

Отчет по лабораторной работе №217  
**Исследование колебательных процессов в  
электрическом контуре**

Выполнили студенты 420 группы  
Понур К.А., Сарафанов Ф.Г., Сидоров Д.А.

Нижний Новгород, 2018

# Содержание

<b>1</b>	.....	<b>2</b>
1.1	Введение .....	2
1.2	Собственные колебания в электрическом контуре .....	3
1.3	Декремент затухания. Добротность .....	3
1.4	Фазовая плоскость .....	4
1.5	Вынужденные колебания в электрическом контуре .....	4
1.6	Резонансные кривые .....	5
<b>2</b>	<b>Экспериментальная часть</b> .....	<b>7</b>
2.1	Исследование свободных колебаний .....	7
2.1.1	Декремент затухания и добротность контура .....	7
2.1.2	Фазовые траектории при различных $R$ .....	8
2.2	Исследование вынужденных колебаний .....	8
2.3	Исследование процессов установления вынужденных колебаний .....	10
<b>3</b>	<b>Заключение</b> .....	<b>10</b>

# 1.

## 1.1. Введение

Цель работы – экспериментальное исследование колебательных процессов в линейном осцилляторе с потерями. В качестве осциллятора используется электрический контур, состоящий из последовательно соединенных катушки индуктивности  $L$ , конденсатора  $C$ , резистора  $R$  и внешнего источника ЭДС  $\varepsilon$ . Дифференциальное уравнение, описывающее процессы в исследуемом контуре, имеет следующий вид:

$$q'' + 2\delta q' + \omega_0 q = f(t), \quad (1)$$

где  $q$  – заряд на конденсаторе,  $\delta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – собственная частота контура,  $f(t) = \frac{\varepsilon(t)}{L}$  – "вынуждающая сила  $\varepsilon(t)$  – внешняя ЭДС.

С математической точки зрения уравнение (1) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение такого уравнения, как известно, можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0 q = 0 \quad (2)$$

и частного решения неоднородного. Уравнение (2) описывает поведение осциллятора в отсутствие внешней ЭДС, т.е. так называемые собственные (свободные) колебания, а частное решение неоднородного уравнения (1) (в случае периодического внешнего воздействия) – вынужденные колебания. Исследованию этих двух режимов и уделяется основное внимание в работе. Кроме того, лабораторная установка позволяет наблюдать некоторые переходные процессы, в частности процессы установления колебаний.

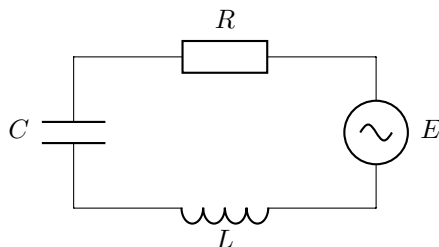


Рис. 1

## 1.2. Собственные колебания в электрическом контуре

При анализе решения уравнения (2) удобно выделить три случая:  $\delta > \omega_0$ ,  $\delta < \omega_0$ ,  $\delta = \omega_0$ . В случае достаточно слабого затухания, когда  $\delta < \omega_0$  общее решение уравнения (2) можно представить в виде

$$q = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_s t + \varphi), \quad (3)$$

где  $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ , а  $A_0$  и  $\varphi$  – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Процесс вида (3) называют затухающими квазигармоническими колебаниями. Если  $\delta \ll \omega_0$ , то выличину  $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$  можно считать медленно меняющейся амплитудой, а  $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$  – "периодом" этих колебаний. В отсутствие затухания ( $\delta = 0$ ) решение уравнения (2) можно представить в виде

$$q = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (4)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  зависят от начальных условий, а

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (5)$$

Процесс, описываемый формулой (4), называется аperiодическим.

Условие  $\delta = \omega_0$  определяет критический режим колебаний, а соответствующее этому условию сопротивление называется критическим сопротивлением контура:  $R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . На практике используется также характеристическое (волновое) сопротивление контура:  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

## 1.3. Декремент затухания. Добротность

Логарифмическим декрементом затухания  $d$  называется логарифм отношения значений заряда  $q$  на пластинах конденсатора в двух последовательных ( $n$ -ом и  $(n + 1)$ -ом) максимумах:

$$d = \ln \frac{q_n}{q_{n+1}} = \delta T \quad (6)$$

Поскольку, как видно из выражения (3),  $\delta$  есть величина, обратная промежутку времени  $\tau$ , за которое амплитуда колебаний спадает в  $e$  раз, то можно определить число колебаний  $N$ , совершившихся за это время:

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\delta T} = \frac{1}{d} \quad (7)$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания  $d$  есть величина, обратная чис-

ду колебаний  $N$ . в течение которых амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. Часто для характеристики затухания удобнее использовать не  $N$ . а величину в  $\pi$  раз большую - добротность контура  $Q = \pi N$ .

При малом затухании ( $\delta \ll \omega_0$ ) частота собственных колебаний  $\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0$ . При этом добротность контура и его логарифмический декремент затухания можно выразить через параметры контура  $L$ ,  $C$ ,  $R$  следующим образом:

$$d = \frac{\pi R}{\omega_0 L} = \pi RC\omega_0 = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (8)$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

Необходимо иметь в виду, что во всех этих выражениях под следует понимать сопротивление, эквивалентное всем потерям в контуре. Дополнительные потери при прохождении переменного тока могут быть вызваны гистерезисом и токами Фуко в сердечнике катушки индуктивности, токами утечки и процессами поляризации в диэлектрике конденсатора.

#### 1.4. Фазовая плоскость

Процессы в колебательном контуре удобно изображать на так называемой фазовой плоскости, где по оси абсцисс откладывают заряд  $q$ , а по оси ординат величину, пропорциональную току. например  $\frac{\dot{q}}{\omega_0}$  (это величины одной размерности). Каждому состоянию колебательного контура, характеризуемому мгновенными значениями  $q$  и  $\dot{q}$ , соответствует точка на фазовой плоскости (изображающая точка). Изменение состояния вызывает перемещение изображающей точки по фазовой плоскости. Линия, описываемая изображающей точкой, называется фазовой траекторией. Совокупности движений с разными начальными условиями соответствует семейство фазовых траекторий. Например, гармоническим колебаниям в контуре без затухания на фазовой плоскости соответствует семейство окружностей с общим центром в начале координат. Свободные затухающие колебания в контуре изображаются фазовыми траекториями в виде скручивающихся к началу координат спиралей.

#### 1.5. Вынужденные колебания в электрическом контуре

Колебания в контуре под действием внешней гармонической силы описывается уравнением

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = F_0 \cos \omega t \quad (10)$$

Решение этого уравнения, соответствующее установившемуся режиму, имеет вид

$$q(t) = B(\omega) \cos \omega t + \psi, \quad (11)$$

где амплитуда  $B(\omega)$  и фаза  $\psi$  определяются следующим образом:

$$B(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (12)$$

$$\tan \psi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (13)$$

Используя формулы (11), (12), (13) и учитывая, что  $F - 0 = \frac{\varepsilon_0}{L}$  Нетрудно получить выражения для амплитуды тока в контуре

$$I_0 = \omega B(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (14)$$

и для амплитуд напряжений на отдельных элементах контура

$$U_L = I_0 \omega L = \frac{\omega L \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (15)$$

$$U_C = \frac{I_0}{\omega C} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (16)$$

$$U_R = I_0 R = \frac{\varepsilon_0 R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (17)$$

## 1.6. Резонансные кривые

Резонансная кривая для индуктивности

$$U_L = \frac{\omega L \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\omega \varepsilon_0}{\sqrt{(\frac{R}{L})^2 + (\omega - \frac{1}{\omega LC})^2}} = \frac{\omega \varepsilon_0}{\sqrt{(\frac{\omega_0}{Q})^2 + (\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega})^2}} \quad (18)$$

$$U_L = \frac{\omega^2 \varepsilon_0}{\sqrt{\omega^2 (\frac{\omega_0}{Q})^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (19)$$

Резонансная кривая для конденсатора

$$U_C = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\varepsilon_0 \omega_0 Q}{\omega \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega})^2}} = \frac{\varepsilon_0 \omega_0^2}{\sqrt{\frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (20)$$

Резонансная кривая для резистора

$$U_R = \frac{\varepsilon_0 \omega \omega_0}{\sqrt{\omega^2 \omega_0^2 + Q^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad (21)$$

Отсюда путем дифференцирования найдены максимумы резонансных кривых и резонансные частоты:

$$U_L^* = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (22)$$

$$\omega_L^* = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad (23)$$

$$U_C^* = \frac{\varepsilon_0 Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (24)$$

$$\omega_C^* = \frac{\omega_0}{\sqrt{2Q}} \sqrt{2Q^2 - 1} \quad (25)$$

$$U_R^* = \varepsilon_0 \quad (26)$$

$$\omega_R^* = \omega_0 \quad (27)$$

## 2. Экспериментальная часть

### 2.1. Исследование свободных колебаний

#### 2.1.1 Декремент затухания и добротность контура

На установке рассмотрены осциллограммы  $U_c(t)$  и  $I(t)$  при нескольких сопротивлениях контура  $R$ .

Получили декремент затухания  $d$  для различных  $R$ :

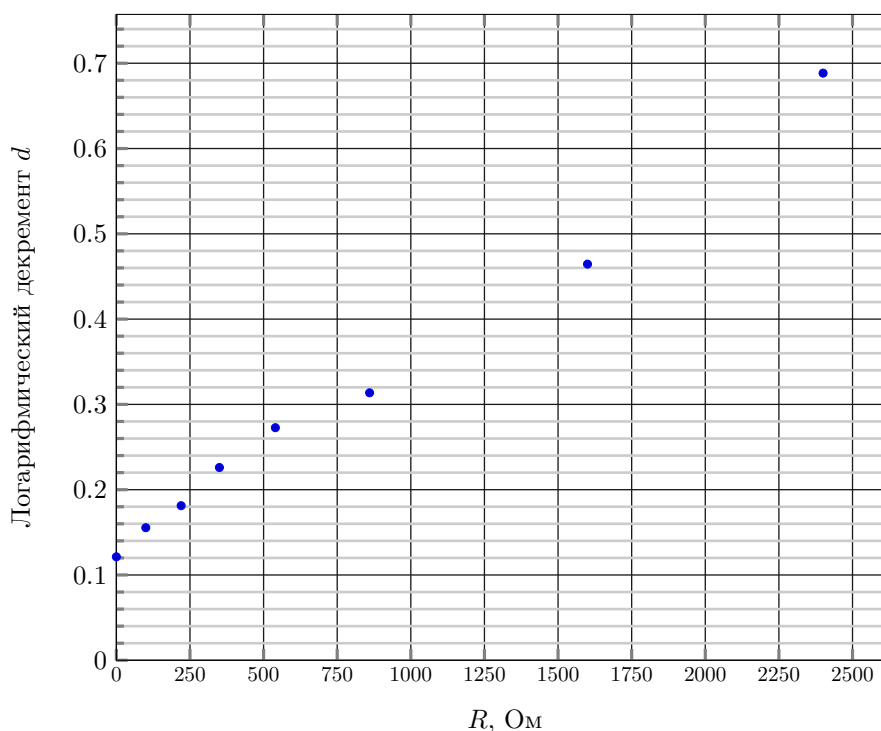


Рис. 2: Зависимость декремента затухания от сопротивления контура

Из эксперимента получили значение  $L$  при  $R = 2400$  Ом:

$$L = \frac{R}{2\delta} = \frac{RT}{2d} = \frac{2400 \cdot 0.4 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0.688} = 0.708 \text{ Гн} \quad (28)$$

Откуда можно вычислить критическое сопротивление контура:

$$R_k = 2\frac{L}{C} = 20407 \text{ Ом} \approx 20 \text{ кОм} \quad (29)$$

Коэффициент затухания:

$$\delta = \frac{R}{2L} = 1694.91 \text{ рад/с} \quad (30)$$



И добротность:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 4.25 \quad (31)$$

### 2.1.2 Фазовые траектории при различных $R$

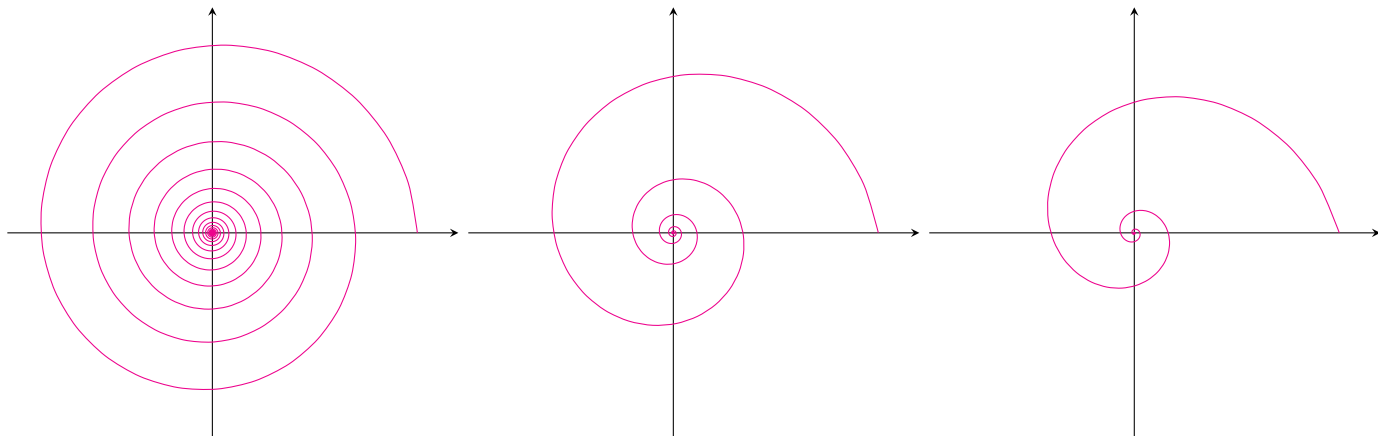
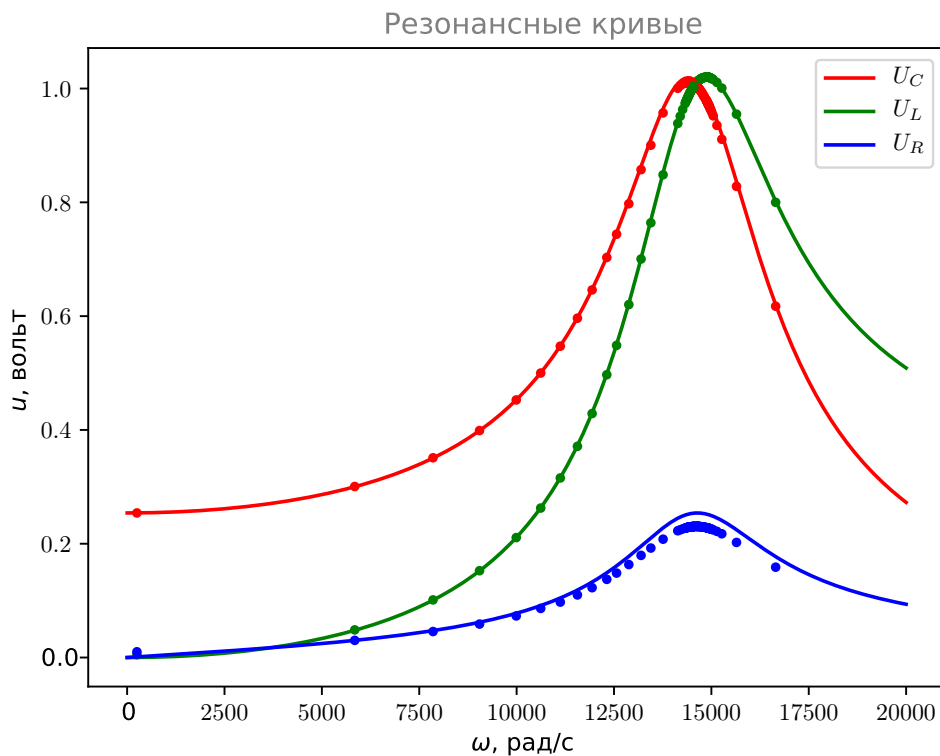
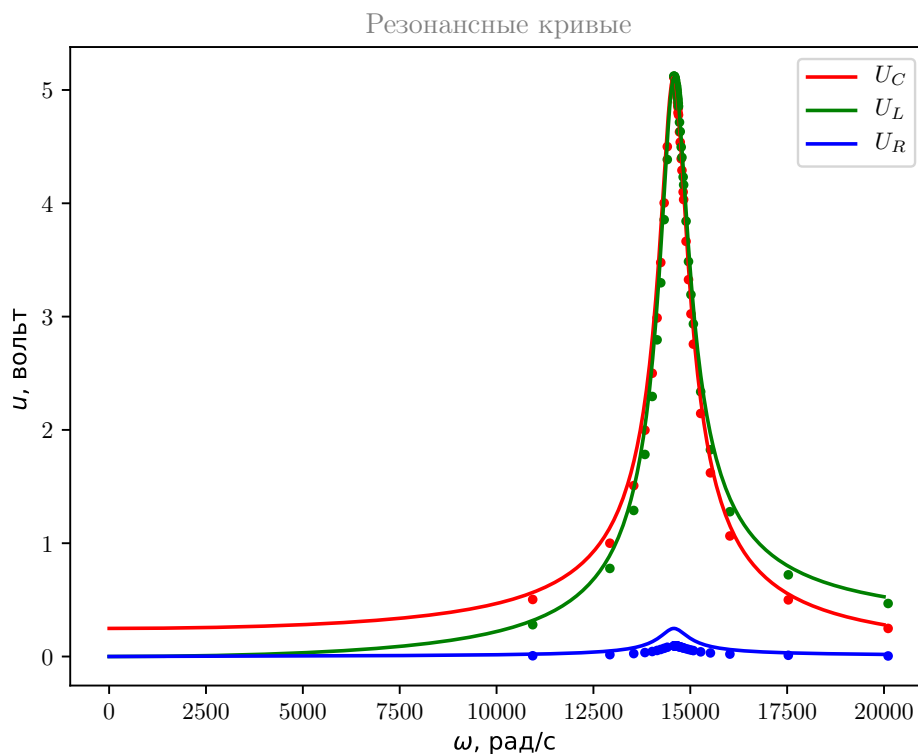


Рис. 3: Фазовые траектории

## 2.2. Исследование вынужденных колебаний





При значении  $R = 100$  Ом получены следующие данные:

$$\nu_0 = \nu_0^C = \nu_0^R = 2330 \text{ Гц} \quad (32)$$

При значении  $R = 2400$  Ом получены следующие данные:

$$\nu_0 = 2330 \text{ Гц} \quad (33)$$

$$\nu_0^C = 2293 \text{ Гц} \quad (34)$$

$$\nu_0^R = 2369 \text{ Гц} \quad (35)$$

Из графика  $R = 2400$  Ом рассчитываются (считая точно известной ёмкость конденсатора)

$$R = 2524.94 \text{ Ом} \quad (36)$$

$$L = 0.686 \text{ Гн} \quad (37)$$

Можно рассчитать добротность контура тремя способами.

Считая известными параметры установки:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 4.25 \quad (38)$$

Используя резонансное соотношение  $\max(U_c) = Q \cdot \varepsilon_0$ :

$$Q = 3.98 \quad (39)$$

И измерением ширины резонансной кривой ( $\Delta\omega = 3802$  рад/с):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = 3.85 \quad (40)$$

### **2.3. Исследование процессов установления вынужденных колебаний**

## **3. Заключение**