

Оглавление

1 Введение	1
1.1 Общие свойства плазмы	7
1.2 Идеальная плазма	9
1.3 Плазменные колебания	15
2 Электромагнитные волны в плазме	18
2.1 Общий вид материальных уравнений плазмы	22
2.2 Гидродинамическое описание плазмы	27
2.2.1 Линеаризация уравнений гидродинамики	30

1 Введение

Наш предмет содержит не самые элементарные применения принципов электродинамики, а уже более приближенные к практической необходимости, хотя далеко и не инженерные.

Мы будем заниматься изучением электромагнитных волн в плазме¹. Физика плазмы изучается не сама по себе: это еще и простейшая модель почти любой среды, или, точнее, это способ подхода к моделированию почти любой среды. Речь будет идти только о классических подходах.

Вообще плазма, как широкое понятие, есть почти все. Например, устройство твердого тела, жидкого тела с точки зрения электродинамики описывается физикой плазмы.

Квантовыми понятиями мы пользоваться не будем: описание только на классическом уровне. В ряде случаев это есть почти точное описание.

Мы рассмотрим поле в веществе в простейшем случае: когда электроны в атомах и молекулах являются молекулами. В этом случае вещество представляет собой плазму. Это одно из определений плазмы: ионизованный газ, т.е. газ, в котором электроны оторваны от своих атомов и молекул и двигаются как свободные частицы. При этом действием других полей можно пренебречь. Исходно понятие плазмы применялось действительно только к ионизованному газу.

Изучение физики плазмы важно именно в том плане, что для полного описания вещества нужно знать, как будут вести себя электроны в свободном состоянии. Во многих случаях электроны действительно свободны, и их отклик на электромагнитное поле велик, и в плазме важен

¹Иногда говорят – электродинамика плазмы и плазмподобных сред

отклик именно электронов как наиболее активной компоненты. Ионная компонента менее активна в смысле создания плотности токов в силу малой подвижности (масса ионов заметно больше). А какие токи создают электроны и ионы, важно с точки зрения общей электродинамики.

Электроны не только почти безынерционно откликаются на поля, но и создают поля – изменяют поле.

Общая задача физики плазмы — самосогласованное исследование поведения электронов и поля. Электроны создают токи, которые сами меняют поле.

Нужно решать уравнения Максвелла и уравнения движения самих частиц, образующих токи: нужно решать такую связанную систему. Говорят, что нужно решать самосогласованную задачу.

Можно сказать, где встречается плазма: с самых общих позиций – почти вся вселенная – плазма. Межзвездное пространство, звезды тому пример. Почти – потому что предметы нас окружающие, уже не плазма: стол, мел, воздух – неионизованные вещества. Человеку приходится иметь дело именно с неионизованными веществами.

Понятие плазмы ввели американские физики-экспериментаторы Ирвинг Ленгмюр и Леви Тонкс в 1929 году. Они же ввели важные свойства плазмы.

Чем плазма оказалась так важна в физике? Например, электрон был открыт в результате исследования поведения разреженного газа в поле. Наличие тока в таком газе объяснялось только существованием электронов.

Вскоре стало ясно, что изучение плазмы важно и с точки зрения многих приложений.

Например, было обнаружено, что сигнал может доходить до приемника, как бы «огибая» Землю:

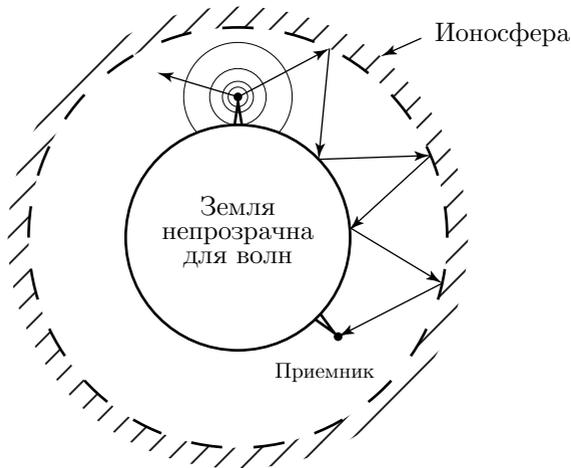


Рис. 1: Земля с передатчиком

Согласно теории Максвелла, сферические волны от передатчика не могли дойти до приёмника на другом конце Земли, которая для волн непрозрачна. Можно было только предположить, что сигнал доходит благодаря переотражениям от некой области атмосферы.

Оказалось, что описать с классических позиций поведение ионизованного газа не так сложно, и можно объяснить отражение электромагнитных волн.

Изучение дальней (загоризонтной) связи стало одним из направлений исследования ионосферной плазмы.

К другим применениям предполагалось такое фантастическое применение: размещение параболической антенны на Земле, и поле в фокусе антенны должно быть таким сильным, что область ионосферы начнет светиться – и это предполагалось как способ освещения городов. Пока что это в жизни применения так и не нашло.

Были идеи и создания управляемых зеркал в ионосфере, чтобы избежать прозрачности на определенных частотах.

Плазма, как сильное поле, может использоваться для преобразования радиотехнических сигналов. На плазму направляется электромагнитная волна, а выходит с другой частотой, интенсивностью и так далее.

И, наконец, очень большой толчок развитию физики плазмы был

получен в конце 20-го века, когда заговорили об управляемой термоядерной реакции.

Для проведения любой термоядерной реакции требуется, чтобы частицы сталкивались с очень большими энергиями. Если с очень большой скоростью столкнутся частицы, кулоновский барьер будет преодолен и вступят в силу ядерные силы, произойдут слияние ядер с выделением гигантского количества энергии.

При огромных энергиях, которые рассматриваются в теории термоядерного синтеза, любое вещество превратится в плазму.

Чтобы эффективно построить термоядерную установку, нужна плотная термоядерная плазма. Неизвестно, выполнима ли такая задача в лабораторных условиях, но надежда на это есть. Ведутся с середины 20-го века интенсивные исследования возможности создания такой плазмы, чтобы она была в ограниченном объеме с высокой температурой. Это значит, что плазма сожжет сосуд и не просуществует достаточно время для того, чтобы произошло нужное число слияний.

Для удержания плазмы используются электромагнитные поля. Взаимодействие высокотемпературной плотной плазмы (термоядерной) с полями это и есть управляемый термоядерный синтез.

Первой предложенной схемой был Токамак: тороидальная система

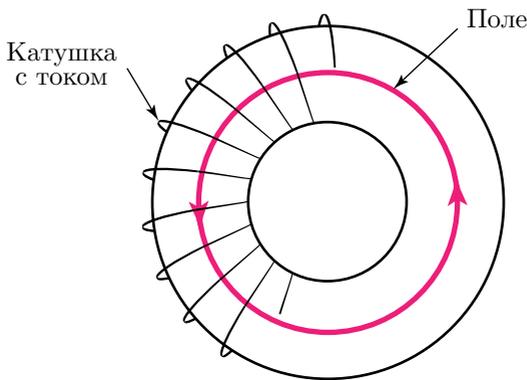


Рис. 2: Токамак

Электроны двигаются вокруг магнитного поля и не могут выйти за пределы Токамака.

Другая из проблем – нагрев плазмы. Современная наука считает наи-

более эффективным способом введение мощных СВЧ-излучателей. В этом преуспели горьковские ученые НИРФИ и ИПФ: создали гиротрон.

Оказалось, что главным камнем преткновения создания высокотемпературных плазм является неустойчивость плазмы, из-за которой она разлетается раньше времени. Все современные попытки создать такую плазму связаны с подавлением разных причин неустойчивости.

В 50-60-е годы надежды на создание были велики, но до сих пор ничего не построили.

В природе же реакции термоядерные созданы без человека: это реакции в звездах. Звезды, в частности солнце, являются таким долгим источником только за счет термоядерных реакций, иначе бы они давно погасли.

В звездах масса так велика, что локализация плазмы происходит за счет гравитации. Во вселенских масштабах термоядерный способ существует, но можно ли его создать в лабораторных условиях.

Кроме Токамака, есть другие способы удержать плазму: пробочная структура, где частицы за счет неоднородности поля будут отражаться от областей сильного поля и покинуть область может только обладая очень высокой скоростью и двигаясь по оси

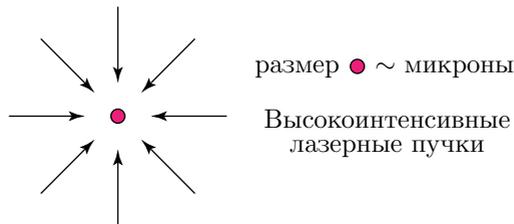


Рис. 3: Еще способ

Еще один способ – инерционный синтез, он же управляемый лазерный. Пусть плазма разлетается как ей угодно, но попробуем сделать так, чтобы за время разлёта плазмы успела произойти термоядерная реакция.

Пример - маленькая частица вещества, «пульпинка» (несколько микрон) облучается множеством высокоинтенсивных лазерных пучков, которые моментально разогревают и ионизируют эту «пульпинку». Атомы частицы начинают разлетаться, но могут успеть прореагировать за время разлета. Это, в некоем смысле, микровзрыв: можно повторять взры-

вы с некой периодичностью и отводить энергию в виде нейтронного или гамма-излучения.

Низкотемпературная плазма тоже представляет интерес: её исследования весьма важны из-за других применений – преобразования излучения при взаимодействии плазмы, например, создание очень мощных и коротких импульсов лазера. Такие лазеры, создающие напряжённости поля, больше атомных $E \sim 10^9$ в на см), были созданы. Речь идет о создании атто-импульсов (10^{-15} с).

Такие поля представляют возможность к расщеплению атомов и образованию электрон-позитронных пар (это тоже плазма), но здесь уже описание должно учитывать чисто квантовые, нелинейные эффекты.

Могут присутствовать преобразование спектра и модового состава: они изучаются в взаимодействии полей с плазмой.

Высокотемпературная плазма имеет температуру $10^8 K$, что аналогично энергии 10^4 эВ.²

Мы будем работать в СГСЭ, в которой значение заряда электрона

$$e = -4.81 \cdot 10^{-1} \text{ sgse} \quad (1.0.1)$$

А напряжение 1 вольт

$$1 \text{ В} = \frac{1}{300} \text{ sgse} \quad (1.0.2)$$

Практически, большинство научных работ используют для измерения полей гибридную размерность

$$1 \text{ sgse} = 300 \frac{\text{В}}{\text{см}} \quad (1.0.3)$$

$$1 \text{ ev} = 4.8 \cdot 10^{-10} \frac{1}{300} = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \quad (1.0.4)$$

$$m = 9.05 \cdot 10^{-28} \text{ г} \approx 10^{-27} g. \quad (1.0.5)$$

Мы будем малой $m = m_e$ означать массу электрона, а $M = m_p$ – массу протона:

$$m_p = 1840m \approx 2 \cdot 10^{-24} g. \quad (1.0.6)$$

Не любую смесь заряженных частиц называют плазмой. Нужно, чтобы для тех явлений, которые мы рассматриваем, частиц было много.

²1 эВ $\sim 10^4 K$. Один электронвольт – это энергия, приобретаемая электроном при проходе разности потенциалов 1 В

Плазма, по определению, случай, когда

$$N \cdot r_{De}^3 \gg 1, \quad (1.0.7)$$

где N – концентрация, r_{De} – дебаевский радиус: т.е. внутри сферы дебаевского радиуса количество частиц много больше единицы.

1.1 Общие свойства плазмы

Первое свойство плазмы – это квазинейтральность. Допустим, мы взяли макроскопический сосуд и ионизируем отдельные заряды. О плазме в этом случае пока не говорят.

Когда частиц много, они между собой взаимодействуют. В некотором масштабе, который нас интересует, плазма нейтральна. Масштаб зависит от задачи. Если мы говорим о распространении волны, масштабом будет длина волны λ .

На самом деле, это не все. Средние числа (или концентрации) частиц с зарядом разного знака могут совпасть, но в отдельных областях пространства они могут заметно отличаться: если мы создадим где-то избыток ионов, а где-то избыток электронов, но взаимное притяжение таких «облаков» за счет сил взаимодействия даст квазинейтральность.

Итак, установление квазинейтральности происходит за счет кулоновских сил. Мерой того, как быстро восстанавливается такая квазинейтральность, и является дебаевский радиус:

$$r_{De} = . \sim \frac{V_{Te}}{\omega_p}, \quad (1.1.1)$$

где ω_p – ленгмюровская, или плазменная, частота:

$$\omega_p \equiv \omega_{Le} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N e}{m}} \quad (1.1.2)$$

Это частота плазменных колебаний. Если взять некую область с зарядами разного знака, в среднем нейтральную, и сместить все электроны относительно ионов, возникнет нарушение квазинейтральности и возникнут кулоновские силы: под действием этих сил электроны полетят обратно к устойчивому состоянию, пролетят его по инерции и система снова потеряет квазинейтральность. Возникают колебания, которые и называются плазменными. Далее мы их получим на основании точных уравнений.

Плазменные колебания – это колебания, появляющиеся в результате появления упругой восстанавливающей силы при смещении из квазинейтрального положения.

Дебаевский радиус – это расстояние, которое проходит электрон с тепловой скоростью за время порядка периода плазменных колебаний.

Условие квазинейтральности и одновременно идеальности плазмы:

$$Nr_{De}^3 \gg 1. \quad (1.1.3)$$

Второе свойство плазмы – идеальность. Плазма, как и газ, бывает идеальной и неидеальной. Если кинетическая энергия много больше потенциальной, то газ называется идеальным. То же самое относится к плазме.

Если мы говорим о газе, то взаимодействие происходит только при тесном соприкосновении частиц (условных шаров). До момента соударения таких шаров взаимодействия нет совсем, само взаимодействие определено лишь в момент удара.

В плазме это не так, так как речь идет о заряженных частицах. Для двух частиц на расстоянии \bar{r} (будем так обозначать среднее по разным реализациям расстояние между частицами в плазме)

$$W_{vz} = \frac{e^2}{\bar{r}}, \quad (1.1.4)$$

а кинетическая энергия

$$W_{kin} = \frac{mV_{Te}^2}{2}. \quad (1.1.5)$$

Можно по-разному определять тепловую скорость. Обычно её вводят следующим образом:

$$mV_{Te}^2 = T. \quad (1.1.6)$$

По сути, это просто определение температуры T_e :

$$V_{Te} = \sqrt{\frac{T_e}{m}}. \quad (1.1.7)$$

Мы будем сравнивать величину энергии взаимодействия с кинетической:

$$\frac{e^2}{\bar{r}} \ll mV_{Te}^2 = T_e. \quad (1.1.8)$$

Это условие идеальной плазмы. Выразим среднее расстояние через кон-

центрацию:

$$\bar{r} \approx N_e^{-\frac{1}{3}}. \quad (1.1.9)$$

Тогда наше условие идеальности может быть записано в таком виде:

$$\boxed{e^2 N_e^{-\frac{1}{3}} \ll m V_{Te}^2 \Rightarrow N_e r_{De}^3 \gg 1.} \quad (1.1.10)$$

Нетрудно получить, что последнее неравенство очевидным образом следует из всех предыдущих формул.

В дальнейшем мы будем рассматривать, в основном, идеальную плазму. В термоядерной, ионосферной плазме, и многих приборах на плазме условие идеальности выполнено.

1.2 Идеальная плазма

Неидеальная плазма описывается гораздо труднее, и, как правило, идеальная достаточно близка к реальной. Это не значит, что мы не будем учитывать взаимодействие: мы будем описывать взаимодействие через столкновения.

О какой еще плазме можно говорить? Обычно, когда говорят о плазме, говорят о квазинейтральной плазме, т.е. плазма, в которой невозможны сильные нарушения квазинейтральности. Если бы частицы были незаряжены (например, смесь черных и белых шаров), то можно было бы нарушать нейтральность как угодно. Пусть их средние количества одинаковы. Берём некий подбъем, говорить о квазинейтральности которого невозможно: например, в нем мало частиц.

При отсутствии зарядов решение идёт полностью на базе теории вероятности, статистическом описании. Для таких шаров дисперсия будет пропорциональна $\frac{1}{\sqrt{N}}$, но в плазме она меньше за счёт сил взаимодействия.

Рассмотрим два примера, в которых проявляется дебаевский радиус и имеет смысл понятие квазинейтральности.

Первый пример. Пусть имеется безграничная плазма с равными средними концентрациями ионов и электронов $N_e = N_i$. Мысленно выделим плоский слой с параллельными границами:

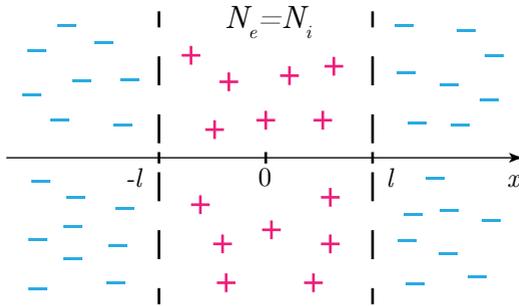


Рис. 4: Слой в плазме

Частицы имеют некую температуру, например, температура электронов T_e . Возможно ли, что все электроны покинут этот слой? Предположим, что они это сделали (например, в результате случайного теплового движения). Какой скоростью должен обладать последний электрон, чтобы покинуть слой из начала координат (которое мы введем в центре слоя)?

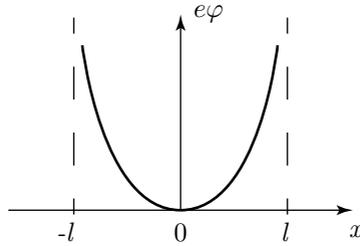
Поле в слое, если его покинули все электроны, кроме одного – и остались только ионы, задаётся как

$$\frac{dE_x}{dx} = 4\pi\rho_+ = -4\pi eN_+ \Rightarrow E_x = -4\pi eN_+ \cdot x = -\frac{d\varphi}{dx} \quad (1.2.1)$$

Вообще говоря, интегрируя, мы должны были записать $E_x = \dots + \text{const}$. Константа ищется из граничных условий: из симметрии задачи следует, что в центре поле равно нулю. Поэтому $\text{const} = 0$.

Проинтегрировав ещё раз, найдём потенциал:

$$\varphi = 4\pi e \frac{N_+ x^2}{2} \quad (1.2.2)$$

Рис. 5: Парабола потенциальной энергии $e\varphi$

Глубина потенциальной ямы

$$e\varphi_{\max} = 4\pi e^2 N_+ \frac{l^2}{2} \quad (1.2.3)$$

Чтобы электрон покинул яму, требуется, чтобы

$$\frac{mv^2}{2} > e\varphi_{\max}. \quad (1.2.4)$$

Пусть мы говорим о тепловом движении электрона, и тогда

$$v = v_{T_e} = \sqrt{\frac{T_e}{m}} \Rightarrow l^2 < \frac{v_{T_e}^2 m}{4\pi e^2 N} \quad (1.2.5)$$

По сути, мы находим ширину такой области, из которой могут уйти все тепловые электроны покинули её (сильное нарушение квазинейтральности). Заметим, что последнее выражение означает ни что иное, как

$$l < r_{De}. \quad (1.2.6)$$

Мы задали плоскую геометрию, решали с точностью до множителей 2 – и в общем случае задаётся условие

$$\boxed{l \gg r_{De}}, \quad (1.2.7)$$

при котором возможно только слабое нарушение квазинейтральности. Если мы рассматриваем объем с характерным размером $l \gg r_{De}$, то в нем плазма будет квазинейтральна.

Величина дебаевского радиуса отражает меру воздействия кулонов-

ских полей, которые обеспечивают квазинейтральность.

Не стоит путать условие идеальности плазмы $r_{De} \gg 1$ и условие квазинейтральности $l \gg r_{De}$.

Второй пример. Явление дебаевского экранирования. Рассмотрим безграничную однородную плазму. В среднем электроны и ионы в ней «размешаны» одинаково. Выделим некий заряд с заданным положением, например, один ион. Зададимся вопросом: при фиксированном положении одного иона, как распределятся остальные частицы относительно него? Очевидно, что возле него окажется больше электронов.

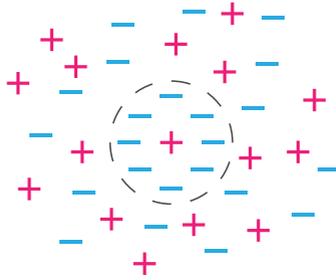


Рис. 6: Дебаевское экранирование

Если бы этот заряд был один в вакууме, его потенциал был бы:

$$\varphi = \frac{|e|}{r} \quad (E_r = \frac{e}{r^2}) \quad (1.2.8)$$

По разным физическим меркам, это медленное убывание поля. Но из-за дебаевского экранирования на большом расстоянии полный видимый из точки наблюдения заряд сильно меньше: говорят, заряд *экранируется* зарядами противоположного знака.

Решим эту задачу количественно. Пусть у нас электроны имеют температуру T_e , а ионы T_i (они в общем случае не равны). Нас интересует кулоновский потенциал, создаваемый центральным зарядом и зарядами, экранирующими его. Потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho = +4\pi e(N_i - N_e) \quad (1.2.9)$$

Величины N_e , N_i неизвестны. Их необходимо как-то связать с потенциалом. Попробуем записать обратное: какое есть соотношение, которое

позволит найти концентрации в известном кулоновском потенциале? Мы знаем, что если частицы находятся в каком-то потенциале, то в равновесном состоянии устанавливается больцмановское распределение:

$$N_e = N_0 e^{-\frac{e\varphi}{T_e}}, \quad N_i = N_0 e^{+\frac{e\varphi}{T_i}} \quad (1.2.10)$$

На бесконечности концентрации одинаковы, так как там нет возмущений. Из этих соображений предэкспоненциальные множители N_0 одинаковы.

С учётом вышесказанного:

$$\Delta\varphi = -4\pi e N_0 \left(e^{-\frac{e\varphi}{T_e}} - e^{+\frac{e\varphi}{T_i}} \right) \quad (1.2.11)$$

На самом деле, в этом уравнение кое-чего не хватает: самого выделенного заряда (центрального иона в начале координат). Учесть его можно, если предположить что он точечный:

$$\Delta\varphi = -4\pi e N_0 \left(e^{-\frac{e\varphi}{T_e}} - e^{+\frac{e\varphi}{T_i}} \right) - 4\pi |e| \cdot \delta(r) \quad (1.2.12)$$

С точки зрения математики, мы должны решить нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных. Правда, из симметрии можно перейти к полным производным:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) \quad (1.2.13)$$

Заметим, что уравнение () является автономным – в него не входит r (за исключением точки $r = 0$).

В общем случае представить себе качественно *решение в целом* можно с помощью *метода фазовой плоскости* – в нашем случае (φ, r) . Но в этой задаче мы применять этот метод не будем, а применим *метод линеаризации*. Это связано с тем, что больцмановское распределение верно только на расстояниях, много больших межчастичного расстояния $r \gg \bar{r}$, и тогда

$$\frac{|e|\varphi}{T_{e,i}} \ll 1 \quad (1.2.14)$$

В силу последнего разложим экспоненты в (1.2.12) в ряд:

$$\exp\left\{\frac{-e\varphi}{T_e}\right\} = 1 - \frac{e\varphi}{T_e}, \quad \exp\left\{\frac{e\varphi}{T_i}\right\} = 1 + \frac{e\varphi}{T_i}, \quad (1.2.15)$$

и уравнение (1.2.12) перейдет к виду:

$$\Delta\varphi = -4\pi e N_0 \left(-\frac{e\varphi}{T_e} - \frac{e\varphi}{T_i}\right) - 4\pi|e|\delta(r) \quad (1.2.16)$$

Его можно переписать в виде:

$$\underbrace{\Delta\varphi + 4\pi e^2 N_0 \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_i}\right)}_{\frac{1}{r_D^2}} \varphi = -4\pi|e|\delta(r), \quad (1.2.17)$$

где множитель перед φ выражается через, так называемый, приведённый дебаевский радиус.

Как выглядит решение такого уравнения³?

$$\Delta\varphi - \frac{1}{r_D^2} \varphi = -4\pi|e|\delta(r) \quad (1.2.18)$$

Известно решение такого уравнения (см. по аналогии со сноской):

$$\varphi = \frac{|e|}{r} \exp\left\{-\frac{r}{r_D'}\right\}. \quad (1.2.19)$$

Вспомним условие излучения (его даёт принцип причинности): поле вдали от уединённого источника может быть только волной, исходящей от источника.

Вблизи начала координат потенциал близок к кулоновскому (обозначим на графике эту область пунктиром), но дальше экспонента сильно «подавляет» решение:

³В теории излучения мы получали уравнение $\Delta\varphi + k^2\varphi = -4\pi\delta(r)$. При отсутствии правой части решение $\varphi = \frac{1}{r}$. С правой частью решение $\varphi = \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{e^{-ikr}}{r}$.

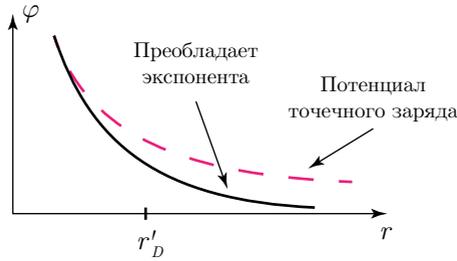


Рис. 7: Решение $\varphi(r)$.

Это и есть эффект дебаевского экранирования. Посмотрим на величину приведённого дебаевского радиуса в случае $T_e = T_i$:

$$r'_D{}^2 = \frac{T_e}{8\pi e^2 N} \tag{1.2.20}$$

Если же $T_e \gg T_i$, то $r'_D = r_{Di}$. Здесь

$$r_{Di} = \sqrt{\frac{T_i}{4\pi e^2 N}} \tag{1.2.21}$$

1.3 Плазменные колебания

Плазменные колебания, собственные колебания или ленгмюровские колебания. Это типичное явление, когда восстанавливающая состояние равновесия сила является упругой.

Рассмотрим модельную задачу. Пусть у нас есть однородная безграничная плазма, средние концентрации ионов и электронов в которой одинаковы ($N_e = N_i = N$). Выделим некоторый слой толщины l и представим, что все электроны внутри этого слоя мы сместили на расстояние x от первоначального положения. Если мы это сделали, то за слоем окажется отрицательно заряженный слой $0 \dots l$ (с избыточными электронами), а перед слоем – положительно заряженный, а в остальных местах плотность не нарушится:

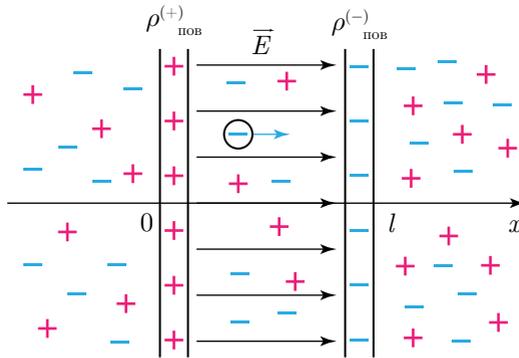


Рис. 8: Нарушение равновесия

Тогда внутри слоя $0 \dots l$ возникнет поле, фактически, плоского конденсатора:

$$E_x = 4\pi\rho_{\text{пов}}^{(+)} \quad (1.3.1)$$

Отдельно найдём поверхностную плотность:

$$\rho_{\text{пов}}^{(+)} = -eNx \quad (1.3.2)$$

Тогда

$$E_x = -4\pi Nx. \quad (1.3.3)$$

...

$$m\ddot{x} = eE_x = -4\pi e^2 Nx \Rightarrow \dot{x} + \omega_{pe}^2 x = 0, \quad (1.3.4)$$

где

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m}} \quad (1.3.5)$$

Мы представили, что в некой области все электроны сдвинулись от первоначального положения. А если рассмотреть в плазме ограниченный объект, например шар: в нем поровну электронов и ионов и они распределены равномерно. Если их сдвинуть таким же образом, возникнут куполообразные области некомпенсированного заряда, и возникнут колебания: их частота по порядку та же, но немного отличается:

$$\omega_{\text{соб. кол. шара}} = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}} \quad (1.3.6)$$

Мы кратко прошли по основным свойствам плазмы: квазинейтральность, идеальность, понятие дебаевского радиуса. Нужно остановиться на ещё одном возможном различии разных плазм. Это случай вырожденной или невырожденной плазмы: мы будем рассматривать классический случай невырожденной плазмы.

Когда можно рассматривать вещество как классический набор частиц? Ключевое понятие здесь – волна де-Бройля: каждой частице, имеющей массу, в квантовой механике может быть сопоставлена волна де-Бройля, и характерный импульс частицы записывается как

$$mv = p = \hbar k, \quad (1.3.7)$$

А энергия

$$\frac{mv^2}{2} = \mathcal{E} = \hbar\omega \quad (1.3.8)$$

Можно таким образом определить k как $\frac{mv}{\hbar}$. Длина волны де-Бройля

$$\lambda_D = \frac{2\pi}{k} \quad (1.3.9)$$

Если длина волны де-Бройля много меньше среднего расстояния между частицами

$$\lambda_D \ll \bar{r} = N^{-\frac{1}{3}}, \quad (1.3.10)$$

то можно вести классическое описание – в случае неравенства $k\bar{r} \gg 1$ плазма невырожденная. Очевидно, границей является некая величина скорости, такая, что

$$k\bar{r} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_F}{\hbar} N^{-\frac{1}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\hbar}{m} N^{-\frac{1}{3}} \sim V_F \quad (1.3.11)$$

Более точное определение для скорости Ферми вводится через понятие сферы Ферми. Энергия Ферми

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 N)^{\frac{2}{3}} = \frac{mV_F^2}{2} \quad (1.3.12)$$

Если тепловая скорость электрона много больше скорости Ферми, плазма рассматривается как классическая (можно говорить, что температура много больше энергии Ферми). В таком случае частицы плазмы имеют максвелловское распределение скоростей. В противоположном случае работает функция распределения Ферми (см. рис. 9)

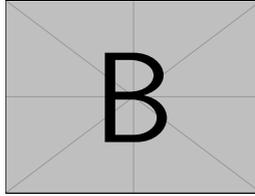


Рис. 9: Функции распределения

Есть очень важный объект, где плазму нужно считать вырожденной: это проводники (металлы) при комнатной температуре. Многие свойства вырожденной плазмы близки к свойства невырожденной. В частности, радиус Ферми для вырожденной плазмы получается из радиуса Дебая заменой $V_T \rightarrow V_F$.

2 Электромагнитные волны в плазме

Для описания волн в плазме нужно описать её как диэлектрик: найти материальные уравнения. Прежде чем говорить о них, вспомним описание уравнений поля для среды, чтобы понять, в каком контексте говорить о материальных уравнениях.

Запишем уравнения Максвелла для вакуума (так называемые уравнения Максвелла-Лоренца):

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{мик}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}}{\partial t}, \quad (2.0.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad (2.0.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{e} = 4\pi \rho_{\text{мик}}, \quad (2.0.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0. \quad (2.0.4)$$

Например, для единичного электрона $\rho_{\text{мик}} = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. В среде частиц очень много, поля хаотически зависят от координат времени. Такая картина не нужна и не возможна при описании поля в среде: приходится прибегать к усреднению и вводить понятия макроскопических полей.

Средние значения определяются так:

$$\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{e} dV, \quad (2.0.5)$$

где ΔV – физически бесконечно малый объем: его размер должен быть много меньше любых макроскопических масштабов задачи, но с другой стороны, этот объем должен содержать большое число частиц; иначе смысла в усреднении нет.

Аналогично определяется средняя напряжённость магнитного поля, которую обычно называют магнитной индукцией

$$\vec{B} = \langle \vec{h} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \vec{e} dV. \quad (2.0.6)$$

Интегрирование и деление на объем уравнений Максвелла-Лоренца даст переход к средним полям со следующей системой уравнений:

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{мик}} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.0.7)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.0.8)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \langle \rho_{\text{мик}} \rangle, \quad (2.0.9)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0. \quad (2.0.10)$$

В уравнениях возникли неизвестные величины – средние токи и плотности: задача их нахождения и является задачей нахождения поля в среде.

Существуют разные способы описания микроскопических токов и плотностей. Традиционный способ заключается в следующем. Пусть есть среда со свободными электронами и ионами. Заряд, образуемый этими частицами, называется плотностью свободного заряда $\rho_{\text{своб}}$, а плотность тока –

Существуют также связанные заряды, например в молекулах: они не могут свободно двигаться, но могут поляризоваться. Им соответствует связанная плотность заряда и так называемый поляризационный ток.

Для описания поляризационных токов и плотностей вводится понятие вектора поляризации \vec{P} – суммы дипольных моментов всех молекул

или атомов на единицу объёма. При этом известна связь вектора поляризации с зарядами и токами

$$\rho_{\text{связ}} = \operatorname{div} \vec{P}, \quad \vec{j}_{\text{поляриз}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (2.0.11)$$

Внутри молекулы могут быть вихревые токи, не изменяющие её поляризации. Для их описания вводится вектор намагничённости \vec{M} – сумма магнитных моментов на единицу объёма. При этом полный ток (или ток проводимости) определяется как

$$\langle \vec{j}_{\text{микро}} \rangle = \vec{j}_{\text{своб}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c \cdot \operatorname{rot} \vec{M}, \quad (2.0.12)$$

а полный заряд

$$\langle \rho_{\text{микро}} \rangle = \rho_{\text{своб}} - \operatorname{div} \vec{P} \quad (2.0.13)$$

И микроскопические, и макроскопические токи и заряды удовлетворяют уравнению непрерывности (закону сохранения заряда)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.0.14)$$

Определение. По определению вводятся следующие вектора:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}, \quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M}. \quad (2.0.15)$$

После этого уравнения Максвелла примут привычный вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.0.16)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.0.17)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho \quad (2.0.18)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (2.0.19)$$

Такая форма записи называется четырёх-векторной: (\vec{E}, \vec{B}) являются физически осмысленными, полученными в результате усреднения истинных полей, а вектора (\vec{D}, \vec{H}) вводятся для удобства записи уравнений.

Следует отметить, что это не единственный способ записи. Этот способ уместен в случае, когда среда состоит из свободных токов и зарядов.

В более общем случае можно представить себе более сложную среду, где нельзя разделить заряды на связанные и свободные (например, один и тот же заряд в разные моменты времени может быть как связанным, так и свободным). В плазме оказывается более удобным общее описание без разделения на свободные и связанные заряды:

$$\langle \vec{j}_{\text{микро}} \rangle = \vec{j}, \quad \langle \rho_{\text{микро}} \rangle = \rho. \quad (2.0.20)$$

В этом случае система уравнений для поля

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.0.21)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.0.22)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (2.0.23)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.0.24)$$

Это двух-векторное описание: поле описывается двумя величинами \vec{E} и \vec{B} , а источники – величинами \vec{j} и ρ . При такой записи, фактически, плазма описывается как проводник, в котором есть ток \vec{j} .

Противоположный подход – рассматривать весь ток как поляризационный:

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (2.0.25)$$

и при этом плазма рассматривается как диэлектрик:

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \text{где} \quad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}, \quad (2.0.26)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.0.27)$$

$$\text{div } \vec{D} = 0, \quad (2.0.28)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.0.29)$$

Заметим, что вектора \vec{H} в последних двух формах записи не вводилось. Поэтому вопрос о магнитной проницаемости плазмы становится бессмысленным.

Мы будем чаще всего пользоваться при описании плазмы одним из двух последних подходов.

Отметим, что уравнения записаны для чистой плазмы: если, например, в плазме находится провод с током, то он рассматривается как сторонний источник, и уравнения модифицируются

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} j_{\text{стор}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.0.30)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{стор}}) \quad (2.0.31)$$

2.1 Общий вид материальных уравнений плазмы

В зависимости от выбранного подхода (рассмотрение плазмы как проводника или как диэлектрика) поиск материальных уравнений заключается в поиске одной из связей

$$\vec{j}(\vec{E}, \vec{B}) \quad \text{или} \quad \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}). \quad (2.1.1)$$

Перейдём непосредственно к вопросу о виде материальных уравнений в плазме. В данном разделе рассматривается *линейная* электродинамика плазмы: это означает, что связь отклика плазмы на воздействия с воздействием линейна и не содержит членов высшего порядка.

Чисто феноменологически, не рассматривая конкретных моделей, а исходя из самых общих принципов, с учётом ограничения линейности попытаемся записать линейное материальное уравнение в самом общем виде. Будем рассматривать плазму как диэлектрик, тогда она описывается полями \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , и поиск материального уравнения состоит в нахождении $\vec{P}(\vec{E})$ или $\vec{D}(\vec{E})$.

Связь не обязательно алгебраическая: она может содержать дифференциальные, интегральные операторы – главное, чтобы они были линейными.

Можно представить себе набор зарядов в пространстве и искать поля в точке наблюдения $\vec{D}(\vec{r}, t)$ и $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Надо заметить, что в общем случае поля нелокальны во времени и пространстве.

В простейшем случае поле представляет собой линейную комбина-

цию полей всех источников:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{V_\infty} \hat{\varepsilon}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') \vec{E}(\vec{r}', t') d^3\vec{r}' \quad (2.1.2)$$

Связь в общем случае тензорная: это значит, что

$$D_i(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{V_\infty} \tilde{\varepsilon}_{ij}(\vec{r}, \vec{r}', t, t') E_j(\vec{r}', t') d^3\vec{r}' \quad (2.1.3)$$

По немому индексу здесь подразумевается суммирование, согласно известному соглашению.

От свойств среды зависит ядро интеграла – тензор ε_{ij} .

Заметим, что мы уже ввели одно ограничение: верхний предел в интеграле по времени t отвечает принципу причинности – поле не может зависеть от значений в будущем.

Еще одно ограничение – ввиду конечной скорости света нужно в V_∞ учитывать только область абсолютного прошлого: от более далёких областей сигнал не доходит.

Мы будем рассматривать однородную, изотропную и не зависящую от времени (стационарную) плазму, и материальная связь для такой плазмы должна быть одинаковой во всех точках пространства и во все моменты времени. Это значит, что ядро должно зависеть только от разностных аргументов

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t'). \quad (2.1.4)$$

Мы записали общую связь в области пространственно-временных переменных (\vec{r}, t) . Можно перейти в спектрально-сопряжённые переменные (ω, \vec{k}) . При этом уже ведётся описание уже гармонических во времени полей:

$$\vec{E} = \iint_{\vec{k}, \omega} \vec{E}_{\omega, \vec{k}} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (2.1.5)$$

Представим себе, что поле представляет собой плоскую монохроматическую волну

$$E_j = E_{0j} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (2.1.6)$$

Подставим такое поле в материальное уравнение и получим материальные уравнения для каждой фурье-гармоники:

$$D_i(\vec{r}, t) = E_{0j} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \iint \tilde{\varepsilon}_{ij}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') e^{i[\omega(t' - t) - \vec{k}(\vec{r}' - \vec{r})]} d^3\vec{r}' dt'. \quad (2.1.7)$$

Введём обозначения $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, $\tau = t - t'$. Тогда

$$D_i(\vec{r}, t) = E_{0j} e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \iint \tilde{\varepsilon}_{ij}(\vec{R}, \tau) e^{i[\omega\tau - \vec{k}\vec{R}]} d^3\vec{R} d\tau. \quad (2.1.8)$$

Весь интеграл зависит от переменных ω и \vec{k} : тогда можно записать

$$D_j = \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}) E_j, \quad (2.1.9)$$

где $E_j \sim e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$. Последнее уравнение представляет собой материальное уравнение в спектральной форме. Здесь

$$\varepsilon_{ij} = \iint \tilde{\varepsilon}_{ij}(\vec{R}, \tau) e^{i[\omega\tau - \vec{k}\vec{R}]} d^3\vec{R} d\tau. \quad (2.1.10)$$

Нелокальная связь во времени и пространстве при переходе в спектральную область отражается во временной и пространственной дисперсии – зависимости тензора ε_{ij} от ω и \vec{k} .

Для определения вида тензора необходимо рассматривать уже конкретную модель среды.

Есть общие понятия: скаляр, вектор, тензор и так далее. С общей точки зрения, все это тензоры разных рангов. Нужно знать, как они ведут себя при линейных ортогональных преобразованиях (поворот, зеркальное отражение), системы координат. Если мы имеем систему координат x, y, z и точку в пространстве с тремя координатами, то можно следить за координатами при повороте:

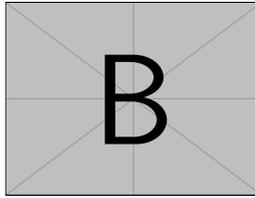


Рис. 10: Поворот системы координат

Если мы повернём систему координат, то координаты точки будут меняться известным образом (матрица поворота).

Тензоры разных рангов характеризуются именно поведением при повороте координат. Скаляр (тензор нулевого ранга) не изменяется при линейном ортогональном преобразовании, как говорят, он инвариантен относительно этого преобразования.

Вектор (тензор первого ранга) же, образом которого является стрела, характеризуется двумя величинами: длиной и направлением, или тремя числами (координатами конца вектора, если вести его из начала координат). С точки зрения поведения при линейном ортогональном преобразовании *компоненты вектора преобразуются как координаты*.

Тензор второго ранга в трёхмерном пространстве задаётся девятью числами, которые преобразовываются как *произведения пар координат*. Из трёх координат, очевидно, можно получить девять произведений.

Тензоры нужны для того, чтобы с их помощью из одного вектора делать другой вектор по определённой правилу.

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k. \quad (2.1.11)$$

Чтобы из вектора сделать тензор, из определения достаточно записать произведение векторов:

$$k_{ij} = k_i k_j. \quad (2.1.12)$$

Из общих соображений попробуем представить вид тензора в одно-родной изотропной среде. Для этого представим себе плоскую волну в таком пространстве, которая описывается 4 величинами \vec{k}, ω .

Так как в однородной среде нет выделенных направлений, то тензор должен каким-то образом зависеть от диагонального тензора δ_{ik} , с другой стороны, мы рассматриваем распространение плоской волны в этой среде: поэтому тензор ε_{ij} должен зависеть от k_{ij} .

В самом общем линейном виде тензор можно записать как

$$\varepsilon_{ik}\{\delta_{ik}, k_{ij}\} = a_1\delta_{ij} + a_2\frac{k_i k_j}{k^2}, \quad \delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1.13)$$

В случае локальной связи полей

$$\varepsilon_{ij}(\vec{R}) \sim \delta(|\vec{R}|) \quad (2.1.14)$$

По сути, тензор – ядро подынтегрального выражения – является функцией влияния. Если функция спадающая, мы учитываем влияние поля в некоторой ограниченной области: в пределе дельта функции учитываем только поле в данной точке. В этом случае

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \quad (2.1.15)$$

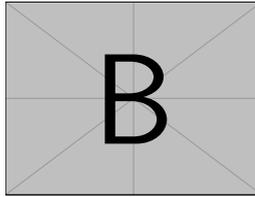


Рис. 11: Предел убывающей функции

Чтобы описать нелокальность зависимости поля D от E , хотя бы самым простейшим образом, можно разложить ядро подынтегрального выражения в степенной ряд по степеням $|\vec{R}|^n$ и учесть ограниченное число членов. В таком случае линейная связь будет дифференциальной:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \dots \quad (2.1.16)$$

Разберёмся, какие слагаемые (содержащие производные самого низкого порядка) нужно добавить, чтобы учесть нелокальность линейной связи D и E .

Есть такие дифференциальные операции первого порядка

$$\text{rot}, \quad \text{div}, \quad \text{grad} \quad (2.1.17)$$

Попробуем чисто формально добавить такие операторы, не думая о физическом смысле:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{A} \operatorname{div} \vec{E} + \alpha \operatorname{rot} \vec{E} \quad (2.1.18)$$

Может ли быть такой связь на самом деле? Начнём с члена $\vec{A} \operatorname{div} \vec{E}$. Так как связь должна быть линейной, то $\vec{A} = \text{const}$. Так как среда должна быть изотропной, то введение выделенного направления \vec{A} недопустимо и для выполнения изотропии $\vec{A} = 0$.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \cancel{\vec{A} \operatorname{div} \vec{E}} + \alpha \operatorname{rot} \vec{E} \quad (2.1.19)$$

С этой точки зрения α , на первый взгляд, уже не противоречит изотропии. Но $\operatorname{rot} \vec{E}$ не является истинным вектором: это псевдовектор, или аксиальный вектор (при отражениях ведёт себя не как вектор), а в левой части равенства стоит истинный вектор.

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \cancel{\alpha \operatorname{rot} \vec{E}} \quad (2.1.20)$$

Истинный вектор не зависит от выбора тройки координат, правой или левой. Все компоненты такого вектора меняют знак при зеркальном отражении. Аксиальные же вектора меняют направление при зеркальном отражении.

Слагаемых с первой производной больше нет. Минимальное усложнение не получилось: надо вводить члены со вторыми производными, инвариантными относительно выбора системы координат⁴:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div}, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \quad \Rightarrow \quad \Delta \quad (2.1.21)$$

Итак, можно записать общую линейную нелокальную связь в виде

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + a_1 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} + a_2 \Delta \vec{E} \quad (2.1.22)$$

Коэффициенты $a_{1,2}$ будут зависеть от конкретной модели среды.

2.2 Гидродинамическое описание плазмы

Получим материальное уравнение с помощью гидродинамического описания. Можно рассматривать электроны и ионы как жидкости или

⁴Для удобства записи волновых уравнений вводят $\Delta \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}$. Лапласиан вектора не совпадает с лапласианом скаляра $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$, но между ними есть связь: в декартовых системах координат $(\Delta \vec{E})_{x,y,z} = \Delta E_{x,y,z}$.

газы, записать для них уравнения гидродинамики.

Для газа в гидродинамике можно записать уравнение переноса импульса (без учёта вязкости)

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \vec{f}, \quad (2.2.1)$$

и ещё уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (2.2.2)$$

Здесь независимыми переменными являются координаты \vec{r} и время t , зависимыми – скорость \vec{v} , плотность ρ , давление p .

Необходимо записать уравнение для давления. Для этого нужно выбрать предмет описания, пусть это будет идеальный газ, и плотность введём как массу на концентрацию $\rho = mN$. Для идеального газа

$$p = Nk_{BT} \quad (2.2.3)$$

Далее будем перенормировать температуру на энергетические единицы и не писать постоянную Больцмана: $k_{BT} \rightarrow T$.

Можно переписать уравнения гидродинамики для частиц, имеющих определённые массу $m(\vec{r}, t)$, концентрацию $N(\vec{r}, t)$, скорость $\vec{v}(\vec{r}, t)$, в виде

$$mN \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \vec{f}, \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div} N \vec{v} = 0. \quad (2.2.5)$$

Эти уравнения уже ближе к описанию плазмы.

Важно понимать, что означает скорость в уравнениях выше. Это скорость жидкой частицы: она представляет собой среднюю скорость всех частиц в физически бесконечно малом объёме (жидкой частице).

Будем считать, что плазма подчиняется законам идеального газа, это значит, что для неё (для ионов или для электронов) выполняется уравнение состояния идеального газа:

$$p = NT \quad (2.2.6)$$

Вообще говоря, температура тоже является неизвестной функцией. По-

этому чтобы решать уравнения гидродинамики, нужно добавлять уравнение состояния. Но этого мало: для определения температуры нужно решать термодинамические уравнения или закон сохранения энергии.

Или можно принять некоторые предположения о температуре: считать процесс изотермическим ($T = \text{const}$). Даже если не так, некоторые явления все равно качественно описываются верно. Второй частый случай – адиабатические процессы: отсутствуют процессы теплообмена между соседними областями пространства $p = CN^\gamma$. В термодинамике $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, в статистике $\gamma = \frac{n+2}{n}$, где n – число степеней свободы.

Будем писать уравнения гидродинамики для определённого сорта частиц, например, электронов:

$$mN \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + Ne\vec{E} + \cancel{Ne \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}]} \quad (2.2.7)$$

Так как мы рассматриваем $v \ll c$, и плазму в постоянном магнитном поле (замагниченную плазму) не рассматриваем, то последним слагаемым можно пренебречь. Это не так, например, в ионосфере, в термоядерных реакциях.

Второе уравнение – непрерывности:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div } N\vec{v} = 0. \quad (2.2.8)$$

Правая часть равна нулю, если нет рождения источников: рождение же возможно – например, свободные электроны могут не только придти из какой-то области, а появится в результате соударения молекулы и другого электрона; или, напротив, электрон исчезнет в результате присоединения к иону. Поэтому в правой части стоило бы написать функцию, описывающие эти процессы. Но мы этого не делаем, ...

Рассмотрим адиабатический процесс для плазмы, считая её идеальным газом:

$$p = NT, \quad p = C \cdot N^\gamma \quad (2.2.9)$$

Формально случай $\gamma = 1$ отвечает изотермическому процессу. Поэтому дальше мы будем использовать уравнение адиабаты.

Наша задача – получить материальное уравнение плазмы. Для этого поступим следующим образом: будем искать ток, текущий в плазме

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = i\omega \vec{P}. \quad (2.2.10)$$

С другой стороны,

$$\vec{j} = eN\vec{v}. \quad (2.2.11)$$

2.2.1 Линеаризация уравнений гидродинамики

Уравнение () нелинейное и в частных производных. Одни неизвестные функции входят в уравнение в комбинации с другими неизвестными: поле тоже может быть неизвестным. Решать такое уравнение трудно. Поэтому мы будем решать уравнения в линейном приближении.

Для линейных систем можно изучать состояния равновесия: мы будем считать, что такое равновесие одно – невозмущённая плазма без полей и с постоянными параметрами. Мы же будем изучать волны в плазме.

Величины сразу первого порядка малости

$$\vec{E}, \quad \vec{v}, \quad N_1, \quad p_1, \quad T_1. \quad (2.2.12)$$

где

$$N = N_0 + N_1, \quad p = p_0 + p_1, \quad T = T_0 + T_1. \quad (2.2.13)$$

Подставим величины в уравнения гидродинамики и отбросим все члены выше первого порядка малости:

$$mN_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p_1 + N_0 e \vec{E} \quad (2.2.14)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + \operatorname{div} N_0 \vec{v} = 0 \quad (2.2.15)$$

Давление из уравнения состояния можно рассматривать как функцию концентрации:

$$p(N) = CN^\gamma, \quad (2.2.16)$$

тогда

$$p_1 = \left(\frac{dP}{dN} \right)_0 \gamma N_1, \quad (2.2.17)$$

при этом

$$\left(\frac{dP}{dN} \right)_0 = \gamma \left(\frac{P}{N} \right)_0 = \gamma T_0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \gamma T_0 N_1 \quad (2.2.18)$$

Предположим, что у нас зависимость от времени гармоническая

$$N_1, \vec{v} \vec{E} \sim e^{i\omega t}, \quad (2.2.19)$$

и будем считать величины в уравнениях комплексными амплитудами. Все уравнения линейны, поэтому можно так сделать. Получим тогда из первого уравнения

$$mN_0 i\omega \vec{v} = -\gamma T_0 \nabla N_1 + eN_0 \vec{E}, \quad (2.2.20)$$

из уравнения непрерывности

$$i\omega N_1 + \operatorname{div} N_0 \vec{v} = 0. \quad (2.2.21)$$

Зависимость от координат мы пока никак не уточняем, определив только зависимость от времени. Получили линейную систему относительно N_1, \vec{v}_1 .

Линеаризуем искомый ток:

$$\vec{j} = eN_0 \vec{v} + \cancel{eN_1 \vec{v}}. \quad (2.2.22)$$

Из уравнения () найдём N_1

$$N_1 = \frac{1}{i\omega} \operatorname{div} N_0 \vec{v} \quad (2.2.23)$$

и подставим в уравнение (), заодно домножив всё уравнение на e и разделив на $m i\omega$, тогда

$$\vec{j} = -\frac{\gamma T_0}{m i\omega} \left(-\frac{1}{i\omega} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{j} \right) + \frac{e^2 N_0 \vec{E}}{i\omega m}. \quad (2.2.24)$$

Немного упростим получившееся уравнение:

$$\vec{j} = \frac{e^2 N_0}{i\omega m} \vec{E} + \frac{\gamma T_0}{m\omega^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{j}. \quad (2.2.25)$$

Фактически, это и есть материальное уравнение. Перейдём к описанию на языке поляризации $j = i\omega \vec{P}$:

$$\vec{P} = -\frac{e^2 N_0}{m\omega^2} \vec{E} - \frac{\gamma T_0}{m\omega^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{P}. \quad (2.2.26)$$

Введя традиционным образом

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \frac{\vec{D} - \vec{E}}{4\pi}, \quad (2.2.27)$$

получим

$$\vec{D} + \frac{\gamma T_0}{m\omega^2} \text{grad div } \vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \frac{\gamma T_0}{m\omega^2} \text{grad div } \vec{E}, \quad (2.2.28)$$

Введём величины δ^2 и ε так, что

$$\vec{D} + \delta^2 \text{grad div } D = \varepsilon \vec{E} + \delta^2 \text{grad div } \vec{E},$$

где $\delta^2 = \frac{\gamma T_0}{m\omega^2}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N_0}{m\omega^2}.$ (2.2.29)

Если ввести величину тепловой скорости

$$V_T = \sqrt{\frac{T_0}{m}}, \quad (2.2.30)$$

тогда

$$\delta = \sqrt{\gamma} \frac{V_T}{\omega}. \quad (2.2.31)$$

Здесь δ имеет размерность длины, и эта длина порядка расстояния, которое проходит электрон за время порядка одного периода.

В случае отсутствия зависимости поля от координат (однородное поле) вторые производные в () исчезают, и получается простое материальное уравнение

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}. \quad (2.2.32)$$

Если температура не равна нулю, то в материальном уравнении проявляется неоднородность.

Если предположить, что в среде нет сторонних источников, то есть сделать очередное упрощение $\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho_{st} = 0$, тогда

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \delta^2 \text{grad div } \vec{E}}. \quad (2.2.33)$$

Предположим далее, что $\gamma = 3$. Доказательство этому может быть дано с помощью более строгого подхода – кинетических уравнений. То-

гда

$$\delta^2 = \frac{3T_0}{m\omega^2} = 3 \frac{V_T^2}{\omega^2}. \quad (2.2.34)$$

Есть наводящие соображения о том, что $\gamma = 3$, и без использования строгих подходов.

Из статфизики известно, что в этом случае число степеней свободы $n = 1$: казалось бы, у электрона три степени свободы. Это связано с тем, что добавочный член в уравнении () появился в результате взаимодействия электронов через созданное ими электрическое поле: в обычной газодинамике поле не учитывается, а взаимодействие учитывается через хаотические соударения, приводящие к равноправности всех направлений, и у частиц есть три степени свободы.

В плазме же в нулевом приближении электроны только колеблются вдоль поля (выделенное направление): фактически, это система с одной степенью свободы.

Выполненный нами подход к описанию плазмы называется *квази-гидродинамическим* приближением. Это связано с тем, что не вполне выполнено условие применения обычной гидродинамики. Чтобы её применять, недостаточно условия сплошной среды $\lambda \gg N^{-\frac{1}{3}}$. Необходимо также взаимодействие между частицами через соударения: отсюда появляется условие на длину свободного пробега $\lambda_{sv} \ll \lambda$, где

$$l_{sv} = V_T \cdot \tau_{st} = \frac{V_T}{\nu}, \quad (2.2.35)$$

ν – частота столкновений частиц.