деформировать куб так, что он превратится в параллелепипед. Например, приделать нижнюю грань к столу, а к верхней прикладывать силу. Это сдвиговая деформация.

Упругие свойства тел описываются некоторыми величинами, которые называются *модулями упругости*. Они зависят от конкретного физико-химического строения тела, и в реальности ещё зависят от температуры.

Мы говорили в разделе 2.1 о делении твёрдых тел на кристаллы, поликристаллы и аморфные тела. Сейчас будем рассматривать только малые деформации изотропных упругих тел: поликристаллов и аморфных тел. Для них существует два модуля упругости, которыми они полностью описываются. В кристаллах ситуация сложнее: в зависимости от симметрии может быть до 21 модуля упругости.

При малых деформациях изотропных упругих тел работает закон Гука. Пусть у нас имеется цилиндрический стержень произвольного сечения (см. рис. 26). Если его растягивать, прикладывая силу, то для малых деформаций верно линейное соотношение для удлинения стержня Δl :

$$\Delta l = \frac{l}{E} \frac{F}{S}, \quad (3.2)$$

где S – площадь сечения, l – начальная длина стержня, E – модуль Юнга.

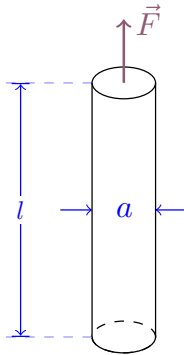


Рис. 26: Иллюстрация к закону Гука

Закон Гука можно переписать в виде

$$p = E \frac{\Delta l}{l}, \quad \text{где} \quad p = \frac{F}{S}. \quad (3.3)$$

В опытах по сжатию и растяжению можно обнаружить малое изменение поперечного размера:

$$\frac{\Delta a}{a} = -\sigma \frac{\Delta l}{l}, \quad (3.4)$$

где $\sigma > 0$ – второй модуль упругости, модуль Пуассона.

3.1 Математическое описание деформации тела

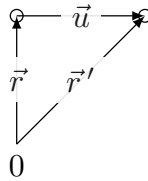


Рис. 27: Вектора при деформации

Пусть в недеформированном состоянии положение этого элемента описывается радиус-вектором \vec{r} . Обозначим положение радиус-вектора элемента, за которым мы следим, в деформированном состоянии за \vec{r}' .

Введём вектор $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$, который называют вектором смещения. Тогда можно записать

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}. \tag{3.5}$$

Очевидно, что вектор в смещённом состоянии будет зависеть от начального состояния и времени:

$$\vec{r}'(\vec{r}, t), \quad \vec{u}(\vec{r}, t). \tag{3.6}$$

Это ни что иное, как Лагранжево описание сплошной среды. Если мы знаем (нашли из каких-то уравнений) поле вектора смещений $\vec{u}(\vec{r}, t)$, то узнаем все о деформации.

Введём якобиан-преобразование от нештрихованных координат к штрихованным, где

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z, \quad \vec{r}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z. \tag{3.7}$$

Якобиан такого преобразования

$$J = \frac{D(x', y', z')}{D(x, y, z)}, \tag{3.8}$$

и оказывается удобно вновь перейти к индексным обозначениям:

$$J = \left\| \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \right\|. \tag{3.9}$$

Из определения векторного поля смещения

$$x'_i = x_i + u_i, \quad (3.10)$$

отсюда

$$J = \left\| \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right\| \quad (3.11)$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & 1 + \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Положение радиус-вектора в отслеживаемом деформируемом элементе отвечает отличному от нуля якобиану

$$J|_{\vec{r} \in V} \neq 0. \quad (3.13)$$

Попробуем воспользоваться законом сохранения массы. Запишем его для элемента массы:

$$dM = \rho_0 dV = \rho dV' \quad (3.14)$$

Отсюда

$$\rho_0 = \rho \frac{dV'}{dV} = \rho J \quad (3.15)$$

По сути, это уравнение непрерывности в Лагранжевых переменных. На самом деле оно весьма сложно: расчёт определителя даст сложные выражения.

Ситуация станет проще, если рассматривать малые деформации. Это близко к реальности: в жизни, как правило, упругие деформации невелики. В силу этого потребуем

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| \ll 1 \quad (3.16)$$

и будем пренебрегать членами второго порядка малости по этим производным.

Линеаризуем определитель J :

$$J \approx 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 1 + \operatorname{div} \vec{u} \quad (3.17)$$

Очевидно, что в силу малых деформаций можно представить плот-

ность как

$$\rho = \rho_0 + \rho_1, \quad \text{где} \quad \left| \frac{\rho_1}{\rho_0} \right| \ll 1 \quad (3.18)$$

Тогда

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_1)(1 + \operatorname{div} \vec{u}) = \rho_0 + \rho_1 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u} \quad (3.19)$$

и отсюда получаем уравнение непрерывности в линейном приближении

$$\rho_1 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (3.20)$$

Можно понять смысл поля смещений, переписав уравнение для якобиана:

$$J = \frac{dV'}{dV} = 1 + \operatorname{div} \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV' - dV}{dV} = \operatorname{div} \vec{u}, \quad (3.21)$$

откуда видно, что поле смещений описывает изменение объема при деформации. Поэтому деформацией чистого сдвига называют случай $\operatorname{div} \vec{u} = 0$.

Ранее мы получали теорему Коши-Гельмгольца, не конкретизируя вид поля (2.45). Можно разложить на три составляющих вектор смещений для малой частицы с помощью этой теоремы:

$$\vec{u}(\vec{r} + d\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}, t) + [\vec{\omega} \times d\vec{r}] + \hat{S} \cdot d\vec{r} \quad (3.22)$$

Первое слагаемое отвечает сдвигу, второе – повороту, третье – смещению за счёт деформации формы и объёма. Тензор S_{ik} здесь – тензор деформаций

$$S_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (3.23)$$

Здесь, как и ранее, принято разделять тензор на тензор бессдвиговых деформаций и тензор объёмных деформаций, записывая тензор в виде

$$S_{ik} = \left[S_{ik} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{u} \delta_{ik} \right] + \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{u} \delta_{ik}. \quad (3.24)$$

Запишем уравнение движения (в лагранжевом описании) для малой частицы:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \quad (3.25)$$

Для малых деформаций справедлив обобщённый закон Гука

$$p_{ik} = 2\mu \left[S_{ik} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \vec{u} \delta_{ik} \right] + K \operatorname{div} \vec{u} \delta_{ik}, \quad (3.26)$$

где μ – модуль сдвига, а K – модуль всестороннего сжатия. По сути, это другие переобозначения модулей упругости Юнга и Пуассона. Этот закон применим ко всем упругим деформациям.

Если объединить члены с дивергенцией, то можно переписать выражение (3.26) в удобном виде:

$$p_{ik} = 2\mu S_{ik} + \lambda \operatorname{div} \vec{u} \delta_{ik}, \quad (3.27)$$

где $\lambda = K - \frac{2}{3}\mu$. λ и μ ещё называют иногда *коэффициентами Ламэ*.

Однородная деформация. При однородной деформации тензор деформации постоянен во всем объёме деформируемого тела. Одним из примеров такой деформации является растяжение или сжатие тела.

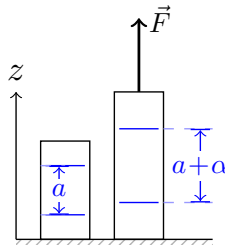


Рис. 28: Стержень в начальном и деформированном состояниях

Представим себе, что один конец стержня закреплён. Будем равномерно прикладывать к торцу стержня (площадью S) силу \vec{F} . Если линейно градуировать начальный стержень (нанести метки на равных расстояниях, кратным a), а затем растянуть стержень в α раз, то окажется, что при деформации первая метка окажется на расстоянии αa от предыдущей и так далее (см. рис. 28). Фактически,

$$u_z(z = a) = \alpha a - a = (\alpha - 1)a, \quad u_z(z = 2a) = 2(\alpha - 1)a \quad (3.28)$$

Если построить график смещения точек в зависимости от z , получим

линейную зависимость

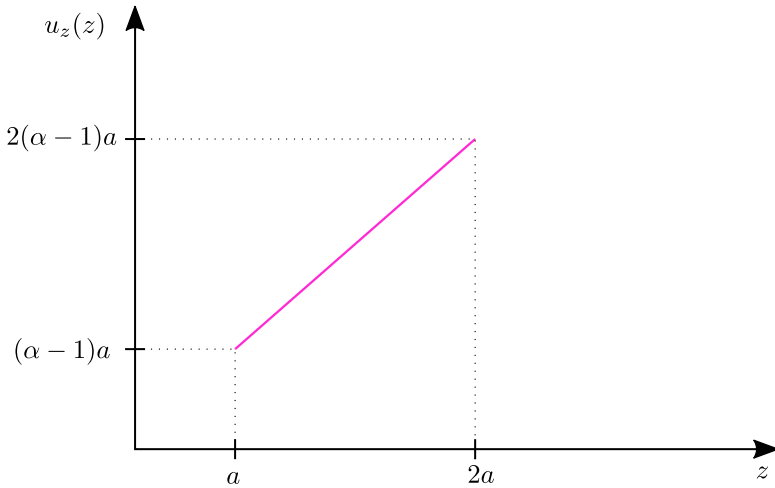


Рис. 29: u_z от z

Тогда можно написать, что

$$S_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \alpha - 1 = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\alpha l - l}{l} \quad (3.29)$$

Получается, что эта диагональная компонента тензора деформаций имеет смысл относительного удлинения стержня вдоль оси z . Из тех же очевидных соображений можно догадаться о сжатии поперечного сечения стержня, $S_{xx,yy} \neq 0$. Совершенно аналогично можно показать, что диагональные компоненты тензора S_{xx} и S_{yy} отражают относительное сжатие сечения стержня, а все прочие компоненты тензора $S_{ik} = 0$, $i \neq k$.

Раз тензор напряжений постоянен, то его можно определить из граничных условий на поверхности стержня, не решая дифференциальных уравнения. На боковую поверхности силы не действуют, то есть

$$p_{ik}n_k = 0 \quad (3.30)$$

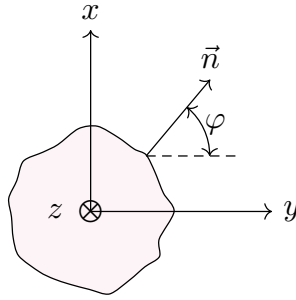


Рис. 30: Поперечное сечение стержня

Здесь

$$n_1 = n_x = \cos \varphi, \quad n_2 = n_y = \sin \varphi, \quad n_3 = 0. \quad (3.31)$$

Тогда

$$p_{11}n_1 + p_{12}n_2 = 0 \quad (3.32)$$

$$p_{21}n_1 + p_{22}n_2 = 0 \quad (3.33)$$

$$p_{31}n_1 + p_{32}n_2 = 0 \quad (3.34)$$

или

$$p_{11} \cos \varphi + p_{12} \sin \varphi = 0 \quad (3.35)$$

$$p_{21} \cos \varphi + p_{22} \sin \varphi = 0 \quad (3.36)$$

$$p_{31} \cos \varphi + p_{32} \sin \varphi = 0 \quad (3.37)$$

Так как система должна выполняться на всей границе стержня, то есть при $\forall \varphi$, то все компоненты кроме p_{33} должны быть равны нулю, а

$$p_{33} = p = \frac{F}{S} \quad (3.38)$$

Тогда

$$p_{11} = 2\mu S_{11} + \lambda \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (3.39)$$

$$p_{22} = 2\mu S_{22} + \lambda \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (3.40)$$

$$p_{33} = p = 2\mu S_{33} + \lambda \operatorname{div} \vec{u} \quad (3.41)$$

Из последней системы нетрудно получить

$$S_{xx} = S_{yy} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) p, \quad S_{zz} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) p \quad (3.42)$$

Сравним последнее с простой формулой закона Гука

$$p = E \frac{\Delta l}{l} = E S_{zz}, \quad (3.43)$$

тогда отсюда

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \quad (3.44)$$

С другой стороны,

$$S_{xx} = S_{yy} = -\sigma S_{zz}, \quad (3.45)$$

откуда следует

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{3K - \mu}{3K + \mu}. \quad (3.46)$$

Поставим обобщённый закон Гука в уравнение движения и приведём его к нормальному виду, пренебрегая изменением плотности $\rho \approx \rho_0$:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\lambda \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{u}) = \\ &= \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Тогда окончательно

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}, \quad (3.48)$$

или восстанавливая в векторном виде

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u}.} \quad (3.49)$$

Это уравнение называют уравнением Ламэ. Оно является уравнением движения физически бесконечно малого объема при малых деформациях.

Ранее мы получили в линейном приближении уравнение непрерыв-

ности

$$\rho_1 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (3.50)$$

Если есть граница раздела двух сред с разными модулями упругости, то на границе выполняются

$$u_{1n} = u_{2n}|_S, \quad p_{ik}^{(1)} n_k = p_{ik}^{(2)} n_k|_S. \quad (3.51)$$

Зная начальные и граничные условия, можно найти деформацию и возмущение плотности.

Если интересоваться статическими деформациями (сопромат), то нужно класть нулю левую часть уравнения движения. Нас же будут интересовать волновые решения.

В случае жидкости и газа приходилось сложным образом замыкать систему уравнений, записывать сложные уравнения для переноса тепла. Теперь же все получилось просто: это связано с тем, что в твёрдых телах нет конвекции, а теплопроводность – процесс весьма медленный. И если интересоваться волновыми процессами в уравнении Ламэ, то с огромной точностью они будут адиабатическими: за период колебаний не будет выравниваться температура сжатых участков в бегущей волне. Поэтому нужно брать адиабатические коэффициенты λ, μ . В сопромате, напротив, нужно брать изотермические значения коэффициентов.

Попробуем найти решение уравнения Ламэ в безграничной среде в виде плоской волны $\vec{u}(x, t)$. Запишем уравнение в проекции на ось x :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (3.52)$$

На ось y :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = (\lambda + \underbrace{\mu}_{=0}) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (3.53)$$

И аналогично на ось z

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (3.54)$$

Можно записать эти уравнения в привычном виде

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{y,z}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_{y,z}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.55)$$

где $c_l^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}$, $c_t^2 = \frac{\mu}{\rho_0}$. В силу положительности модулей упругости всегда $c_l > c_t$. В стальном образце, например, по порядку величины

$$c_t \approx 3 \frac{\text{км}}{\text{с}}, \quad c_l \approx 6 \frac{\text{км}}{\text{с}}, \quad (3.56)$$

что на порядок больше, чем в жидкостях и газах.

Полученные уравнения говорят о том, что волновое возмущение в изотропной безграничной упругой среде можно представить как суперпозицию двух нормальных волн: одна называется продольной и распространяется со скоростью c_l , в ней вектор смещения совершает колебания вдоль направления распространения волны, вторая поперечная (или сдвиговая), распространяющаяся со скоростью c_t , и в ней вектор смещения колеблется перпендикулярно направлению распространения волны.

Заметим, что всегда $c_l > c_t$.

Появилось принципиальное отличие от волн в жидкостях и газах: появилась поперечная волна. Это связано с появлением сдвиговой упругости, которой не было в жидкостях и газах. Продольная волна аналогична волне в жидкости, волна сжатий и разрежений: поперечная аналогов не имеет.

3.2 Продольные и поперечные волны

Произведём теперь разделение произвольной (не обязательно плоской) волны на «две части» в неограниченном пространстве. Заметим, что любой вектор можно представить в виде

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \nabla\Phi + \text{rot } \vec{A}, \quad (3.57)$$

или можно написать $\vec{u} = \vec{u}_l + \vec{u}_t$, где \vec{u}_l – потенциальное поле, так, что $\text{rot } \vec{u}_l = 0$ и \vec{u}_l представимо в виде $\vec{u}_l = \nabla\Phi$, \vec{u}_t – соленоидальное поле, $\text{div } \vec{u}_t = 0$ и $\vec{u}_t = \text{rot } \vec{A}$.

Положим, что Φ и \vec{A} удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.58)$$

Тогда прямой подстановкой можно убедиться, что вектор \vec{u} удовлетворяет уравнению Ламе.

Волны, описываемые вектором \vec{u}_l являются продольными, поскольку если возьмём $\Phi = \Phi_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$ (удовлетворяющее волновому уравнению),

то

$$\vec{u}_l = \nabla\Phi = -i\vec{k}\Phi \Rightarrow \vec{u}_l \parallel \vec{k}. \quad (3.59)$$

Волны же \vec{u}_t – поперечные: если $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}$, то

$$\vec{u}_t = \text{rot } \vec{A} = -i[\vec{k} \times \vec{A}] \Rightarrow \vec{u}_t \perp \vec{k}. \quad (3.60)$$

Одна из волн (\vec{u}_t) не связана с изменениями объёма ($\text{div } \vec{u}_t = 0$), другая (\vec{u}_l) сопровождается сжатиями и расширениями.

3.3 Отражение и преломление упругих волн

Рассмотрим отражение и преломление упругих волн на границе раздела между двумя различными средами.

Пусть, например, звуковая волна падает под углом θ на плоскую границу раздела воздуха и изотропного упругого тела.

Граничные условия будут задаваться на поверхности $z = 0$, то есть не зависят ни от времени, ни от координат x и y . Поэтому зависимость решения от t и от x, y остаётся неизменной во всем пространстве, т.е. ω , k_x и k_y остаются теми же, что и в падающей волне.

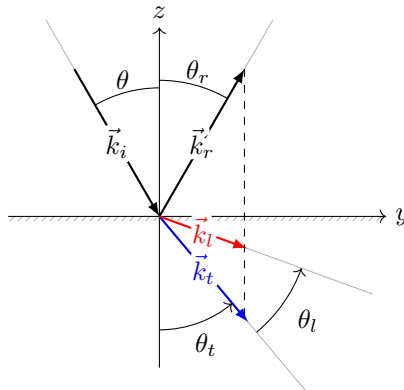


Рис. 31: Отражение и преломление

а

В твердом теле будут распространяться две волны – продольная и

поперечная.

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_{ly}, \quad \frac{\omega}{c_s} \sin \theta = \frac{\omega}{c_s} \sin \theta_r = \frac{\omega}{c_l} \sin \theta_l = \frac{\omega}{c_t} \sin \theta_t. \quad (3.61)$$

Получаем $\theta_r = \theta$.

$$\frac{\sin \theta_l}{\sin \theta_t} = \frac{c_l}{c_t} > 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_l > \theta > t, \quad (3.62)$$

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta} = \frac{c_t}{c_s} > 1 \quad (\text{как правило}) \quad \Rightarrow \quad \theta_t > \theta. \quad (3.63)$$

Если нормальное падение из воздуха ($\theta = 0$), то есть только \vec{k}_l . Если упругая волна падает из твёрдого тела по нормали, то при отражении характер волны не меняется. То же, если под произвольным углом поперечная волна с колебаниями параллельно плоскости $z = 0$.

В однородной среде два семейства нормальных волн – продольные и поперечные – обладают различными скоростями распространения и различной поляризацией и не взаимодействуют друг с другом.

В случае же неоднородной среды, например, при наличии границы раздела между двумя различными упругими средами разделение на две независимые части оказывается (благодаря наличию граничных условий) невозможным. Важным видом таких упругих волн являются волны Рэлея, распространяющиеся вблизи поверхности тела и не проникающие вглубь.

4 Практика

4.1 07.02.2019

Уравнение колебания струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

u для струны – это отклонение струны от равновесного положения $u(x, t)$. Это может быть компонента электрического или магнитного поля, звукового поля и т.д.

Давайте вспомним общее решение этого одномерного волнового уравнения и получим его.

Сделаем автоволновую замену переменных $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$:

$$\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot c \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \quad (4.5)$$

Подставляя в исходное уравнение, в новых переменных получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{c^2} \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right) = 0 \quad (4.6)$$

Или, упрощая,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (4.7)$$

Теперь мы привели волновое уравнение к виду, который легко проинте-

грировать и получить общее решение:

$$\int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta) \quad (4.8)$$

Отсюда

$$u = \underbrace{\int f(\eta) d\eta}_{f_2(\eta)} + f_1(\xi) \quad (4.9)$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (4.10)$$

Метод разделения мог бы дать частные решения. Но общее решение зависит от произвольных функций, и мы его получили.

Физический смысл этого решения – это две волны некоего профиля, бегущие в направлениях $+x$ и $-x$ со скоростью c . Важно, что у волнового уравнения без дисперсии профиль решения перемещается без искажения профиля.

Задача 1.6. $u(x, t = 0) = \varphi(x)$. Начальные скорости равны нулю, найти решение в положительном времени. Построить профиль струны в разные моменты времени при

$$\begin{cases} u_0 \left(1 - \frac{|x|}{L}\right), & |x| < L \\ 0, & |x| > L \end{cases} \quad (4.11)$$

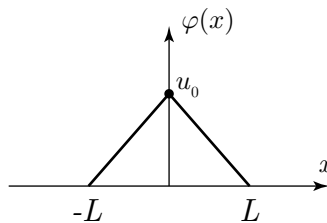


Рис. 32: $\varphi(x)$

Такая функция очень наглядна для струны: зажали концы пальцами и натянули середину.

Мы можем подставить общее решение в начальные условия и определить функции f_1 , f_2 .

$$u(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (4.12)$$

$$u(x, t = 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \quad (4.13)$$

Продифференцируем равенство $u(x, t) = \varphi(x)$ по времени:

$$-cf'_1 + cf'_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2 = f_1 + \text{const} \quad (4.14)$$

Подставляя обратно, получаем

$$f_1 + f_1 + \text{const} = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad f_1 = \frac{\varphi}{2} - \frac{\text{const}}{2} \quad (4.15)$$

Отсюда графически легко получается решение, делим графически функцию пополам – получаем треугольник с половинной амплитудой. Чтобы получить решение в разные моменты времени, нужно двигать один треугольник вправо, а один – влево и искать их суперпозицию:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x - ct) + \frac{1}{2}\varphi(x + ct) \quad (4.16)$$

Наложение прямой и обратной волн происходит только в «области взаимодействия»:

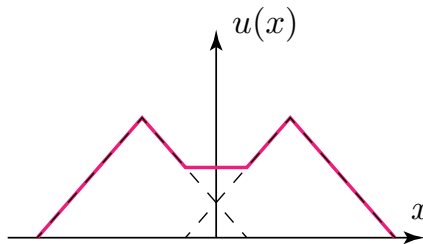


Рис. 33: Сумма прямой и обратной волн

Волны разбегаются, и в конце концов получим два неперекрывающихся профиля. Мгновенный снимок струны в такой момент времени

будет выглядеть как

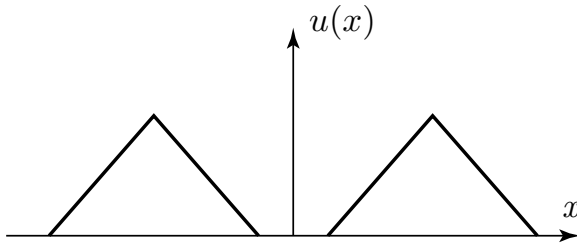


Рис. 34: Разбежавшиеся профили

Давайте обобщим ситуацию и перейдём к трёхмерному решению, волновое уравнение в общем виде

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u = u(x, y, z, t) \quad (4.17)$$

Задача 1.2. Нужно найти решение этого уравнения в виде плоской волны произвольной формы.

В одномерном случае мы достаточно легко нашли решение. Как найти решение в трёхмерном случае? Аргументом должно являться уравнение плоскости $\vec{n}\vec{r}$:

$$u(x, y, z, t) = f(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct), \quad (4.18)$$

где $\vec{n}\vec{r} = n_x x + n_y y + n_z z$. Проверим, будет ли это решением.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = n_x \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = n_x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (4.19)$$

Нетрудно получить, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \quad (4.20)$$

Тогда

$$(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1) f''_{\xi\xi} = 0 \quad (4.21)$$

Очевидно, что в общем случае

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \quad (4.22)$$

и при этом условии функция () будет описывать решение – плоскую волну, в которой \vec{n} – нормальный вектор к плоскости постоянной фазы, которая без искажения формы бежит со скоростью c в направлении s .

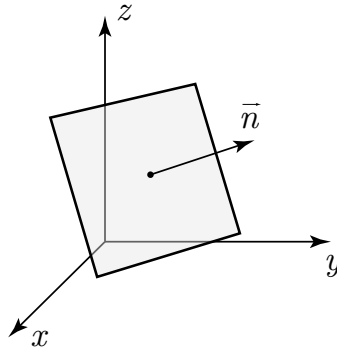


Рис. 35: Плоская волна

Мы можем перебирать параметры $n_{x,y,z}$, так, чтобы удовлетворять (), будем получать тоже решения. Суперпозиция таких решений тоже будет решением.

Перейдем к одномерному случаю: $n_y = n_z = 0$, откуда следует, что в одномерном случае $n_x^2 = 1 \rightarrow n_x = \pm 1$, что отвечает прямой и обратной волнам.

Если задать в простейшем виде

$$f = \cos k\xi, \quad (4.23)$$

то сведём задачу к известному случаю плоской монохроматической волны:

$$kc = \omega, \quad f = \cos(k(\vec{n} \cdot \vec{r} - ct)) \quad (4.24)$$

Заметим, что нигде не сказано, что $n_{x,y,z}$ должны быть действительными! Они могут быть и комплекснозначны, в этом случае в одном направлении волны осциллируют, а в другом затухают – это плоские неоднородные волны.

Задача 1.4. Путём суперпозиции плоских волн с фронтом, параллельным оси z , получить цилиндрическую волну. Цилиндрическая волна представляет собой функцию

$$u = u(\rho, t), \quad (4.25)$$

и в каждый момент времени её поверхность постоянной фазы должна быть цилиндрической поверхностью:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.26)$$

Условие параллельности фронта оси z соответствует $n_z = 0$. Итак, ищем решение

$$f(n_x x + n_y y - ct), \quad (4.27)$$

где $n_x^2 + n_y^2 = 1$. Нужно перейти в цилиндрические координаты: ввести угол α между проекцией \vec{n} на плоскость (x, y) и осью x , и тогда

$$n_x = \cos \alpha, \quad n_y = \sin \alpha \quad (4.28)$$

А по координатам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (4.29)$$

Здесь φ – угол, а α – параметр!

Получаем

$$f(\rho \cos(\alpha - \varphi) - ct) \quad (4.30)$$

Переберем все возможные разбегающиеся волны от оси z интегрированием по α , и это заведомо решение волнового уравнения по принципу суперпозиции:

$$u(\rho, t) = \int_0^{2\pi} f(\rho \cos(\alpha - \varphi) - ct) d\alpha \quad (4.31)$$

Докажем, что этот интеграл не зависит от φ . Сделаем замену $\psi = \alpha - \varphi$, получим

$$u(\rho, t) = \int_{-\varphi}^{2\pi - \varphi} f(\rho \cos \psi - ct) d\psi \quad (4.32)$$

Поскольку функция f в силу симметрии задачи 2π – периодична, значение интеграла не зависит от одновременного сдвига пределов. Например,

их можно сдвинуть так, что пределы интегрирования станут от $-\pi$ до π .

Если мы зададим f в виде

$$f(\xi) = \cos k\xi, \quad (4.33)$$

можно воспользоваться следующей формулой – представлением функции Бесселя:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(k\rho \cos \psi) d\psi = 2\pi J_0(k\rho) \quad (4.34)$$

Решение () с учетом () даст

$$\begin{aligned} u(\rho, t) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(kct - k\rho \cos \psi) d\psi = (\text{расписываем косинус разности}) = \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos \omega t \cos(k\rho \cos \psi) + \sin \omega t \sin(k\rho \cos \psi)) d\psi = 2\pi \cos \omega t J_0(k\rho) \end{aligned} \quad (4.35)$$

... стоячая цилиндрическая волна.

ДЗ: 1.5, 1.10

Задача 1.5. Если представить себе бесконечную последовательность точечных источников, расположенных сколь угодно близко на одной линии (пусть это будет ось z), то можно сразу сказать, что 1) на оси z волнового процесса не будет в силу отсутствия выделенного направления; 2) будет симметрия по φ ; 3) в любой точке пространства на расстоянии ρ от оси поле будет одинаково, опять же, из соображений равнозначности выбора такой точки наблюдения в любом другом с таким же радиусом в силу бесконечности последовательности источников.

Итак, автоматически получаем решение в виде цилиндрической волны:

$$u(\rho, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(ct - r)}{r} dz \quad (4.36)$$

4.2 21.02.2020

Сегодня мы вспомним электродинамику. Вспомним в начале уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{D} d\vec{S}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{S}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho \Rightarrow \oint_S \vec{D} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Для перехода к интегральной форме в первых двух уравнениях используется формула Стокса, а для вторых двух уравнений – теорема Гаусса-Остроградского.

Из уравнений Максвелла можно получить уравнение непрерывности в дифференциальной форме. Для этого нужно применить оператор div к уравнению для $\operatorname{rot} \vec{H}$, при этом учитывая выражение для $\operatorname{div} \vec{D}$:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{D} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (4.37)$$

Проинтегрировав, получаем интегральную форму уравнения непрерывности

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \oint_S \vec{j} d\vec{S} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} = -J \quad (4.38)$$

В текущем виде система уравнений Максвелла не замкнута: нужно добавить материальные уравнения, характеризующие электромагнитные свойства среды:

$$\vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{j}(\vec{E}). \quad (4.39)$$

Из электродинамики материальные уравнения найти не могут. Их можно определить экспериментально, или, в простейших случаях, найти с помощью статистических методов (например, диэлектрическая проницаемость газа из полярных молекул). Если между частицами среды есть

взаимодействие, применять статметоды уже очень сложно.

Наиболее распространённое приближение – это линейные соотношения

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (4.40)$$

Заряды в среде можно разделить на свободные (которые могут перемещаться по всему объёму среды, например электроны проводимости) и связанные, находящиеся в молекулах, которые могут только смещаться.

Плотность тока свободных зарядов \vec{j} связана в проводящей среде законом Ома с напряжённостью электрического поля, что отражено последним уравнением.

В простейшем случае неоднородной среде – резком границе раздела двух сред с разными проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2 – дифференциальные уравнения на границе не справедливы: производные терпят скачок. Поэтому нужно дополнять дифференциальные уравнения граничными условиями.

Если выбрать нормаль из среды 1 в среду 2, то выполняются граничные условия

$$\left[\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \right] = 0, \quad (4.41)$$

$$\left(\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \right) = 0, \quad (4.42)$$

$$\left[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \right] = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{пов}}, \quad (4.43)$$

$$\left(\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \right) = 4\pi \rho_{\text{пов}}. \quad (4.44)$$

Поверхностные токи протекают строго по поверхности в приближении идеального проводника $\sigma \rightarrow \infty$. В реальности поле, экспоненциально спадая, проникает на глубину скин-слоя $\delta = c(2\pi\sigma\mu\omega)^{-\frac{1}{2}}$.

В реальности компонента H_τ , например, скачком не меняется, есть плавный переход. Но в идеализированных задачах для удобства вводятся понятия поверхностного тока и поверхностного заряда.

Уравнения Максвелла связаны с уравнением движения заряда, которое определяется силой Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c} \left[\vec{v} \times \vec{B} \right] \quad (4.45)$$

В СГС⁹ (гауссовой системе единиц) константы ε, μ безразмерны, и

⁹Принята международным конгрессом электриков в 1881 году

поэтому \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , \vec{H} имеют одну размерность.

Наряду с СГС широко применяется система СИ. Она возникла вследствие того, что на практике, в ряде инженерных применений СГС неудобна: если взять бытовые значения, например силу тока 1 А, то в СГС она равна $3 \cdot 10^9$ единиц тока СГС, мощность 1 Вт $\approx 10^7$ эрг в секунду. Единицы СГС очень малы для удобства в бытовом использовании.

Ампер, вольт, ватт – долгое время были внесистемными единицами. И в 1960 году на 11 международной конференции по мерам и весам была принята СИ – Systeme International d'Unites (SI).

В СИ принято выделять 7 основных единиц.

1. L м
2. M кг
3. T с
4. сила тока А
5. температура К
6. сила света Кд
7. количество вещества моль

Широко используются производные единицы: Дж, Вт, Кл, В и так далее.

Запишем основные соотношения электродинамики в единицах СИ.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Уравнения Максвелла в системе СИ записываются без размерных коэффициентов. СИ вводилась именно с таким расчётом. Вроде бы, это удобно – но при этом размерности полей уже не совпадают: теперь простейшие материальные уравнения для однородных изотропных сред с постоянными проницаемостями

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (4.46)$$

Здесь ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума, размерные величины:

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{\Phi}{\text{М}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{М}}. \quad (4.47)$$

В системе СИ выполняется тождество

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (4.48)$$

Размерности полей в системе СИ

$$[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{М}^3}, \quad [j] = \frac{\text{А}}{\text{М}^2}. \quad (4.49)$$

Отсюда сразу из уравнений Максвелла

$$\frac{[D]}{L} = [\rho] \Rightarrow [D] = \frac{\text{Кл}}{\text{М}^2}, \quad (4.50)$$

$$[E] = \frac{\text{В}}{\text{М}} \Rightarrow [B] = \frac{\text{В}}{\text{М}^2 \cdot c} = \text{Тл}. \quad (4.51)$$

И, наконец,

$$[H] = \frac{\text{А}}{\text{М}}. \quad (4.52)$$

Вспомним уравнения для потенциалов и получим их в системе СИ. Пусть у нас не проводящая среда ($\sigma = 0$) характеризуется постоянными ε, μ . При этом в уравнения Максвелла должны входить сторонние источники, в общем случае: их мы задаём независимо от среды.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{st} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{st}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Из последнего выражения следует, что поле \vec{B} можно представить в виде

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (4.53)$$

и подставить в $\text{rot } \vec{E}$:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{A} \Rightarrow \underbrace{\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{-\nabla \varphi} = 0 \quad (4.54)$$

Подставим $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot } \vec{A}$ в уравнение для ротора:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot rot } \vec{A} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{st} = \varepsilon_0 \varepsilon \left(-\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi \right) + \vec{j}_{st} = \\ &= \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \left(-\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \mu_0 \mu \vec{j}_{st} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Отсюда получаем

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \text{grad} \left(\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu_0 \mu \vec{j}_{st} \quad (4.56)$$

Работая с потенциалами, мы имеем четыре скалярных уравнения. Найдя потенциалы, путём дифференцирования несложно найти поля. Потенциалы задаются неоднозначно: это не есть измеряемые физические величины. Эта неоднозначность заключается в том, что замена

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } f \quad (4.57)$$

приведёт к тому, что

$$\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot} \left(\vec{A} + \text{grad } f \right) = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}. \quad (4.58)$$

С другой стороны, замена

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.59)$$

приведёт к

$$\vec{E}' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \nabla f) = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \quad (4.60)$$

Такие добавочные преобразования к потенциалам, при которых не меняются поля, называются калибровочными. Логично наложить такие условия на потенциалы, чтобы упростить уравнения. В уравнении () удобно потребовать, чтобы величина под знаком дивергенции была равна нулю. Это калибровка Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad (4.61)$$

Тогда для векторного потенциала получается хорошо знакомое неоднородное волновое уравнение

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mu\vec{j}_{st}. \quad (4.62)$$

Используя уравнение для $\operatorname{div} \vec{D}$, получим уравнение для скалярного потенциала:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon \operatorname{div} \vec{E} &= \varepsilon_0\varepsilon \operatorname{div} \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \right) = \\ &= -\varepsilon_0\varepsilon\Delta\varphi - \varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} A) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Используя калибровку Лоренца, получаем

$$\Delta\varphi - \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_{st}}{\varepsilon_0\varepsilon} \quad (4.64)$$

Отметим, что здесь

$$\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} = \frac{1}{v_f^2}. \quad (4.65)$$

Заметим, что наложение калибровки Лоренца не устраняет возмож-

ности добавки к потенциалам: в условиях замены () выполняется

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}' + \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 & \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{div} \vec{A} + \Delta f - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 & \quad (4.66) \end{aligned}$$

Отсюда для функции f получается

$$\square f = 0. \quad (4.67)$$

Это означает, что мы можем производить калибровочные преобразования только с функцией f , удовлетворяющей волновому уравнению.

Задача 1.10. Удобно решать эту задачу, переходя к потенциалам:

$$\vec{A}(\vec{n}\vec{r} - ct) = \vec{A}(\xi), \quad \varphi(\vec{n}\vec{r} - ct), \quad \text{где} \quad \vec{n}^2 = 1. \quad (4.68)$$

Подставляя в уравнение калибровки

$$\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (4.69)$$

получаем

$$\left(\vec{n} \cdot \vec{A}'_{\xi} \right) + \varepsilon_0 \mu_0 \varphi'_{\xi}(-c) = 0 \quad (4.70)$$

Отсюда получаем

$$\left(\vec{n} \cdot \vec{A}'_{\xi} \right) - \frac{1}{c} \varphi'_{\xi} = 0 \quad (4.71)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{n} \cdot \varphi'_{\xi} + \vec{A}'_{\xi} \cdot c = -\vec{n} \cdot c \left(\vec{n} \cdot \vec{A}'_{\xi} \right) + \vec{A}'_{\xi} \cdot c = \\ = -c \left[\vec{n} \times \left[\vec{n} \times \vec{A}'_{\xi} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.72)$$

Так как $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, то

$$\vec{B} = \left[\vec{n} \times \vec{A}'_{\xi} \right] \quad (4.73)$$

и тогда

$$\vec{E} = -c \left[\vec{n} \times \vec{B} \right]. \quad (4.74)$$

Вывод: уравнения Максвелла имеют решение в виде плоских волн произвольных функций ...

дз: 1.11.

4.3 06.03.2020

Сегодня мы будем говорить про излучение точечных источников и функции Грина. Мы находили волновое уравнение для потенциалов электромагнитного поля, и говорили об аналогичном волновом уравнении в акустике.

Запишем волновое уравнение для векторного потенциала

$$\Delta \vec{A} + k_0^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_{st}, \quad \text{где} \quad k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (4.75)$$

Пусть у нас есть сторонний ток в виде монохроматического диполя

$$\vec{j}_{st} = \vec{e}_z J l \delta(x) \delta(y) \delta(z) e^{i\omega t}. \quad (4.76)$$

Поставим его в волновое уравнение, тогда окажется, что

$$\Delta A_z + k_0^2 A_z = -\mu_0 I l \delta(\vec{r}), \quad (4.77)$$

где A_z – подразумевается комплексная амплитуда. Найдя из этого уравнения A_z , сможем найти все компоненты магнитного поля.

В акустике можно аналогично написать для элементарного акустического монополя (пульсирующей сферы):

$$\Delta \varphi + k_0^2 \varphi = Q \delta(\vec{r}), \quad \text{где} \quad k_0 = \frac{\omega}{c_s}. \quad (4.78)$$

Чтобы решать такие уравнения, нужно найти функцию Грина: так как в правой части волнового уравнения стоит δ -функция.

Перепишем () в удобных обозначениях, отнормировав так, чтобы получить волновое уравнение на функцию Грина:

$$\Delta G + k_0^2 G = \delta(\vec{r}). \quad (4.79)$$

Функцию Грина мы ищем в виде интеграла Фурье

$$G(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k_x, k_y, k_z) e^{-ik_x x - ik_y y - ik_z z} dk_x dk_y dk_z = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \quad (4.80)$$

Запишем формально δ -функцию как интеграл Фурье и подставим в уравнение:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_x x} dk_x \Rightarrow \delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \quad (4.81)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta \tilde{G} e^{-i\vec{k}\vec{r}} + k_0^2 \tilde{G} - \frac{1}{(2\pi)^3} \right) d\vec{k} = 0 \quad (4.82)$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \tilde{G}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} + k_0^2 \tilde{G} e^{-i\vec{k}\vec{r}} - \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right) d\vec{k} = 0 \quad (4.83)$$

Или введя стандартным образом $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left([k_0^2 - k^2] \tilde{G}(\vec{k}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \right) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} \equiv 0 \quad (4.84)$$

Для тождественности при $\forall x, y, z$ необходимо равенство нулю выражения в скобках, откуда

$$\tilde{G}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_0^2 - k^2} \quad (4.85)$$

Вспомним, что знаменатель в последнем выражении мы вводили как

дисперсионную функцию:

$$D(\omega, \vec{k}) = k_0^2 - k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \quad (4.86)$$

Чтобы найти функцию Грина, нужно найти преобразование Фурье от образа:

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik_x x - ik_y y - ik_z z}}{k_0^2 - k^2} dk_x dk_y dk_z \quad (4.87)$$

В силу сферической симметрии надо перейти в сферические координаты:

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' k^2 \sin \theta' \frac{1}{k_0^2 - k^2} \exp\{-i\vec{k}\vec{r}\} \quad (4.88)$$

$$\vec{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = k \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta' \end{pmatrix}, \quad (4.89)$$

Заметим, что для точечного источника и сферической симметрии поле должно зависеть только от расстояния r , но не от углов: поэтому без всякого ограничения общности выбрать радиус-вектор \vec{r} вдоль оси z . Тогда

$$\vec{k}\vec{r} = kr \cos \theta', \quad (4.90)$$

и интеграл переходит к виду

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \frac{k^2 \sin \theta' \exp\{-ikr \cos \theta'\}}{k_0^2 - k^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{k_0^2 - k^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 \exp\{-ikrp\} dp = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \frac{k^2}{k_0^2 - k^2} \frac{2\pi}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) dk = \quad (4.91) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 ir} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k_0^2 - k^2} k dk \quad (4.92)$$

В силу чётности подынтегральной функции

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^2 ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{k_0^2 - k^2} k dk \quad (4.93)$$

Интеграл расходящийся: вычеты лежат на контуре интегрирования. Пока выражение получилось математически бессмысленное. Это связано с тем, что мы решали уравнение в частных производных, не поставив граничных условий.

Для придания смысла интегралу нужно использовать *принцип предельного поглощения*: ввести малые потери. Расходимость интеграла – цена идеализации задачи отбрасыванием потерь.

Чтобы ввести поглощение, в волновое уравнение нужно ввести член с первой производной, описывающий потери:

$$\Delta G - \frac{\nu}{c^2} \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (4.94)$$

Перейдя к гармоническому источнику, получаем

$$\Delta \tilde{G} + q^2 \tilde{G} = \delta(\vec{r}), \quad q^2 = k_0^2 \left(1 - i \frac{\nu}{\omega}\right) \quad (4.95)$$

Тогда вид функции Грина

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^2 ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{q^2 - k^2} k dk \quad (4.96)$$

Здесь уже полюса лежат не на контуре интегрирования: полюса в точках

$$k = \pm q = \pm k_0 \left(1 - i \frac{\nu}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.97)$$

Так как имеет смысл рассматривать только малые поглощения (при больших волн не будет, все сразу затухнет), то можно разложить в ряд

по малому параметру:

$$k = \pm k_0 \left(1 - i \frac{\nu}{2\omega} \right) \quad (4.98)$$

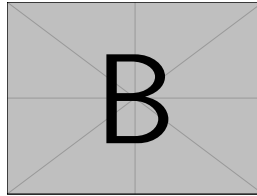


Рис. 36: Полюса подынтегрального выражения при учёте поглощения

Отдельно найдём интегралы для разных экспонент:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{q^2 - k^2} k dk \quad (4.99)$$

Путь интегрирования замкнём через бесконечность в верхней полуплоскости, пусть это будет контур Γ_+ . По теореме Коши, интеграл по действительной оси плюс интеграл по дуге кратен сумме вычетов:

$$\int_{-\infty}^{\infty} + \int_{\Gamma_+} = 2\pi i \operatorname{res}_{-q} \quad (4.100)$$

Согласно лемме Жордана, интеграл по замыкающему контуру за счёт спадающей экспоненты равен нулю. Получается, что наш интеграл равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{q^2 - k^2} k dk = 2\pi i \cdot \lim_{k \rightarrow -q} k \frac{e^{ikr}}{q - k} = -i\pi e^{-iqr} \quad (4.101)$$

С другой стороны, второй интеграл, охватывающий второй вычет (при этом направление интегрирования по контуру другое – идет замыкание

через нижнюю полуплоскость):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikr}}{q^2 - k^2} k dk = 2\pi i \cdot \lim_{k=q} k \frac{e^{-ikr}}{q+k} = i\pi e^{-iqr} \quad (4.102)$$

Окончательно получаем

$$G(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi^2 i r} (-2i\pi e^{-iqr}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-iqr}}{r} \quad (4.103)$$

Переходя к случаю бесконечно малых потерь, получим

$$G(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\omega t - ik_0 r}}{r}. \quad (4.104)$$

Чтобы получить решение уравнения с произвольной функцией, достаточно найти свёртку функции Грина с функцией источника:

$$\Delta \vec{A} + k_0^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_{st} \quad (4.105)$$

Пусть \vec{j}_{st} – произвольный сторонний ток. Решение запишется в виде

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{j}_{st} \frac{e^{-ik_0 R}}{R} dx' dy' dz', \quad \text{где} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'. \quad (4.106)$$

Полученное решение заведомо удовлетворяет условию излучения, поскольку представляет собой суперпозицию расходящихся сферических волн.

Чтобы найти электрическое поле через векторный потенциал, нужно помнить о монохроматичности поля и калибровке Лоренца:

$$\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\text{div } \vec{A}}{i\omega \varepsilon_0 \mu_0}. \quad (4.107)$$

Тогда можно найти поле как

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\varphi - i\omega\vec{A} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0\mu_0}\nabla\operatorname{div}\vec{A} - i\omega\vec{A} = \\ &= -\frac{i\omega}{k_0^2}\left(\nabla\operatorname{div}\vec{A} + k_0^2\vec{A}\right).\end{aligned}\quad (4.108)$$

ДЗ: 2.1В В этой задаче нужно решать одномерное поле: функция Грина гармонического осциллятора. (Решение уравнения Гельмгольца на прямой) и найти физическую интерпретацию из электродинамики.

Список литературы

- [1] Виноградова И.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. «Теория волн» // М.Наука, 1990
- [2] Гинзбург В.Л. «Распространение электромагнитных волн в плазме» // М. Наука, 1967
- [3] Ландау Л.Д. , Лифшиц Е.М. том 6 «Гидродинамика» // М.Наука
- [4] Ландау Л.Д. , Лифшиц Е.М. том 8 «Электродинамика сплошных сред» // М.Наука
- [5] Исакович М.А. «Общая акустика» // М.Наука, 1973.