

Отчет по лабораторной работе №1

Оценивание параметров случайного процесса

Работу выполнили студенты
440 группы радиофизического факультата
Сарафанов Ф.Г., Платонова М.В.

Нижний Новгород, 3 декабря – 9 декабря 2019 г.

Содержание

Введение	2
1. Лабораторный эксперимент	3
1.1. Реализации случайных процессов и их спектров	3
1.2. Зависимость $\langle x \rangle$ от ширины окна усреднения N	6
1.3. Зависимость σ_x от ширины окна усреднения N	7
1.4. Зависимость σ_x от времени дискретизации Δt	9
1.5. Определение $\langle x \rangle$ и σ_x по СПМ процесса	10
1.5.1. Параметры исходного процесса	10
1.5.2. Параметры усредненного процесса	11
1.6. Доверительный интервал	12
1.6.1. Анализ гистограммы	12
1.6.2. Влияние доверительной вероятности	14
Заключение	15

Введение

В настоящей работе изучаются вопросы, связанные с оценкой параметров случайных процессов, на примере оценки среднего значения (матожидания) случайного процесса.

Краткие теоретические материалы. В работе используется ряд понятий и формул. Не вдаваясь в конспектирование методических материалов¹, приведем лишь основные формулы, полезные для понимания работы.

Оценка среднего значения случайного процесса

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_i)$$

Среднеквадратичное отклонение и дисперсия эргодического процесса

$$D[\tilde{x}] = \frac{D[x]}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n B_x(t_i - t_j), \quad \sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]}$$

Определение дисперсии из СПМ

$$D[\tilde{x}] = S_{\tilde{x}}(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = S_{\tilde{x}}(0) \frac{1}{2T}$$

Связь доверительной вероятности и доверительного интервала с $W(\tilde{x})$

$$P(|\langle x \rangle| - \tilde{x} \leq I_\beta) = \int_{\langle x \rangle - I_\beta}^{\langle x \rangle + I_\beta} W(\tilde{x}) d\tilde{x} = \beta$$

¹Артохин И.В., Болховская О.В. и другие. Лабораторные работы по курсу «статистическая радиофизика». Практикум. – Н.Новгород:ННГУ, 2010. – 78 с.

1. Лабораторный эксперимент

Для выполнения лабораторной работы использовалась вспомогательная программа, предоставляющая возможность сгенерировать гауссов шум с заданным временем корреляции $\tau_{\text{корр}}$, усреднить M реализаций скользящим средним с регулируемой шириной окна N , периодом дискретизации Δt .

Для сгенерированного сигнала программа позволяет рассчитать среднее значение, СКО и доверительный интервал, получить графики зависимостей СКО от параметров усреднения, графики реализаций и спектров, гистограммы оценок среднего значения.

1.1. Реализации случайных процессов и их спектров

Для иллюстрации случайных процессов были сгенерированы реализации дискретного гауссова шума для разных времен корреляции $\tau_{\text{корр}}$ (10,30,100) и построены графики как самих реализаций, так и их СПМ².

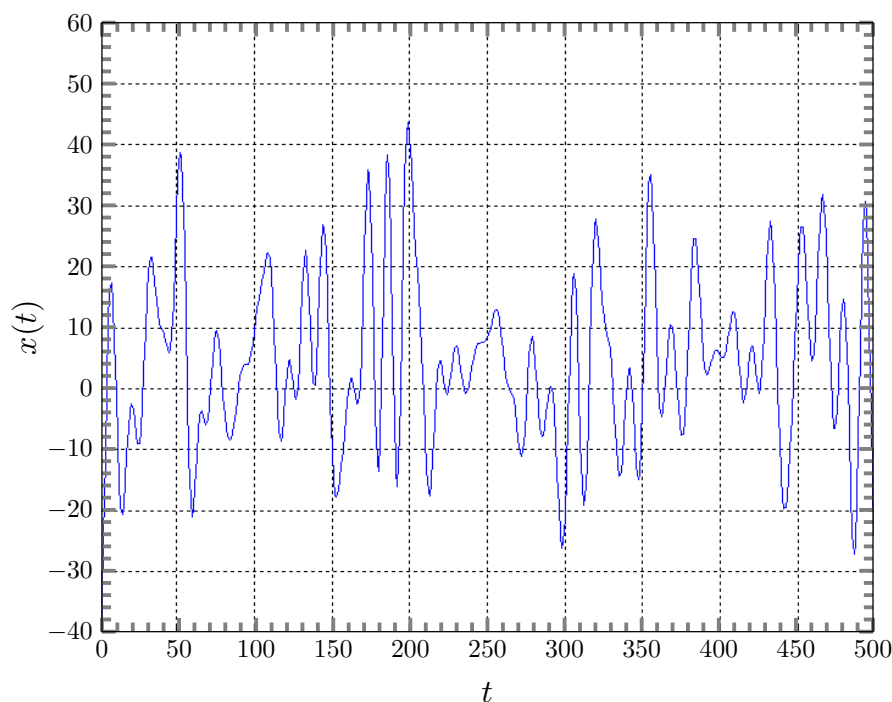
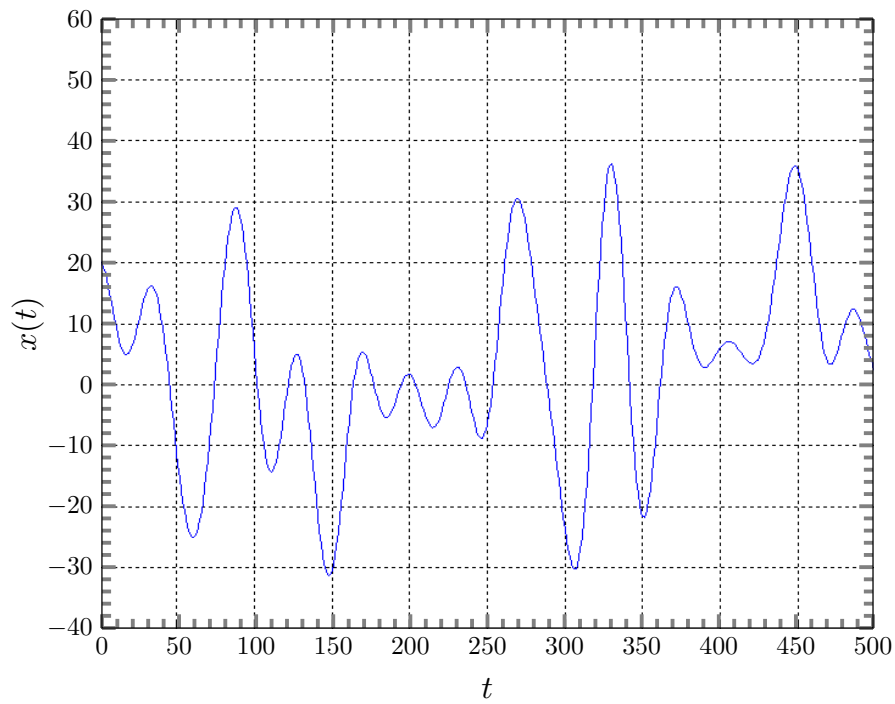
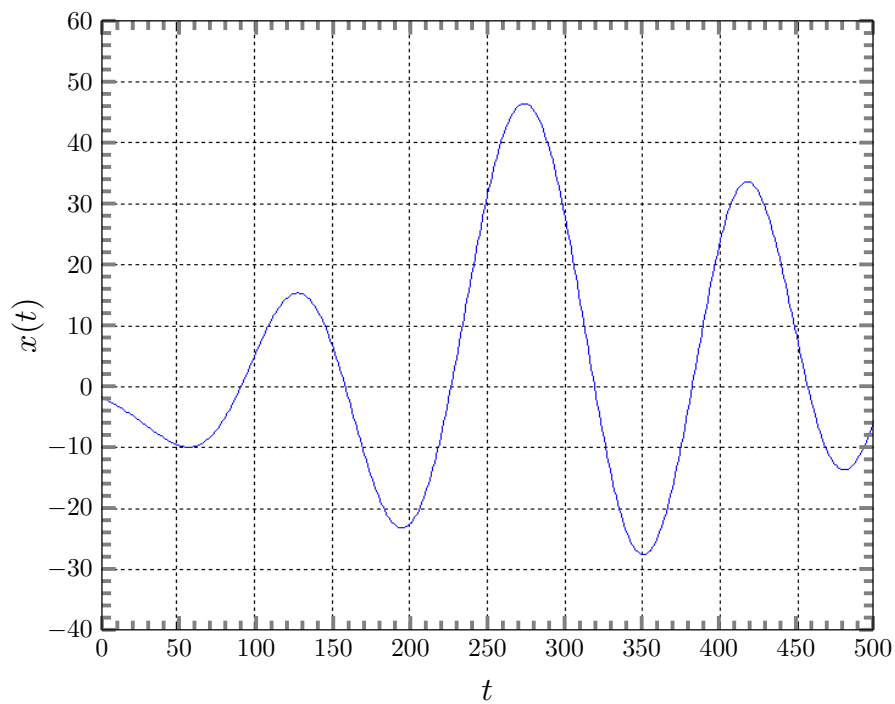
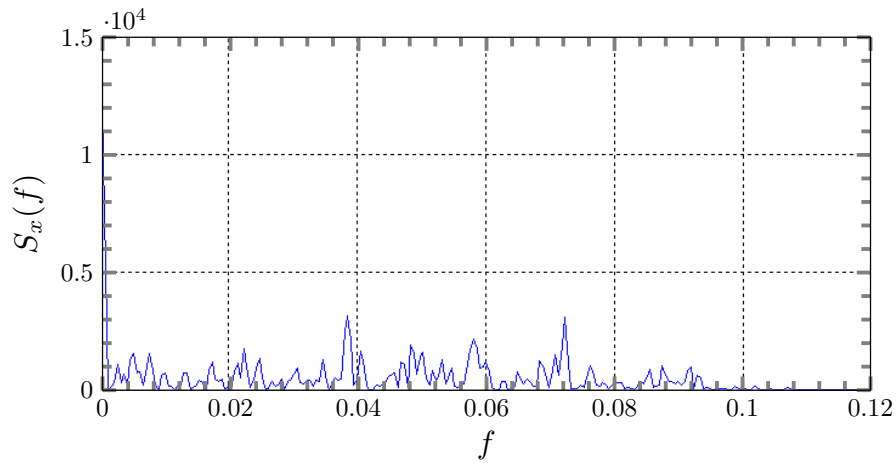
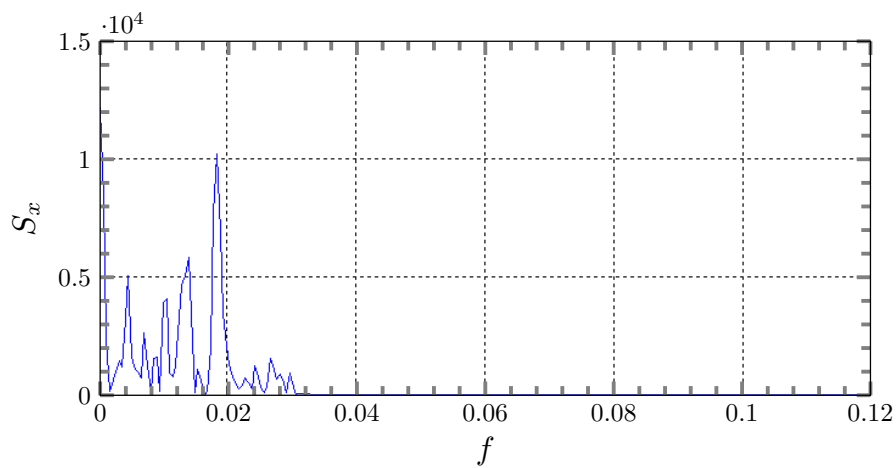
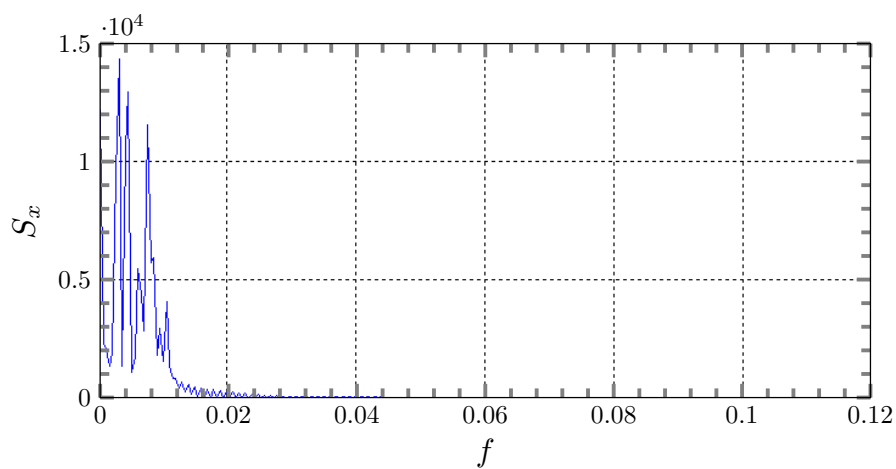


Рис. 1. Реализация случайного процесса с $\tau_{\text{корр}} = 10$

²СПМ – здесь и далее – спектральная плотность мощности

Рис. 2. Реализация случайного процесса с $\tau_{\text{корр}} = 30$ Рис. 3. Реализация случайного процесса с $\tau_{\text{корр}} = 100$

Рис. 4. СПМ случайного процесса с $\tau_{\text{корр}} = 10$ Рис. 5. СПМ случайного процесса с $\tau_{\text{корр}} = 30$ Рис. 6. СПМ случайного процесса с $\tau_{\text{корр}} = 100$

На графиках СПМ (см. рис. 4, 5, 6) хорошо видно, что ширина спектра обратно пропорциональна времени корреляции³. Это объясняется тем, что при больших временах корреляции два близких во времени отсчета сигнала отличаются слабо и сигнал меняется медленно, следовательно, имеет меньшую ширину спектра. Для малых времен применимы аналогичные рассуждения.

1.2. Зависимость $\langle x \rangle$ от ширины окна усреднения N

При заданных времени корреляции генерируемого сигнала $t_{\text{корр}} = 10$, числе реализаций $M = 128$, времени дискретизации $\Delta t = 1$, ширине окна усреднения (количество усредняемых отсчетов) $N = 1$ с помощью программы определены оценки среднего и СКО:

$$\langle x \rangle = 4.68, \quad \sigma_x = 14.74$$

Также при времени корреляции генерируемого сигнала $t_{\text{корр}} = 10$, числе реализаций $M = 8$, времени дискретизации $\Delta t = 1$ определена зависимость оценки от ширины окна усреднения (N):

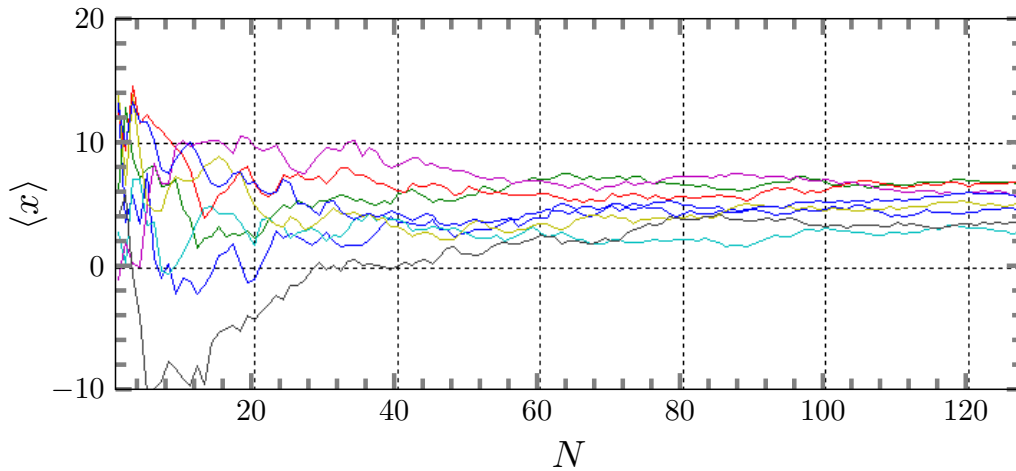


Рис. 7. Оценка среднего в зависимости от числа усредняемых отсчетов

Разброс среднего от вертикали определяет собой *дисперсию*. Разброс при $N = 1$ составляет $\delta\langle x \rangle \approx 15$, при $N = 40$ соответственно $\delta\langle x \rangle \approx 8$, и при $N = 128$, наконец, $\delta\langle x \rangle \approx 5$.

³Время корреляции $\tau_{\text{корр}}$ – это время, при котором функция корреляции $B[\tau]$ спадает в ϵ раз

1.3. Зависимость σ_x от ширины окна усреднения N

При заданных времени корреляции генерируемого сигнала $t_{\text{корр}} = 10$, числе реализаций $M = 256$, найдена серия зависимостей зависимости оценки от ширины окна усреднения (N) при разных временах дискретизации:

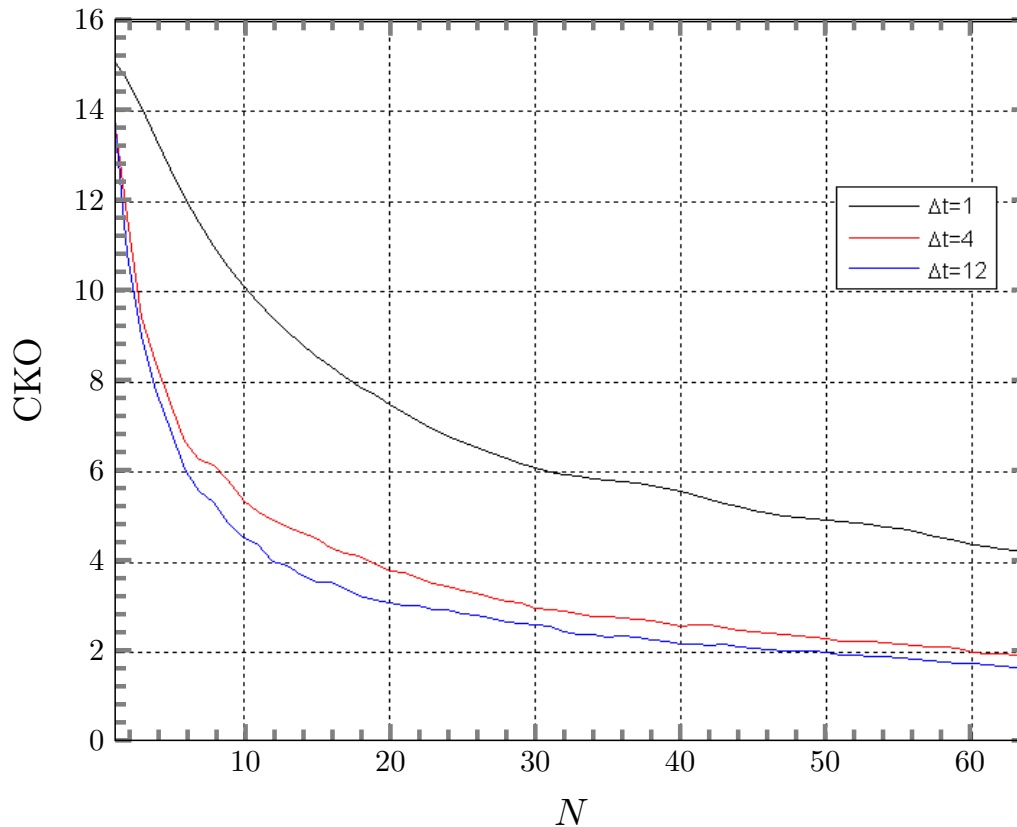


Рис. 8. Зависимость СКО от числа усредняемых отсчетов

На графике видно, что с ростом времени корреляции СКО уменьшается. Действительно, так как оценка среднего совпадает⁴ с истинным значением при $T \rightarrow \infty$, то увеличивая время корреляции, мы приближаемся к условию $T \rightarrow \infty$, а значит, уменьшаем СКО.

⁴Оценка среднего случайного процесса определяется как

$$\tilde{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T=n \cdot \tau_{\text{корр}}} x(t) dt$$

Аналогичная серия при тех же параметрах, но времени корреляции 100:

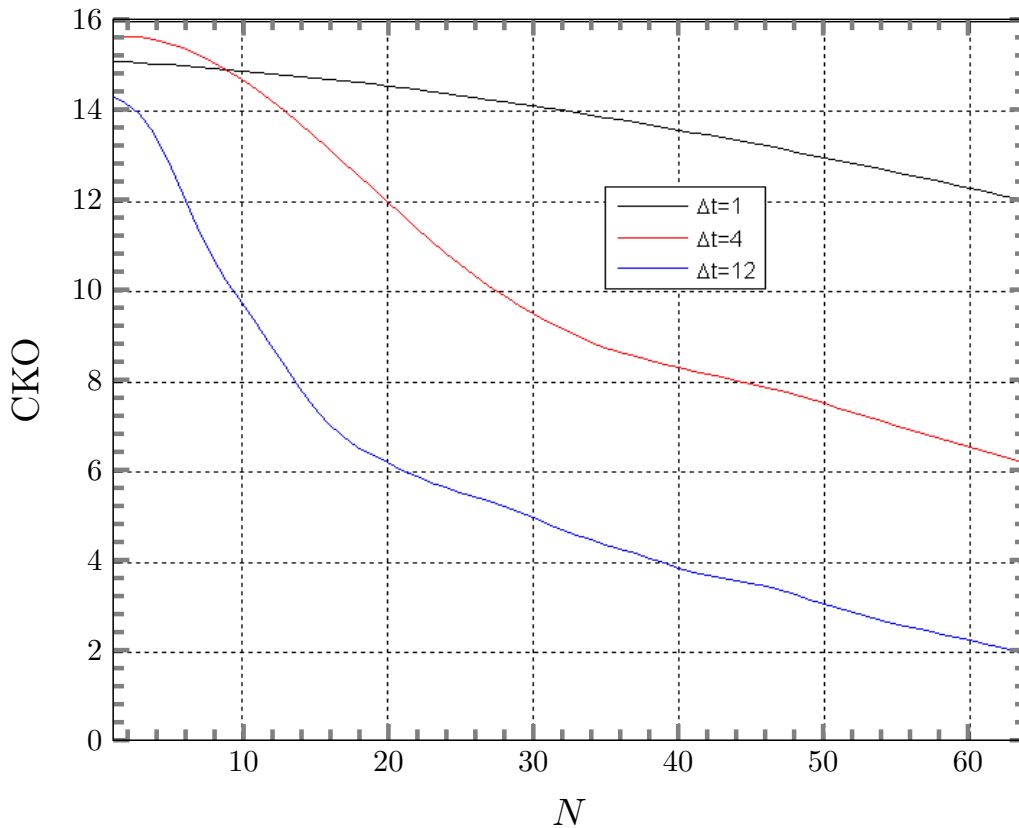


Рис. 9. Зависимость СКО от числа усредняемых отсчетов

Заметим, что можно оценить время корреляции процесса по графику. Так как в случае $\Delta t \cdot N^* \geq \tau_{\text{кор}}$

$$D[\tilde{x}] = \frac{D[x]}{N},$$

то график $\sigma_x(N)$ после $\Delta t \cdot N^* = \tau_{\text{кор}}$ будет вести себя как гипербола. По точке перехода графика в гиперболу N^* можно определить $\tau_{\text{кор}}$.

СКО оценки при $N = 1$ определяется числом реализаций сигнала M . В таком случае для каждой реализации среднее значение - это значение единственного элемента в реализации. Другими словами, СКО оценки при $N = 1$ определяется как дисперсия исходного процесса $D[x]$.

1.4. Зависимость σ_x от времени дискретизации Δt

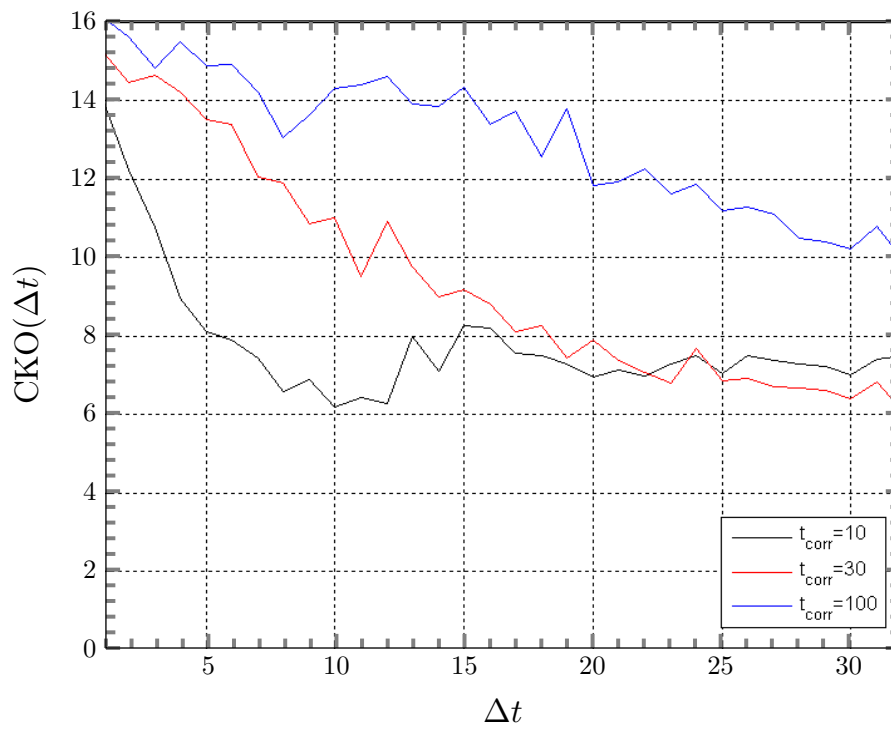


Рис. 10. $N = 4$

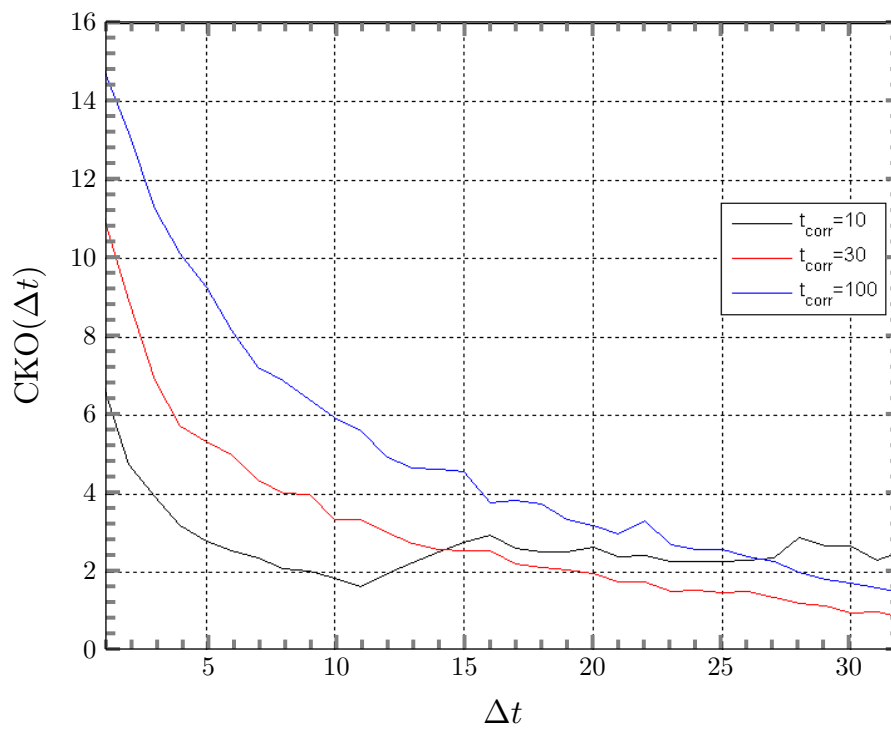
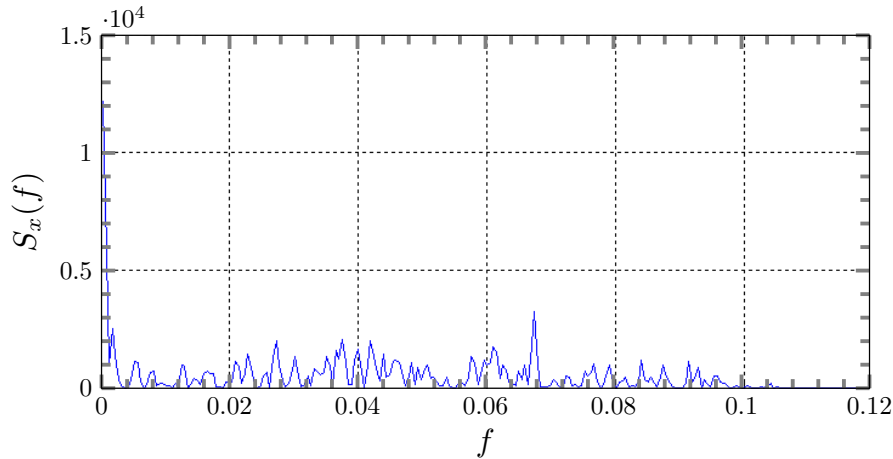


Рис. 11. $N = 32$

1.5. Определение $\langle x \rangle$ и σ_x по СПМ процесса

1.5.1. Параметры исходного процесса

Рис. 12. $N = 32$

С помощью лабораторной программы строится график СПМ при $N = 32$, $\tau_{\text{корр}} = 10$. Из графика находится значение СПМ в нуле

$$S_x(0) = 1.2 \cdot 10^4$$

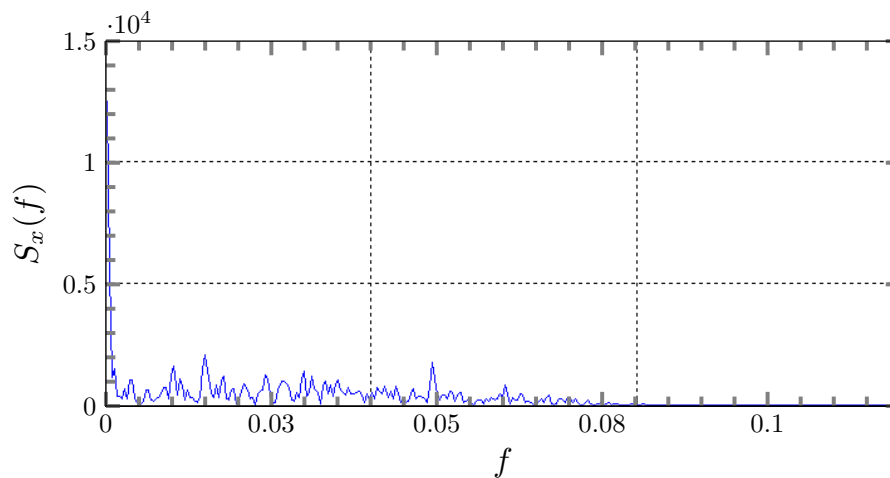
Так как полная мощность в полосе $\Delta\omega = \frac{1}{2048}$ на нулевой частоте равна (с некоторой погрешностью) $\langle x \rangle^2 = S_x(0) \cdot \frac{1}{2048}$, то

$$\langle x \rangle^2 = 1.2 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2048} = 5.86 \quad \Rightarrow \quad \langle x \rangle = 2.42$$

Из графика СПМ также можно найти дисперсию как произведение эффективной ширины спектра на эффективное значение СПМ:

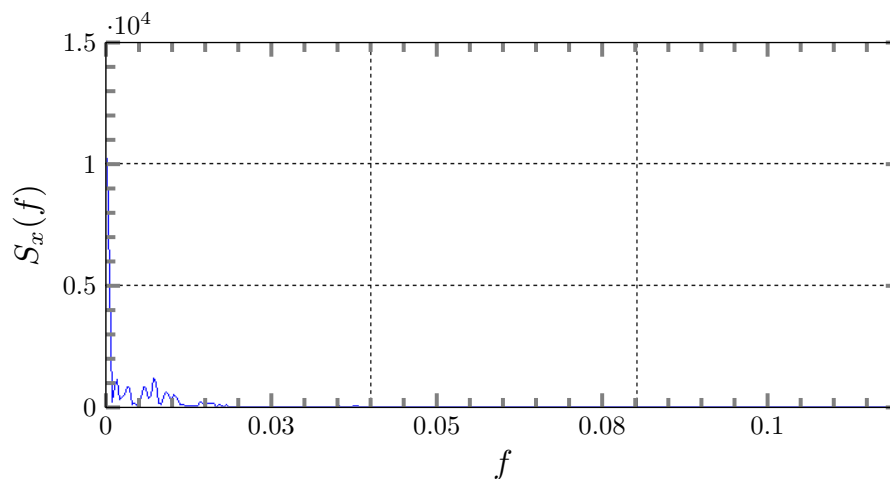
$$D[\tilde{x}] = S_x(0) \cdot \Delta f_{\tilde{x}} = \frac{\langle x \rangle^2}{2} = 2.93 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D[\tilde{x}]} \approx 1.71$$

1.5.2. Параметры усредненного процесса

Рис. 13. $N = 4$

Аналогично операциям с исходным процессом, из графика при ширине окна усреднения $N = 4$ находится величина СПМ в нуле, и простым расчетом находится среднее и дисперсия:

$$S_x(0) = 1.25 \cdot 10^4 \quad \Rightarrow \quad \langle x \rangle = 2.43, \quad \sigma_{\tilde{x}} = 1.72$$

Рис. 14. $N = 32$

При усреднении с шириной окна $N = 32$ получаются следующие параметры:

$$S_x(0) = 1 \cdot 10^4 \quad \Rightarrow \quad \langle x \rangle = 1.99, \quad \sigma_{\tilde{x}} = 1.41$$

1.6. Доверительный интервал

Можно исследовать влияние времени усреднения и доверительной вероятности на доверительный интервал. Для этого с помощью лабораторной программы построены гистограммы, иллюстрирующие распределение значений ансамбля из $M = 256$ оценок среднего.

1.6.1. Анализ гистограммы

При заданных времени корреляции $\tau = 10$ и доверительной вероятности $\beta = 0.95$, времени дискретизации $\Delta t = 1$ получена серия гистограмм при разных ширинах окна усреднения $N = 1, 4, 32$, отображенная на рисунках 15, 16, 17:

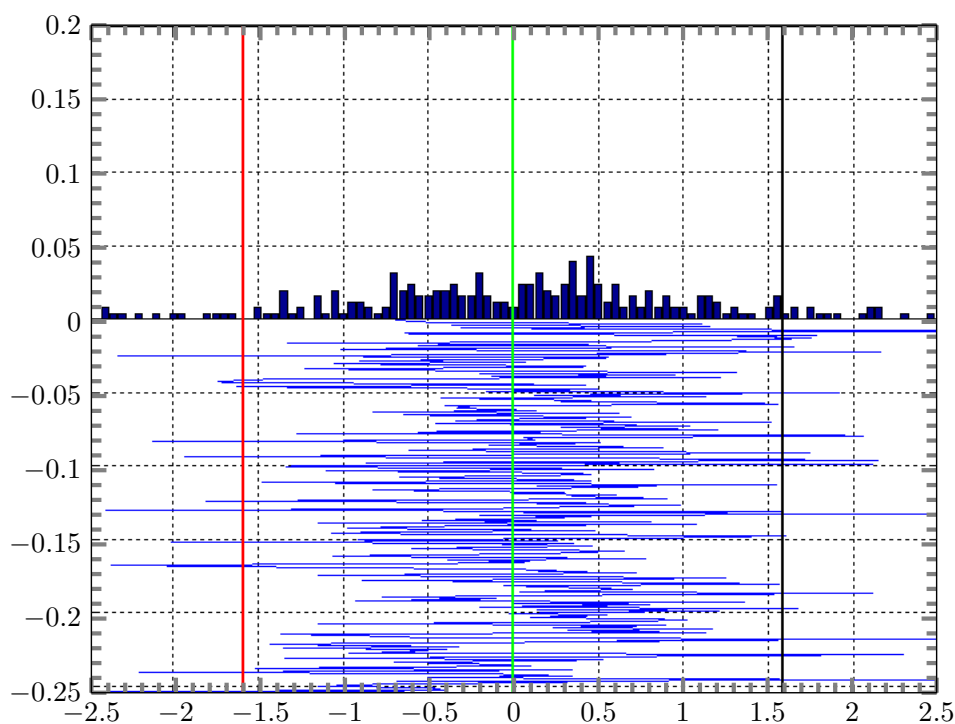
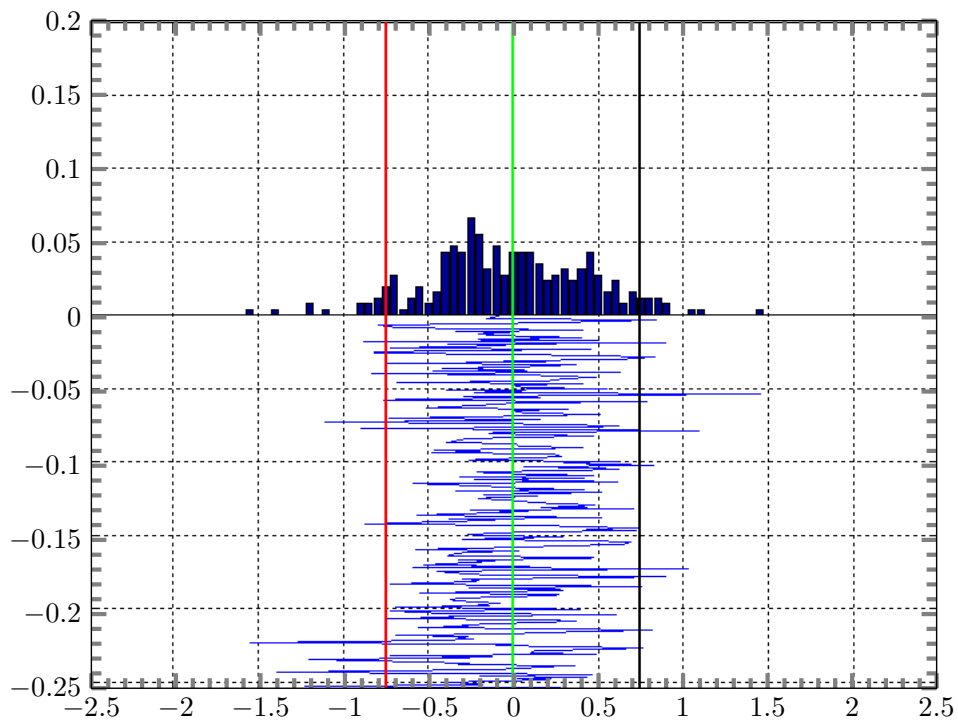
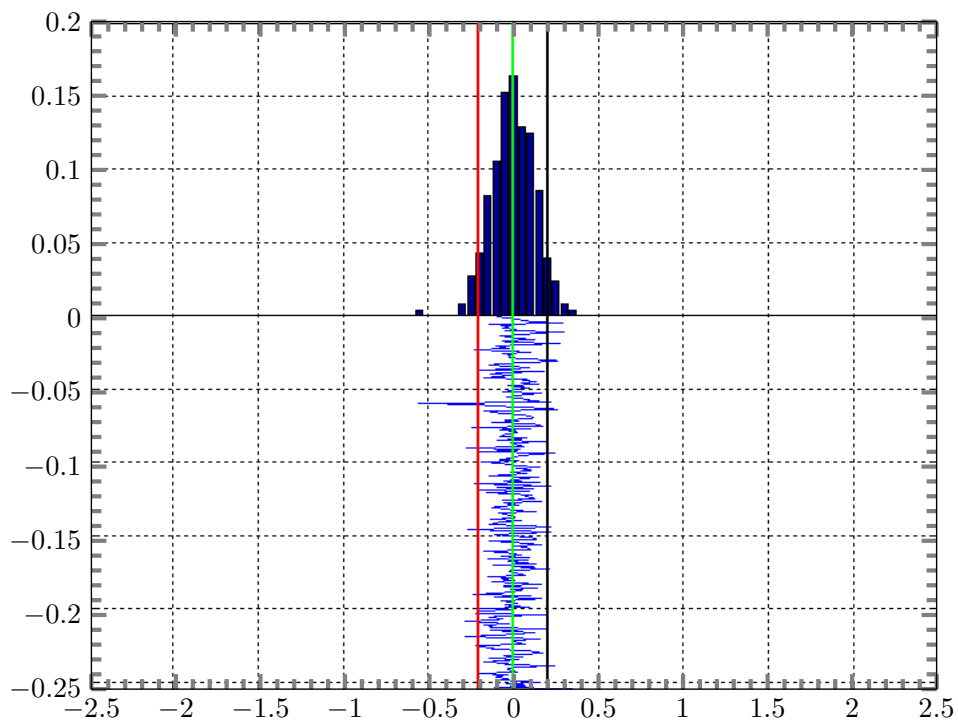


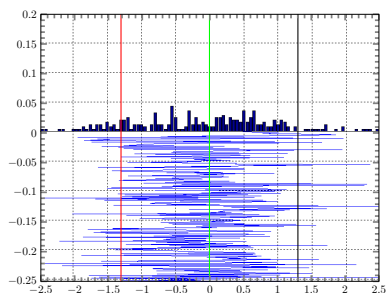
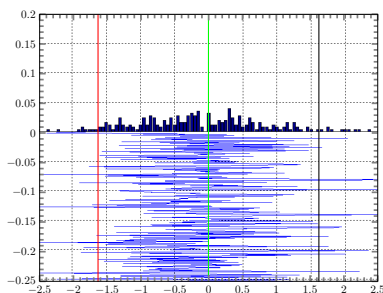
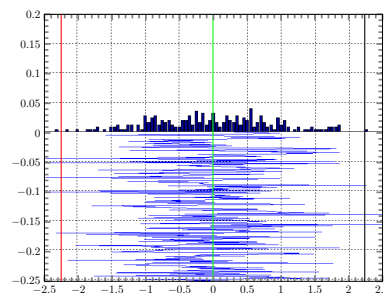
Рис. 15. $N = 1$

Рис. 16. $N = 4$ Рис. 17. $N = 32$

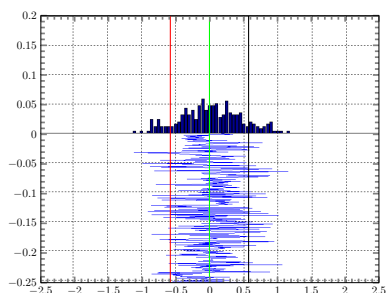
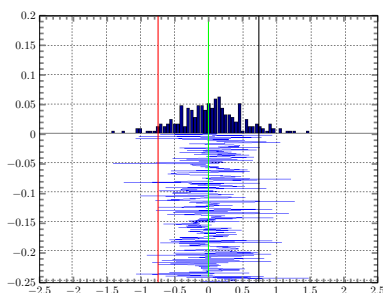
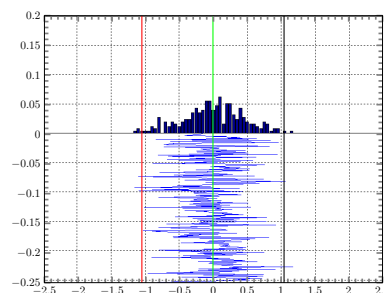
1.6.2. Влияние доверительной вероятности

При заданных времени корреляции $\tau = 10$, времени дискретизации $\Delta t = 1$ получена серия 3×3 гистограмм при разных ширинах окна усреднения $N = 1, 4, 32$ и разных доверительных вероятностях $\beta = 0.8, 0.95, 0.98$:

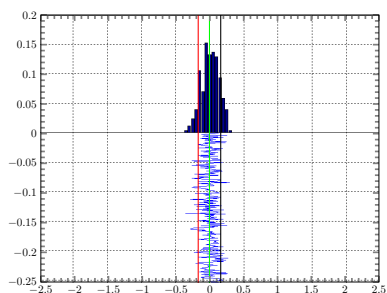
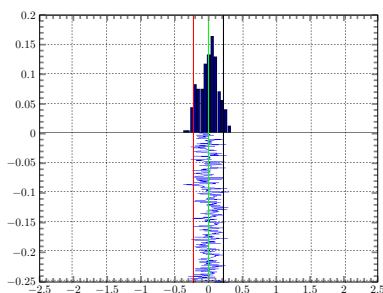
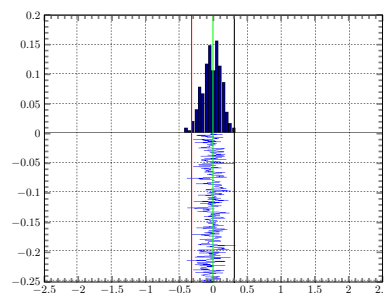
Серия при $N = 1$.

Рис. 18. $\beta = 0.8$ Рис. 19. $\beta = 0.95$ Рис. 20. $\beta = 0.98$

Серия при $N = 4$.

Рис. 21. $\beta = 0.8$ Рис. 22. $\beta = 0.95$ Рис. 23. $\beta = 0.98$

Серия при $N = 32$.

Рис. 24. $\beta = 0.8$ Рис. 25. $\beta = 0.95$ Рис. 26. $\beta = 0.98$

По результатам серии измерений получена зависимость доверительного интервала I от β для разных значений N :

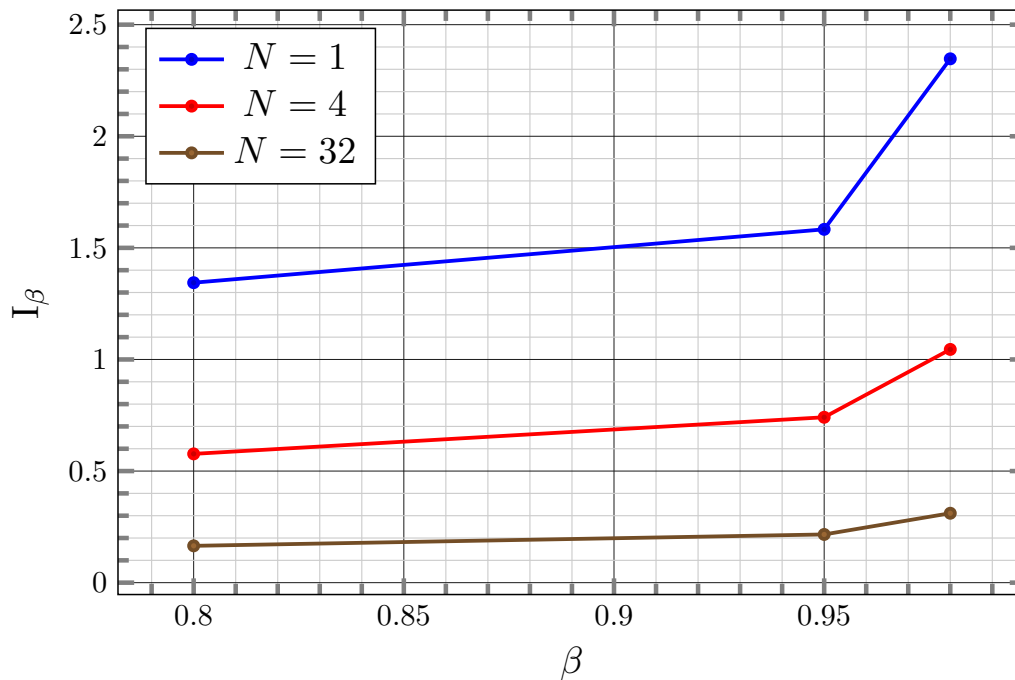


Рис. 27. График зависимости доверительного интервала I от β

Из графика видно, что доверительный интервал растет с ростом β и уменьшается при увеличении окна усреднения ($N \uparrow$).

Заключение

В настоящей работе была изучена тема оценка параметров случайных процессов на примере оценки их средних значений.

С помощью предоставленного кафедрой статистической радиофизики программного обеспечения, позволяющего генерировать и изучать дискретный гауссов шум с заданными характеристиками, получен ряд качественных выводов о поведении сигнала и спектра при изменении различных параметров: объема ансамбля реализаций, ширины окна усреднения, времени дискретизации усреднения, доверительной вероятности, времени корреляции.

Основные качественные результаты – вывод о обратной зависимости времени корреляции и ширины спектра сигнала, о прямой зависимости ширины доверительного интервала и доверительной вероятности.