

Отчет по лабораторной работе №320  
**Дифракций Фраунгофера**

Выполнили студенты 420 группы  
Понур К.А., Сарафанов Ф.Г., Сидоров Д.А.

Нижний Новгород, 2018

# Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретическая часть</b>	<b>2</b>
1.1	Вывод уравнения интенсивностей при дифракции Фраунгофера на решетке	3
1.2	Вывод условия первого минимума видимости	5
<b>2</b>	<b>Результаты эксперимента</b>	<b>6</b>
2.1	Качественные наблюдения	6
2.1.1	Условия эксперимента	6
2.1.2	Изменение $b$	6
2.1.3	Изменение $d$	6
2.1.4	Поворот дифракционной решётки	6
2.1.5	Изменение $\lambda$	6
2.1.6	Изменение длины щели источника	6
2.1.7	Изменение ширины щели источника	7
2.1.8	Порядок следования цветов	7
2.2	Дифракционные картины для разных решёток	8
2.2.1	Дифракция на одной щели	8
2.2.2	Дифракция на двух щелях	9
2.2.3	Дифракция на пятнадцати щелях	10

## 1. Теоретическая часть

В данной работе изучается дифракция на одной щели, двух щелях и на решетке из нескольких щелей. Наблюдения и измерения производятся при помощи гониометра – оптического прибора для измерения углов с большой точностью.

При помощи гониометра изучают угловое распределение интенсивности дифрагированного света. Углы дифракции изменяются оптическим компенсатором (микроскопом с отчетным микрометром).

При дифракции Фраунгофера на щели интенсивность излучения в плоскости  $xy$ , перпендикулярной щели, зависит от угла дифракции по закону

$$I_{\theta} = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \theta}{2}}{\left(\frac{kb \sin \theta}{2}\right)^2}, \quad (1)$$

где  $I_0$ - интенсивность в направлении  $\theta = 0$ ,  $I_{\theta}$ - интенсивность в направлении  $\theta$ ,  $b$ - ширина щели,  $k$ - волновое число.

При дифракции Фраунгофера от решетки с периодом  $d$  из  $N$  одинаковых щелей ширины  $b$  зависимость интенсивность  $I_{\theta}$  описывается формулой

$$I_{\theta} = I_0 \frac{\sin^2 \frac{kb \sin \theta}{2}}{\left(\frac{kb \sin \theta}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{Nkd \sin \theta}{2}}{\sin^2 \frac{kd \sin \theta}{2}} \quad (2)$$

Рассмотрим влияние размеров источника света на вид дифракционной картины при дифракции на двух щелях. В данной работе источником света служит щель коллиматора. Обозначим ширину этой щели  $l$ , а её угловой размер  $\alpha$ . От каждой точки источника на объект дифракции падает плоская волна и создает в фокальной плоскости дифракционную картину. Крайние точки источника  $K$  и  $f$  создают картины, центры которых  $K'$  и  $f'$  смещены относительно друг друга на угловое расстояние  $\alpha$ .

Контрастность дифракционных картин характеризуется видимостью

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (3)$$

где  $I_{max}$ - интенсивность в максимуме,  $I_{min}$ - интенсивность в ближайшем к нему минимуме.

Видимость дифракционной картины от двух щелей зависит от углового размера источника  $\alpha$ . Если яркость источника одинакова по всей ширине, то при увеличении  $\alpha$  первый минимум видимости наступит, когда  $\alpha$  станет равно  $\theta_1$ - угловому расстоянию между ну-

левым и первым максимумами. При малых углах

$$\sin \theta_1 \simeq \theta_1 = \frac{\lambda}{d}, \quad \alpha = \frac{l}{F} \quad (4)$$

здесь  $\lambda$ - длина световой волны источника,  $d$ - фокусное расстояние между щелями на экране,  $F$ - фокусное расстояние линзы коллиматора.

Условие первого минимума имеет вид

$$l = \theta_1 F = \frac{\lambda F}{d} \quad (5)$$

Формула (5) даёт возможность определить ширину источника света по найденному опытным путём расстоянию  $d$  между щелями, при котором наступает размытие дифракционной картины.

Таким был метод, использованный в 1920 г. Майкельсоном для измерения углового расстояния между компонентами двойной звезды Капеллы и диаметра звезды Бетельгейзе.

### 1.1. Вывод уравнения интенсивностей при дифракции Фраунгофера на решетке

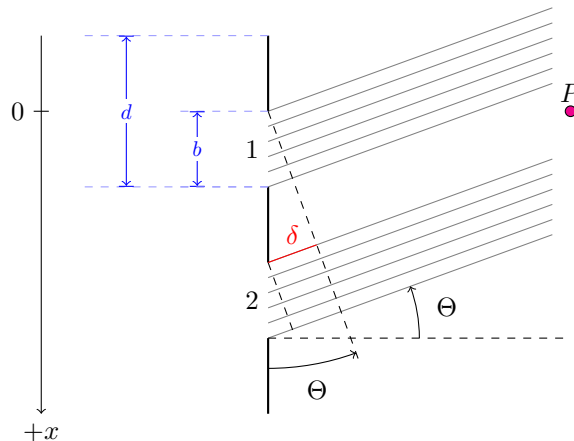


Рис. 1: Caption here

Сначала выведем дифракцию на первой щели, пользуясь принципом Гюйгенса-Френеля.

Пусть на щель падает свет амплитудой  $E_0$ , длиной волны  $\lambda$ . Щель разобьем на бесконечно малые излучатели шириной  $dx$  и с амплитудой излучаемой волны  $\frac{E_0}{b} dx$ .

Набег фазы для каждого такого излучателя относительно излучателя с координатой  $x = 0$  будет  $k\Delta = k \cdot x \sin \Theta$ :

$$d\widehat{E}(x) = \frac{\widehat{E}_0}{b} \cdot \exp(i \cdot kx \sin \Theta) dx \quad (6)$$

Проинтегрируем по всей щели:

$$\widehat{E}_1 = \widehat{E}_0 \int_0^b \frac{1}{i \cdot kb \sin \Theta} \exp(i \cdot kx \sin \Theta) d[i \cdot kx \sin \Theta] = \quad (7)$$

$$= \widehat{E}_0 \frac{\exp(i \cdot kb \sin \Theta) - 1}{i \cdot kb \sin \Theta} = \widehat{E}_0 \exp\left(i \cdot \frac{kb \sin \Theta}{2}\right) \frac{\exp\left(i \cdot \frac{kb \sin \Theta}{2}\right) - \exp\left(-i \cdot \frac{kb \sin \Theta}{2}\right)}{i \cdot kb \sin \Theta} = \quad (8)$$

$$= \widehat{E}_0 \exp\left(i \cdot \frac{kb \sin \Theta}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{kb \sin \Theta}{2}\right) \quad (9)$$

«Спрячем» экспоненту в комплексную амплитуду. Это не повлияет на решение, так как для всех щелей набег фазы в этой экспоненте будет одинаков.

$$\widehat{E}_1 = \widehat{E}_a \operatorname{sinc}\left(\frac{kb \sin \Theta}{2}\right) \quad (10)$$

Теперь рассмотрим сложение волн, пришедших от всех щелей в дифракционной решетке. Нетрудно показать, что набег фазы будет зависеть от номера щели и угла  $\Theta$ :

$$\widehat{E}_m = \widehat{E}_1 \exp(i \cdot k(m-1)d \sin \Theta), \quad (11)$$

где  $m$  – номер щели.

Тогда можем записать сумму волн:

$$\widehat{E}(\Theta) = \widehat{E}_1 (1 + \exp(i \cdot kd \sin \Theta) + \dots + \exp(i \cdot k(N-1)d \sin \Theta)) \quad (12)$$

Второй множитель здесь – решеточный множитель, который дает постоянный сдвиг фазы и множитель вида  $\sin Nx / \sin x$ . Нетрудно показать, что тогда

$$\widehat{E}(\Theta) \sim \widehat{E}_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{kb \sin \Theta}{2}\right) \left[ \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \Theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \Theta}{2}\right)} \right] \quad (13)$$

И тогда окончательный результат:

$$I(\Theta) = I_0 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{kb \sin \Theta}{2}\right) \left[ \frac{\sin\left(\frac{Nkd \sin \Theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd \sin \Theta}{2}\right)} \right]^2 \quad (14)$$

## 1.2. Вывод условия первого минимума видимости

Полосы на экране будут видны достаточно отчётливо, пока расстояние между полосами  $\Delta x$  будет меньше  $\delta x$ .  $\delta x$  связана с линейным размером источника  $l$  соотношением

$$\delta x = \frac{dl}{F} \quad (15)$$

Угловой размер источника:

$$\alpha = \frac{l}{F} \quad (16)$$

Угловая ширина полос:

$$\theta = \frac{\lambda}{d} \quad (17)$$

Тогда при  $\alpha < \theta$  картина будет видна достаточно отчетливо. Отсюда получаем условие первого минимума видимости

$$l = \frac{\lambda F}{d} \quad (18)$$

## 2. Результаты эксперимента

### 2.1. Качественные наблюдения

#### 2.1.1 Условия эксперимента

Изначально свет идет от лампочки накаливания, размер спиральки которой 3 мм.

#### 2.1.2 Изменение $b$

С изменением ширины щели решетки – уменьшением  $b$  картинка расширяется, увеличивается расстояние между максимумами

#### 2.1.3 Изменение $d$

Экспериментально было установлено, что с изменением периода решетки (уменьшением  $d$ ) картинка расширяется, увеличивается расстояние между максимумами

Теоретически это нетрудно обосновать. Рассмотрим решёточный множитель в формуле (14). Функция имеет минимумы в точках

$$\sin \theta_m = \frac{\lambda m}{Nd}, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{Nd}{\lambda}. \quad (19)$$

Таким образом, при уменьшении  $d$  увеличивается расстояние между максимумами.

#### 2.1.4 Поворот дифракционной решётки

С увеличением угла, под которым расположена дифракционная решетка картина расширяется

#### 2.1.5 Изменение $\lambda$

Для красного ширина центрального максимума шире, чем для зеленого. Полушириной центрального максимума будем называть угловое расстояние от  $\theta = 0$  до ближайшего минимума. Тогда

$$\theta_0 = \arcsin \frac{\lambda}{Nd} \quad (20)$$

То есть при увеличении длины волны картинка расширяется. Что мы и наблюдали в эксперименте.

#### 2.1.6 Изменение длины щели источника

Дифракционная картина при изменении длины щели источника не изменяется.

### 2.1.7 Изменение ширины щели источника

Таблица 1: Показания микрометра щели источника и ширина щели для разных дифракционных картин: З–щель закрыта, Ч–чёткая дифракционная картина, Р–размытая дифракционная картина

З, $z$ , мм·10 <sup>-2</sup>	Ч, $z$ , мм·10 <sup>-2</sup>	Р, $z$ , мм·10 <sup>-2</sup>	Ч, $\Delta x$ , мм·10 <sup>-2</sup>	Р, $\Delta x$ , мм·10 <sup>-2</sup>
7	10	18	3	11

### 2.1.8 Порядок следования цветов

Распределение цветов при дифракции в белом свете: СЗЖК



## 2.2. Дифракционные картины для разных решёток

### 2.2.1 Дифракция на одной щели

Таблица 2:  $b = 0.52$  мм,  $N = 1$ , по минимумам

N	$\theta^\circ$	$\theta'$	$\theta''$	$\Delta\theta^\circ$	$\Delta\theta'$	$\Delta\theta''$	$\Delta\theta, ''$	погрешность, ''	sec3
3	275	71	28	0	0	0	0	0	749.00
2	275	67	22	0	4	6	246	31	503.00
1	275	63	8	0	4	14	254	32	249.00
-1	275	54	50	0	9	-42	498	62	-249.00
-2	275	50	39	0	4	11	251	31	-500.00
-3	275	46	31	0	4	8	248	31	-748.00

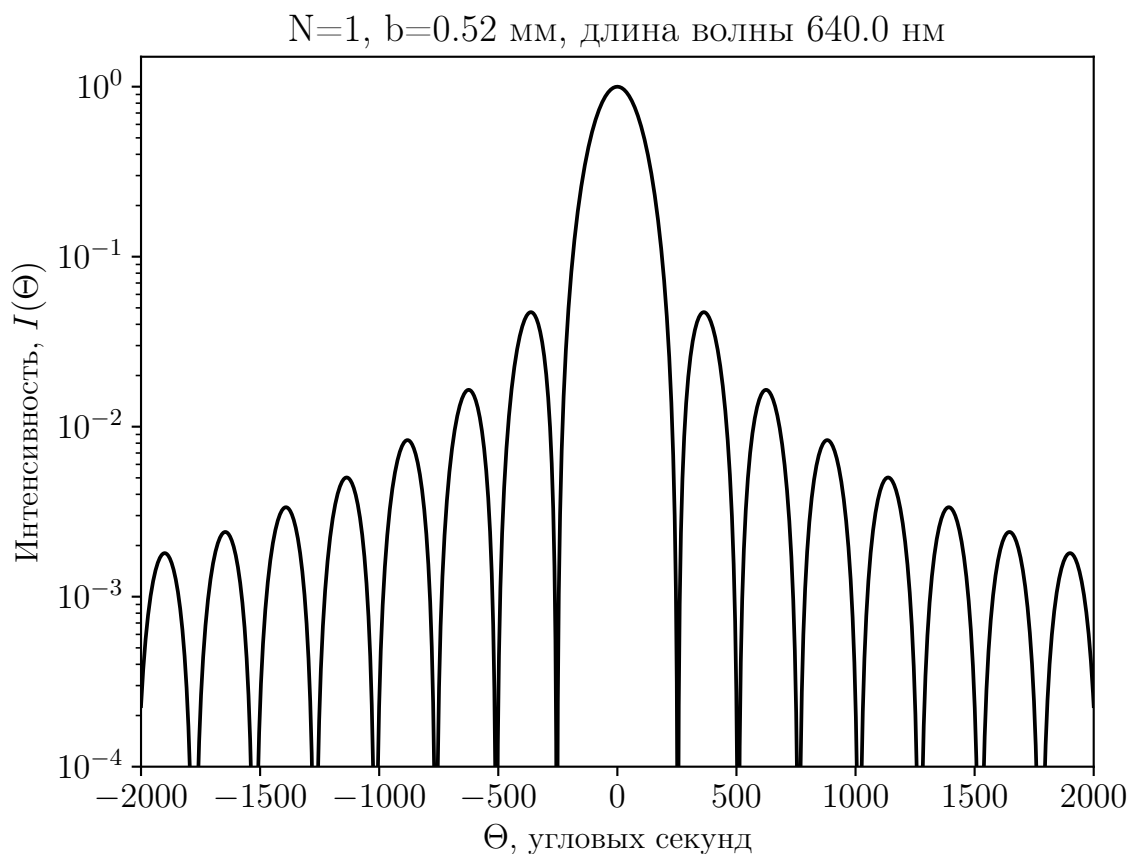


Рис. 2: Теоретический вид распределения интенсивности, дифракция на одной щели

### 2.2.2 Дифракция на двух щелях

Таблица 3:  $b = 0.52$  мм,  $d = 1.5$  мм,  $N = 2$ , по минимумам

N	$\theta^\circ$	$\theta'$	$\theta''$	$\Delta\theta^\circ$	$\Delta\theta'$	$\Delta\theta''$	$\Delta\theta, ''$	погрешность, ''	sec3
6	275	50	26	0	0	0	0	0	398.99
5	275	49	6	0	1	20	80	10	318.98
4	275	48	19	0	1	-13	47	6	271.99
3	275	47	40	0	1	-21	39	5	232.99
2	275	45	59	0	2	-19	101	13	131.99
1	275	44	30	0	1	29	89	11	43.00
-1	275	43	7	0	1	23	83	10	-40.02
-2	275	41	38	0	2	-31	89	11	-129.01
-3	275	39	58	0	2	-20	100	13	-229.00
-4	275	39	13	0	0	45	45	6	-274.02
-5	275	38	30	0	1	-17	43	5	-317.00
-6	275	37	13	0	1	17	77	10	-394.03

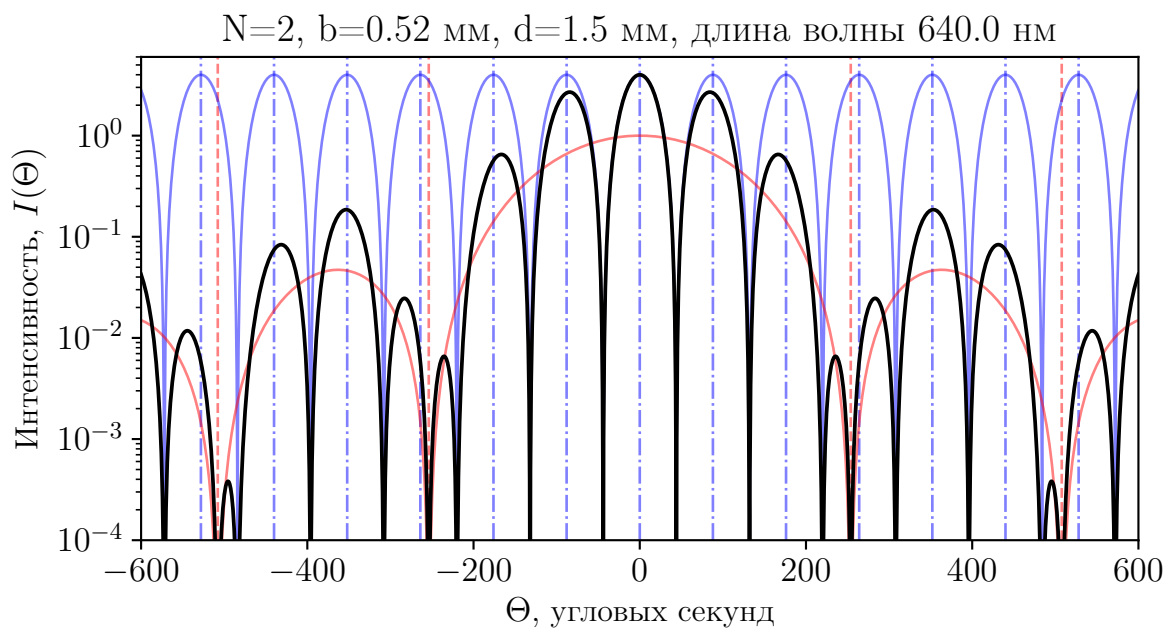


Рис. 3: Теоретический вид распределения интенсивности, дифракция на двух щелях

### 2.2.3 Дифракция на пятнадцати щелях

Таблица 4:  $b = 1$  мм,  $d = 2$  мм,  $N = 15$ , по максимумам

N	$\Theta^\circ$	$\Theta'$	$\Theta''$	$\Delta\Theta^\circ$	$\Delta\Theta'$	$\Delta\Theta''$	$\Delta\Theta, ''$	погрешность, ''	sec3
-1	275	52	17	0	0	0	0	0	73.00
0	275	51	4	0	1	13	73	9	0.00
1	275	49	59	0	2	-55	65	8	-65.00

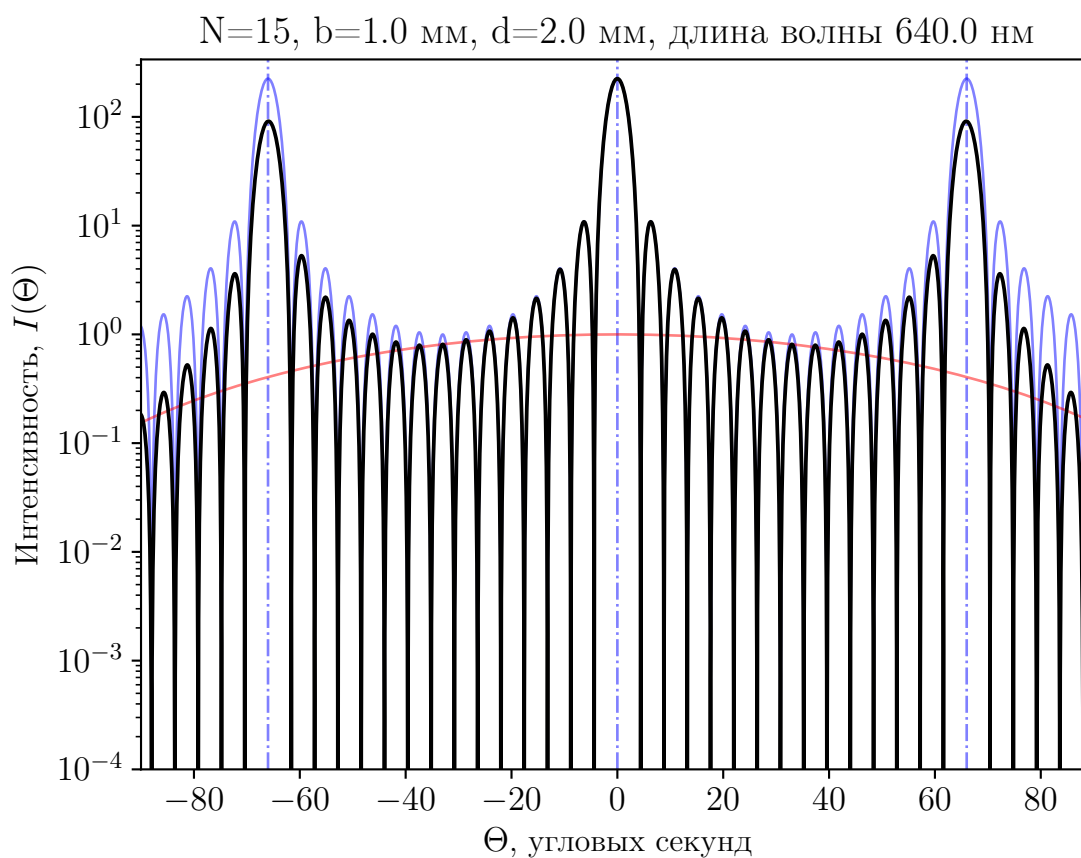


Рис. 4: Теоретический вид распределения интенсивности, дифракция на пятнадцати щелях