

Отчет по лабораторной работе №22
**Определение коэффициента внутреннего трения
(вязкости) жидкости**

Выполнил студент 410 группы
Сарафанов Ф.Г.

Нижний Новгород, 2016

Содержание

1. Оборудование	3
2. Движение шарика в бесконечной вязкой среде	4
2.1. Путь установления и установившаяся скорость	5
3. Влияние стенок сосуда	5
4. Экспериментальные данные	7
5. Вязкость глицерина	10
5.1. Зависимость пути от времени	11
5.2. Зависимость скорости от пути	14
Заключение	17
Ответы на вопросы	18

Введение

Вязкостью или внутренним трением называется явление возникновения силы трения между слоями текущей жидкости или газа, параллельными направлению течения.

При течении жидкости слой, прилегающий к стенке цилиндра с жидкостью прилипает так, что его скорость становится равна нулю. Следующий слой движется, но из-за хаотичного перемещения молекул некоторые из них попадают в первый слой, теряя импульс при столкновении.

Третий слой передает импульс второму и т.д. В результате этого наибольшей скоростью обладает та часть жидкости, которая более всего удалена от стенки – радиальная ось сосуда, а скорости всех остальных слоев уменьшаются по мере приближения к стенке.

При ламинарном течении жидкости скорость в цилиндре зависит от радиуса по квадратичному закону (распределение по параболе):

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (1)$$

где r – расстояние от радиальной оси, R – радиус сосуда, v_0 – максимальная скорость в потоке жидкости.

Так как изменение импульса в единицу времени равно силе, то это и приводит к появлению силы внутреннего трения. Такая сила трения может описываться **законом вязкости Ньютона**:

$$F = -\eta \frac{\partial v}{\partial n} S, \quad (2)$$

Вязкости жидкостей значительно отличаются от вязкостей газов, много больше по величине и резко уменьшаются с повышением температуры (тогда как для газов увеличиваются).

Целью настоящей работы является определение коэффициента вязкости разведенного глицерина одним из методов – методом Стокса.

Стокс вывел формулу для силы сопротивления $F_{\text{тр}}$, действующей на твёрдый шар при его медленном равномерном движении в неограниченной вязкой жидкости. Эта формула имеет вид:

$$F_{\text{тр}} = 6\pi r \eta v \quad (3)$$

где r и v – радиус и скорость шара, η – динамический коэффициент вязкости жидкости.

1. Оборудование

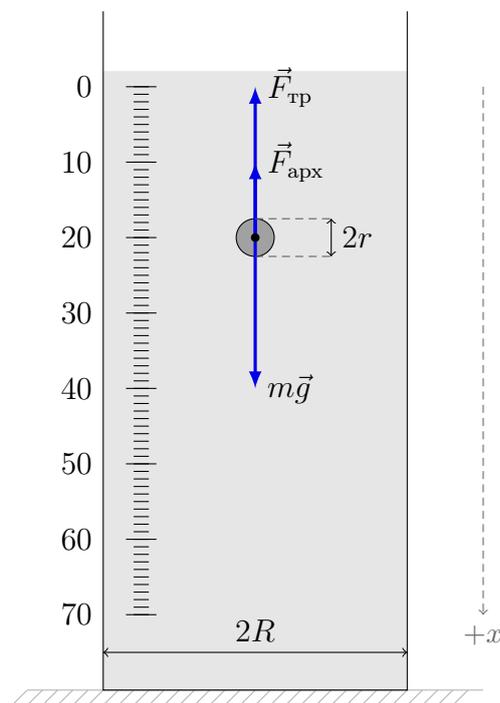


Рис. 1: Рисунок установки к задаче о движении в вязкой жидкости

Для проведения опытов используется стеклянный цилиндрический сосуд радиусом $R = 4.63$ см со шкалой (рис. 1).

В сосуде находится глицерин с замеренной плотностью $\rho = 1.22$ г/см³.

В глицерин на небольшом погружении (порядка 1–2 см) до 0 на шкале погружается, удерживаемый пинцетом, шарик.

Шарик отпускается без начальной скорости по центру сосуда, чтобы минимизировать влияние стенок сосуда.

В эксперименте использовались стальной и пластмассовый шарики, замеренные микрометром.

Таблица 1: Размеры шариков

МАТЕРИАЛ	d_1 , мм	d_2 , мм	d_3 , мм	Δd , мм	$\langle d \rangle$	$\langle r \rangle$	m , г
сталь	3.97	4.02	4.05	$1 \cdot 10^{-2}$	4.01	2	0.27
пластмасса	5.89	5.9	5.95	$1 \cdot 10^{-2}$	5.91	2.45	0.24

Незадолго до освобождения шарика включается видеокамера с минимальной частотой съемки $\omega = 20$ Гц, движимая примерно параллельно шарик.

2. Движение шарика в бесконечной вязкой среде

При движении на шарик действуют три силы: сила внутреннего трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_{\text{арх}}$ (рис. 1).

Запишем II закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{арх}}$ (4)

Где сила Стокса $F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r v$ (5)

В проекции на x : $ma = mg - 6\pi\eta r v - \rho_{\text{жид}}gV$ (6)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, m = \rho_{\text{шар}}V \quad (7)$$

Перепишем (6): $ma = mg - 6\pi\eta r v - \rho_{\text{жид}}gV$ (8)

Введем константу k : $k = 6\pi\eta r \cdot \frac{1}{V\rho_{\text{шар}}} = \frac{6\pi\eta r}{m}$ (9)

$$\rho_{\text{шар}}V \frac{dv}{dt} = gV(\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}) - kv \cdot V\rho_{\text{шар}} \quad (10)$$

$$\frac{dv}{g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv} = dt \quad (11)$$

Замена переменной: $c = g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv$ (12)

$$dc = -k dv \quad (13)$$

$$-\frac{1}{k} \int_{g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv_0}^{g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv(t)} \frac{dc}{c} = \int_0^t dt \quad (14)$$

$$\ln \left(\frac{g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv(t)}{g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv_0} \right) = -kt \quad (15)$$

$$\frac{g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv(t)}{g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv_0} = e^{-kt} \quad (16)$$

$$g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv(t) = e^{-kt} \left(g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} - kv_0 \right) \quad (17)$$

$$kv(t) = e^{-kt} kv_0 - e^{-kt} g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} + g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} \quad (18)$$

$$kv(t) = g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} (1 - e^{-kt}) + e^{-kt} kv_0 \quad (19)$$

$$v(t) = g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\rho_{\text{шар}}} \frac{1 - e^{-kt}}{k} + e^{-kt} v_0 \quad (20)$$

$$v(t) = V g \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{6\pi\eta r} (1 - e^{-kt}) + e^{-kt} v_0 \quad (21)$$

$$v(t) = \frac{2}{9}gr^2 \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\eta} \cdot (1 - e^{-kt}) + e^{-kt}v_0, \text{ где } k = \frac{6\pi\eta r}{m}. \quad (22)$$

$$s(t) = \int_0^{s(t)} v(t) dt = \frac{2}{9}gr^2 \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\eta} \cdot \left(\frac{e^{-kt}}{k} + t\right) - \frac{e^{-kt}v_0}{k} \quad (23)$$

2.1. Путь установления и установившаяся скорость

Для движения без начальной скорости

$$v(t) = \frac{2}{9}gr^2 \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\eta} \cdot (1 - e^{-kt}) \quad (24)$$

$$s(t) = \frac{2}{9}gr^2 \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\eta} \cdot \left(\frac{e^{-kt}}{k} + t\right) \quad (25)$$

$$1 - e^{-kt^*} = \alpha = 0.95 \quad (26)$$

$$e^{-kt^*} = \beta = 0.05 \quad (27)$$

$$-kt^* = \ln \beta \quad (28)$$

$$t^* = -\frac{1}{k} \ln \beta = -\frac{m}{6\pi\eta r} \ln \beta \quad (29)$$

$$s^* = \frac{2}{9}gr^2 \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\eta} \cdot \left(\frac{\beta - \ln \beta}{k}\right) = \frac{m}{27\pi} gr \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\eta^2} (\beta - \ln \beta) \quad (30)$$

t^* – время установления, когда скорость будет отличаться от установившейся $v_{\text{уст}}$ на бесконечности не более чем в α раз.

s^* – соответственно путь установления, когда скорость отличается от установившейся $v_{\text{уст}}$ на бесконечности не более чем в α раз.

$$v_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{9}gr^2 \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\eta} \cdot (1 - e^{-kt}) \right] = \frac{2}{9}gr^2 \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\eta} \quad (31)$$

3. Влияние стенок сосуда

Условие бесконечной среды, заложенное в решении силы Стокса, не может быть соблюдено экспериментально, и попытки проверки формулы Стокса обнаружили заметное влияние стенок сосуда.

Частный случай движения в конечном цилиндре был рассмотрен Ладенбургом, который вывел поправки на влияние радиуса R и высоты H цилиндра:

$$F = F_{\text{стокса}} \cdot \left(1 + 2.4 \frac{r}{R}\right) \cdot \left(1 + 3.3 \frac{r}{H}\right) \quad (32)$$

Нетрудно показать существование такой поправки.

Рассмотрим случай, когда жидкость бесконечна. Имеем невозмущенное решение Стокса

$$F = 6\pi\eta rv \quad (33)$$

Будем постепенно уменьшать радиус сосуда. Ясно, что при его уменьшении будет оказывать влияние явление прилипания крайних слоев жидкости к стенкам сосуда – тормозящая сила увеличится.

Ясно, что в пределах размеров, много больших размеров молекул жидкости, безразлично, какое действие совершать: увеличивать радиус сосуда или во столько же уменьшать радиус шарика. Эти действия подобны.

Тогда введем коэффициент $p = \frac{r}{R}$ – малый параметр.

Новую силу можно записать в виде

$$F = 6\pi\eta rv \cdot \alpha, \quad (34)$$

где α зависит от малого параметра p и при параметре, стремящемся к 0, стремится к невозмущенному решению (33).

Тогда можем разложить $\alpha(p)$ в ряд Тейлора по малому параметру:

$$\alpha(p) = 1 + Ap + Bp^2 + \dots \quad (35)$$

Так как p мало, можем пренебречь высшими степенями. Тогда поправка примет вид

$$F = 6\pi\eta rv \cdot \left(1 + A\frac{r}{R}\right) \quad (36)$$

Ясно, что аналогичные рассуждения возможны для малого параметра $\frac{r}{H}$. Тогда сила Стокса примет вид:

$$F = F_{\text{стокса}} \cdot \left(1 + A\frac{r}{R}\right) \cdot \left(1 + B\frac{r}{H}\right) \quad (37)$$

4. Экспериментальные данные

S , см	t , с	v , см/с	S , см	t , с	v , см/с	S , см	t , с	v , см/с
0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.78	6.39	5	0.87	5.78	5	0.83	6
10	1.49	6.69	10	1.6	6.25	10	1.53	6.52
15	2.21	6.79	15	2.27	6.62	15	2.27	6.62
20	2.88	6.95	20	2.97	6.75	20	2.93	6.82
25	3.61	6.93	25	3.63	6.89	25	3.57	7.01
30	4.3	6.98	30	4.3	6.98	30	4.23	7.09
35	4.98	7.03	35	5	7	35	4.93	7.1
40	5.77	6.93	40	5.63	7.1	40	5.67	7.06
45	6.43	7	45	6.4	7.03	45	6.4	7.03
50	7.11	7.03	50	7.1	7.05	50	7.1	7.05
55	7.81	7.04	55	7.83	7.02	55	7.86	6.99
60	8.57	7	60	8.6	6.98	60	8.63	6.95
65	9.33	6.97	65	9.36	6.94	65	9.36	6.94
70	10.09	6.94	70	10.16	6.89	70	10.13	6.91

Таблица 2: Пластмассовые шарики

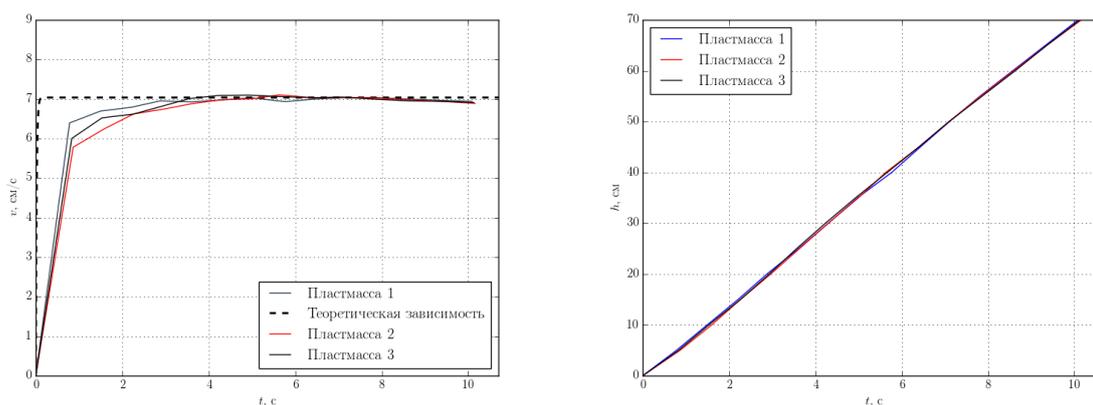


Рис. 2: Зависимости пути от времени и скорости от времени для пластмассовых шариков (эскизы)

S , см	t , с	v , см/с	S , см	t , с	v , см/с	S , см	t , с	v , см/с
0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.3	16.67	5	0.37	13.62	5	0.31	15.92
10	0.53	18.76	10	0.63	15.8	10	0.57	17.64
15	0.83	19.63	15	0.87	17.3	15	0.83	18.01
20	1.03	19.65	20	1.1	18.18	20	1.07	18.74
25	1.23	20.28	25	1.33	18.75	25	1.3	19.23
30	1.43	20.94	30	1.58	19.04	30	1.53	19.57
35	1.7	20.59	35	1.81	19.31	35	1.77	19.82
40	1.93	20.69	40	2.07	19.36	40	2	20
45	2.2	20.46	45	2.3	19.57	45	2.23	20.15
50	2.43	20.55	50	2.55	19.64	50	2.5	20.01
55	2.7	20.38	55	2.81	19.58	55	2.73	20.12
60	2.98	20.14	60	3.07	19.57	60	3	20.01
65	3.23	20.11	65	3.33	19.51	65	3.23	20.11
68	3.4	20.01	70	3.57	19.63	70	3.5	20.01

Таблица 3: Стальные шарики

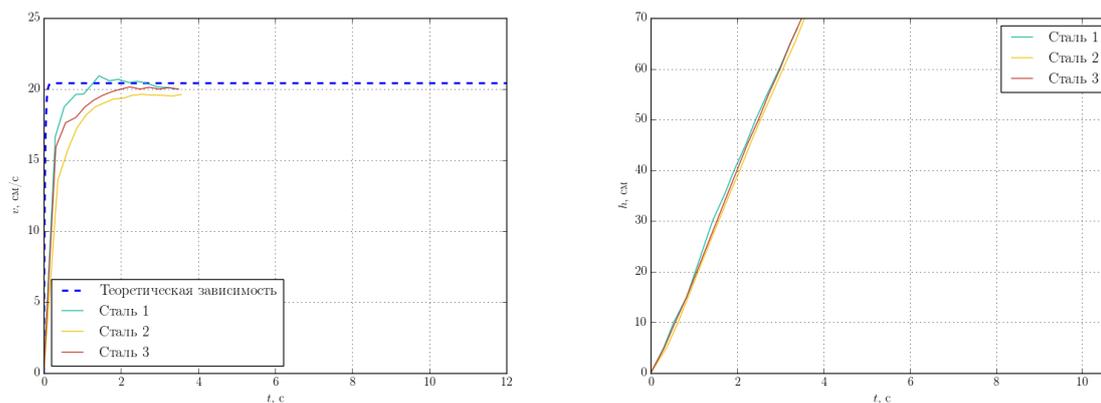


Рис. 3: Зависимости пути от времени и скорости от времени для стальных шариков (эскизы)

S , см	t , с	v , см/с	S , см	t , с	v , см/с
0	0	0	0	0	0
1	$6.7 \cdot 10^{-2}$	14.93	1	0.2	5.08
2	0.13	15.04	2	0.36	5.51
3	0.19	15.96	3	0.51	5.92
4	0.23	17.17	4	0.66	6.03
5	0.29	17.24	5	0.8	6.27
6	0.33	18.02	6	0.93	6.45
7	0.37	18.92	7	1.1	6.39
8	0.43	18.48	8	1.23	6.5
9	0.49	18.52	9	1.4	6.45
10	0.53	18.76	10	1.53	6.54
15	0.78	19.23	15	2.23	6.73
20	1.03	19.36	20	2.93	6.83
25	1.27	19.75	25	3.6	6.95
30	1.51	19.88	30	4.3	6.98
35	1.76	19.93	35	4.96	7.05
40	2	20.01	40	5.66	7.06
45	2.23	20.15	45	6.4	7.04
50	2.5	20.01	50	7.06	7.08
55	2.73	20.13	55	7.79	7.06
60	2.98	20.11	60	8.53	7.04
65	3.23	20.11	65	9.26	7.02
70	3.47	20.2	70	9.96	7.03

Таблица 4: Подробное исследование нескольких бросков

5. Вязкость глицерина

$$s^* = \frac{m}{27\pi} gr \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{\eta^2} (\beta - \ln \beta) \quad (38)$$

Для пластмассы путь установления до скорости, отличающейся не более чем на 5% от установившейся, составляет 0.44 ± 0.2 см, для стали — 1.92 ± 0.27 см.

Взяв участок пути, на котором координата больше пути установления, но достаточно далека от дна, получим значение скорости, близкой к установившейся, и сможем рассчитать значение вязкости глицерина из формулы (31):

$$\eta = \frac{2}{9} gr^2 \frac{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}}{v_{\text{уст}} \cdot (1 + 2.4 \frac{r}{R})} \quad (39)$$

Рассчитаем относительную погрешность определения вязкости:

$$\varepsilon(\eta) = \frac{2\Delta\rho}{\rho_{\text{шар}} - \rho_{\text{жид}}} + \varepsilon(v) + \frac{3\Delta r}{r} \quad (40)$$

$$\varepsilon(v) = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta t}{t} \quad (41)$$

Для данных по пластмассовым шарикам (табл. 2) получили значения вязкости $2.12 \pm 9.1\%$ Пз, $2.19 \pm 8.8\%$ Пз, $2.11 \pm 8.92\%$ Пз.

Для данных по стальным шарикам (табл. 3) получили значения вязкости $2.52 \pm 11.9\%$ Пз, $2.57 \pm 12.3\%$ Пз, $2.55 \pm 12.1\%$ Пз.

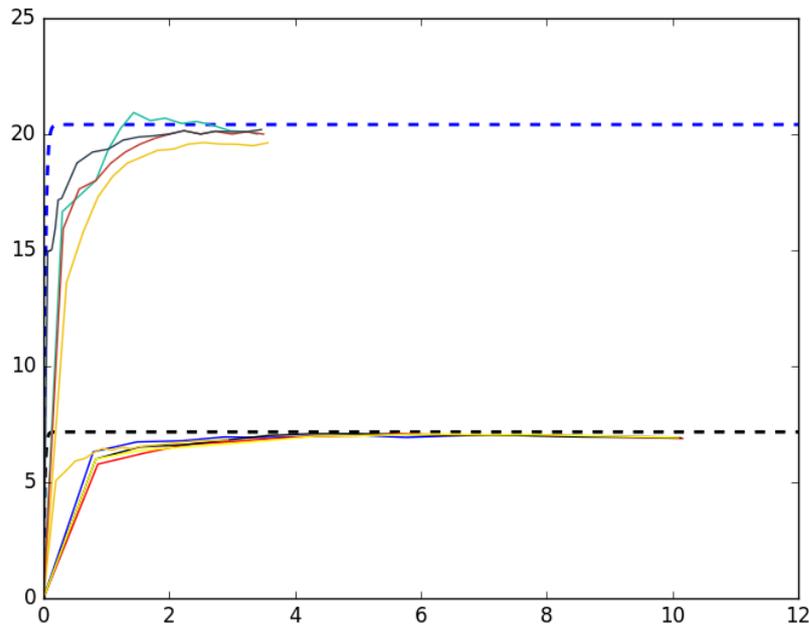


Рис. 4: Сводный график скоростей шариков и теоретических зависимостей (эскиз)

5.1. Зависимость пути от времени

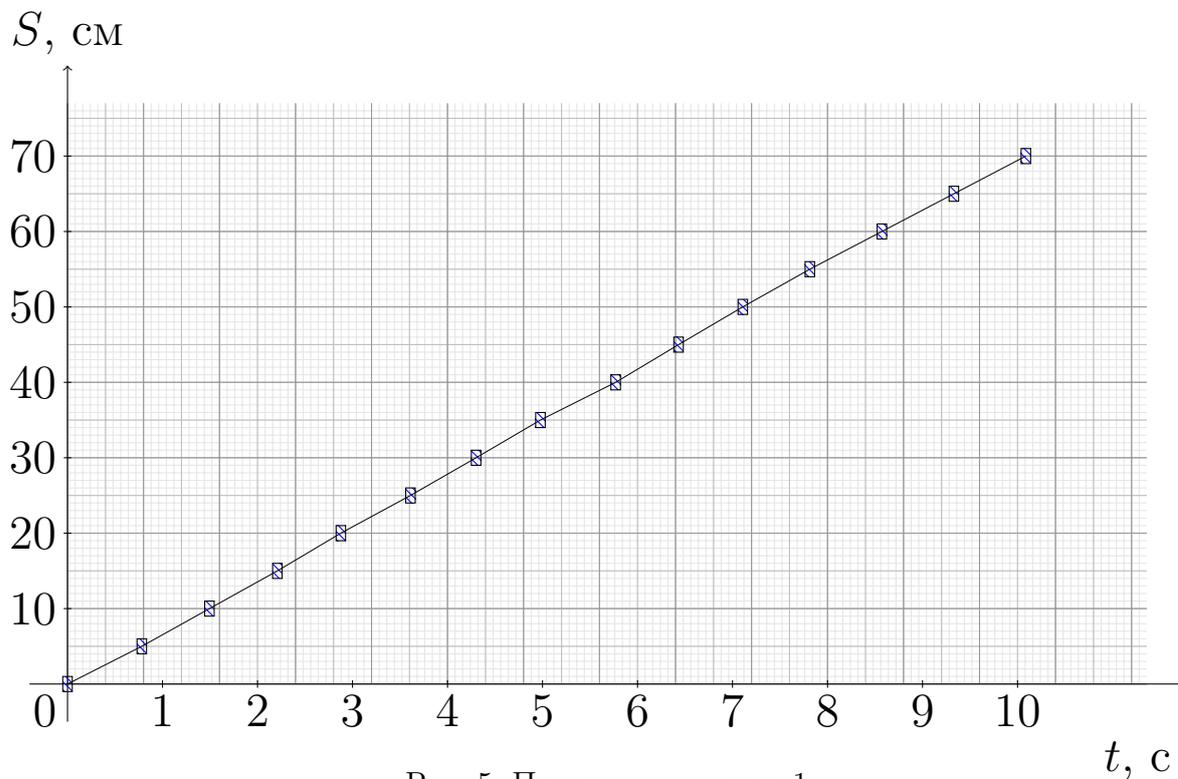


Рис. 5: Пластмасса - опыт 1

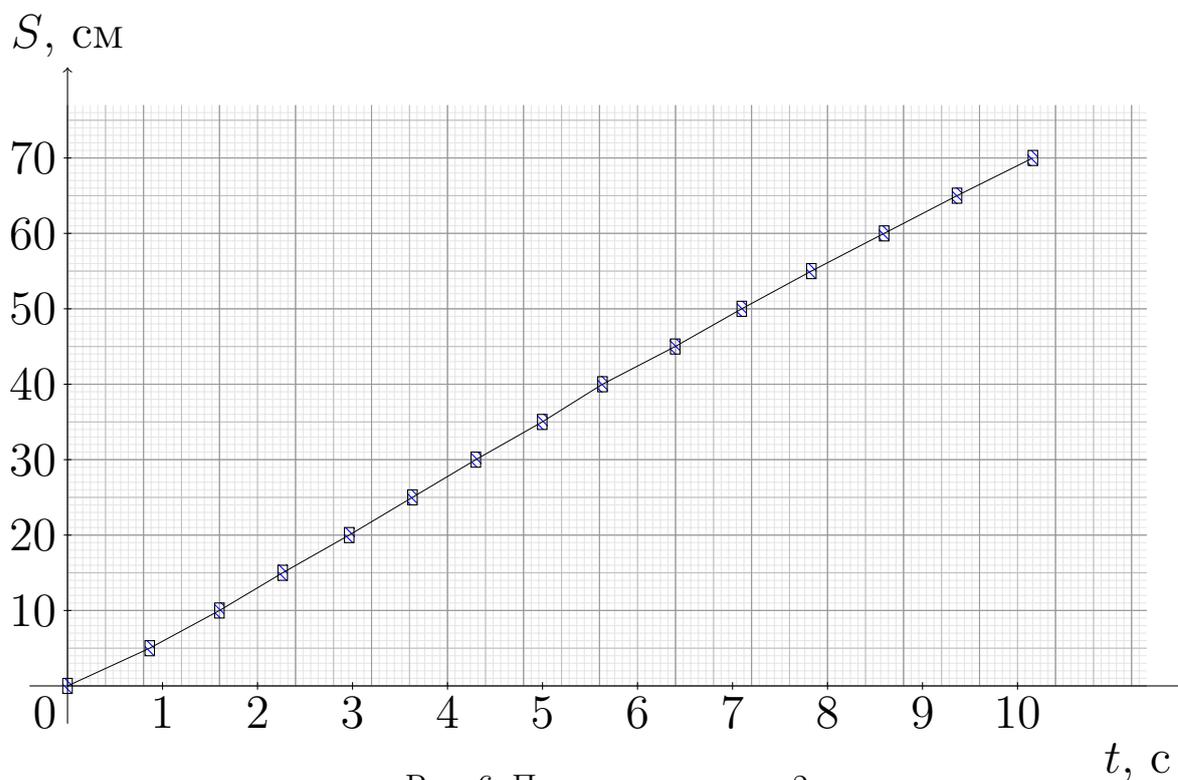


Рис. 6: Пластмасса - опыт 2

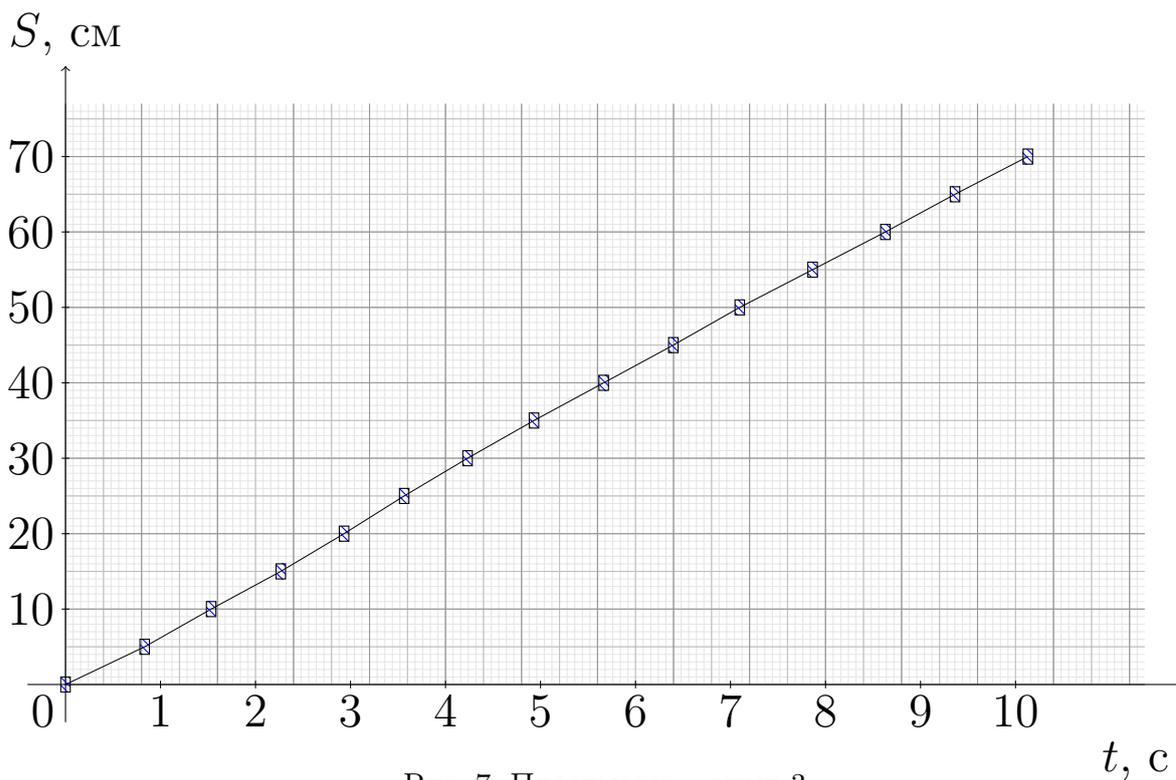


Рис. 7: Пластмасса - опыт 3

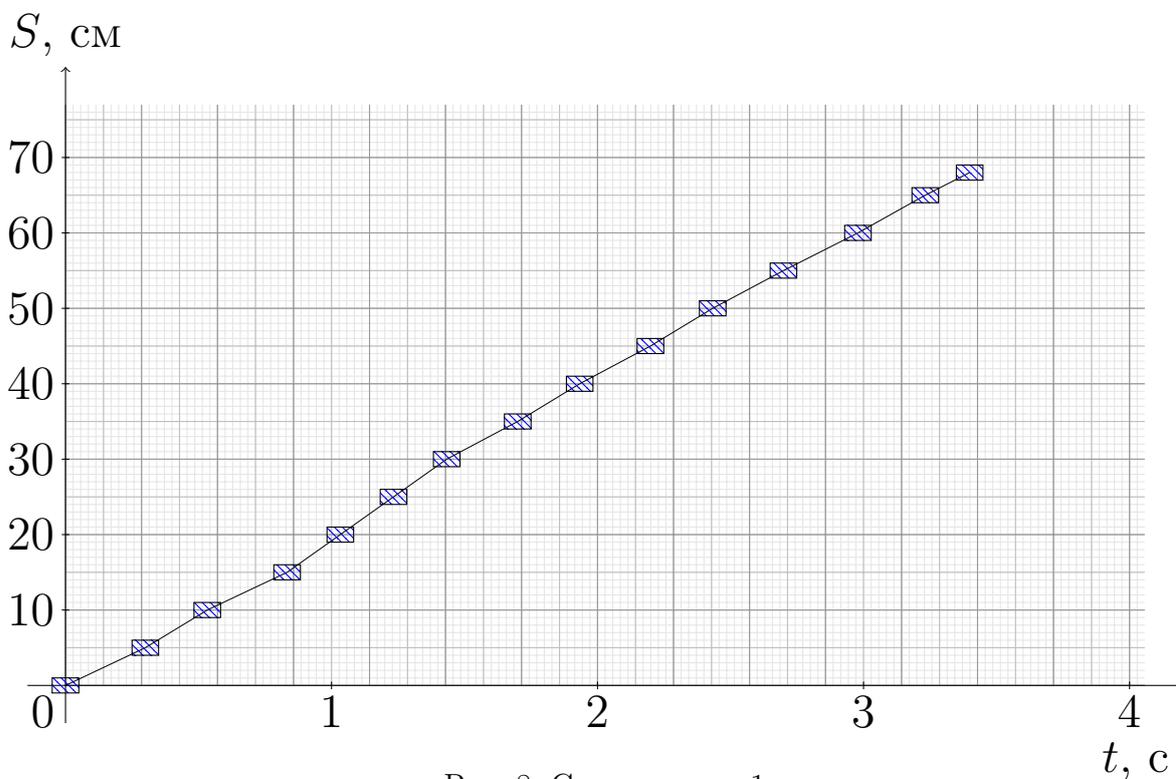


Рис. 8: Сталь - опыт 1

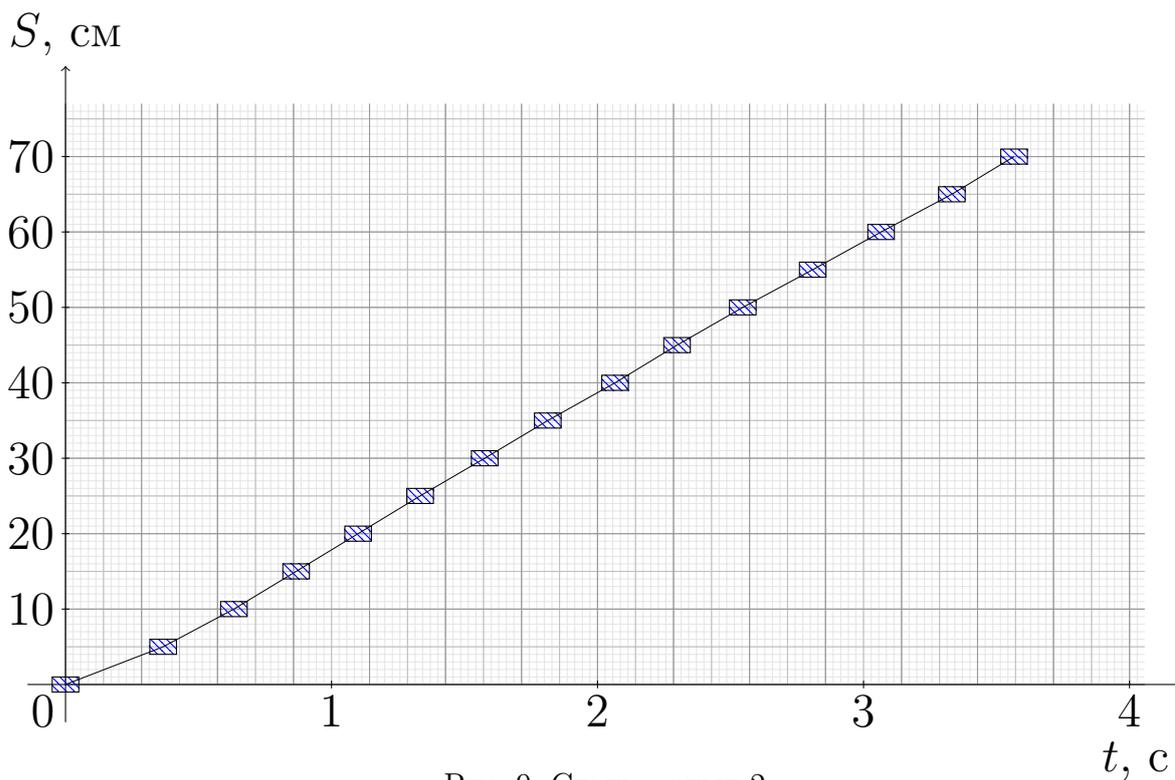


Рис. 9: Сталь - опыт 2

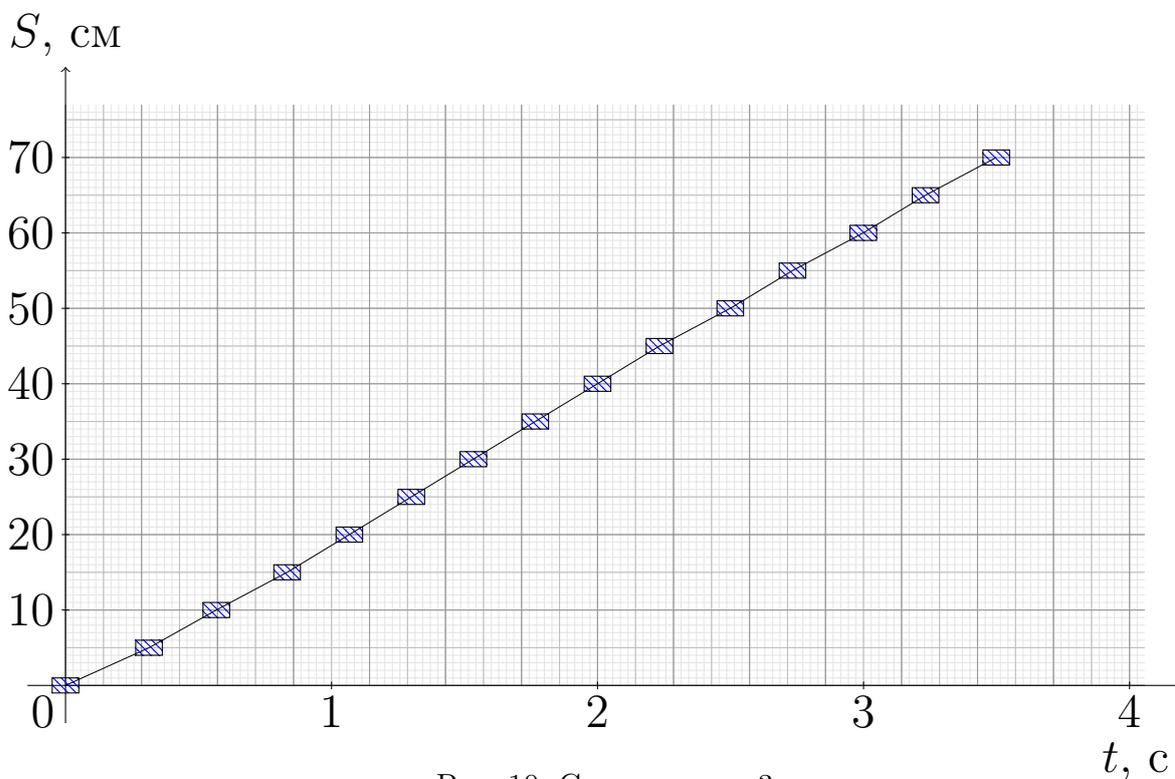


Рис. 10: Сталь - опыт 3

5.2. Зависимость скорости от пути

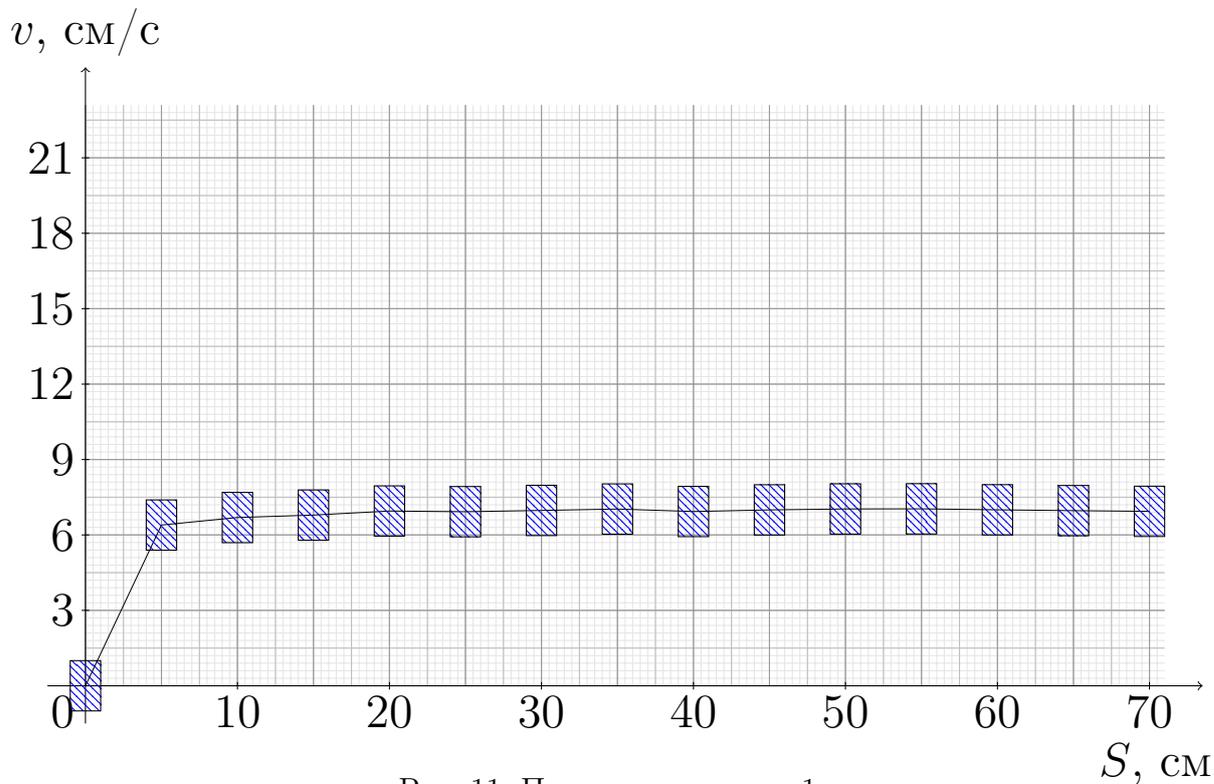


Рис. 11: Пластмасса - опыт 1

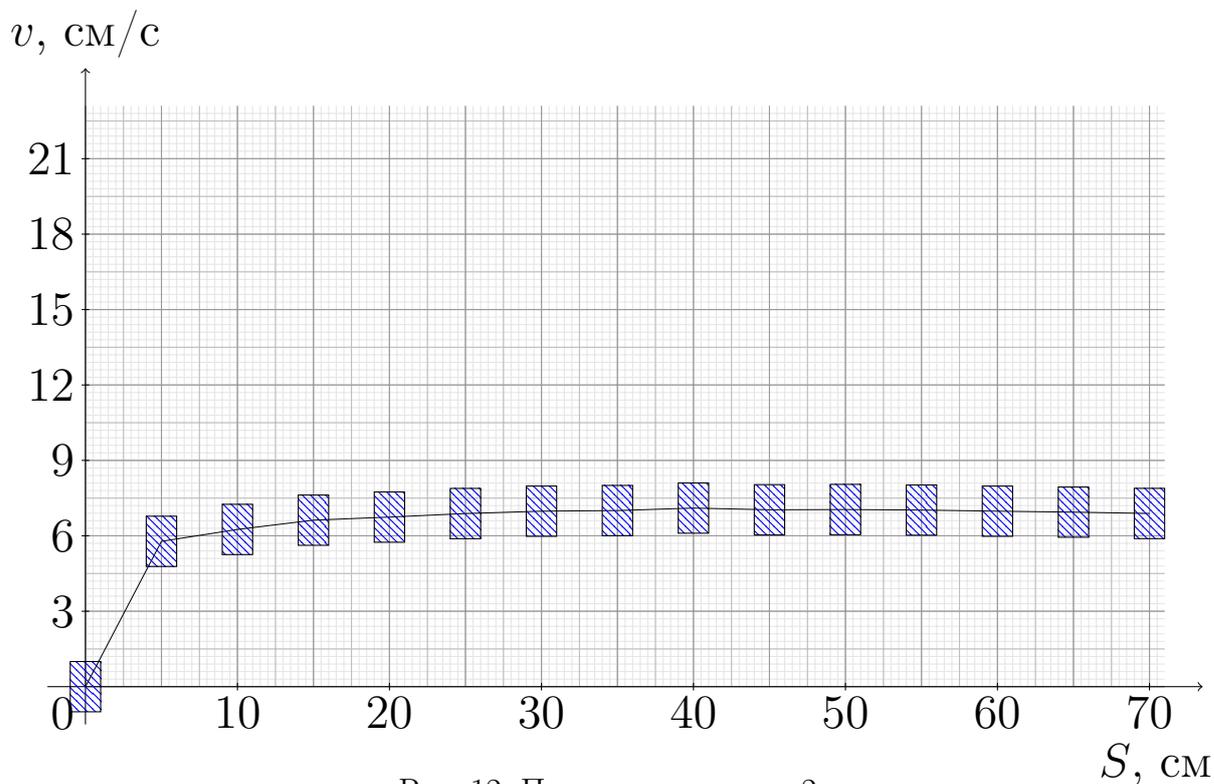


Рис. 12: Пластмасса - опыт 2

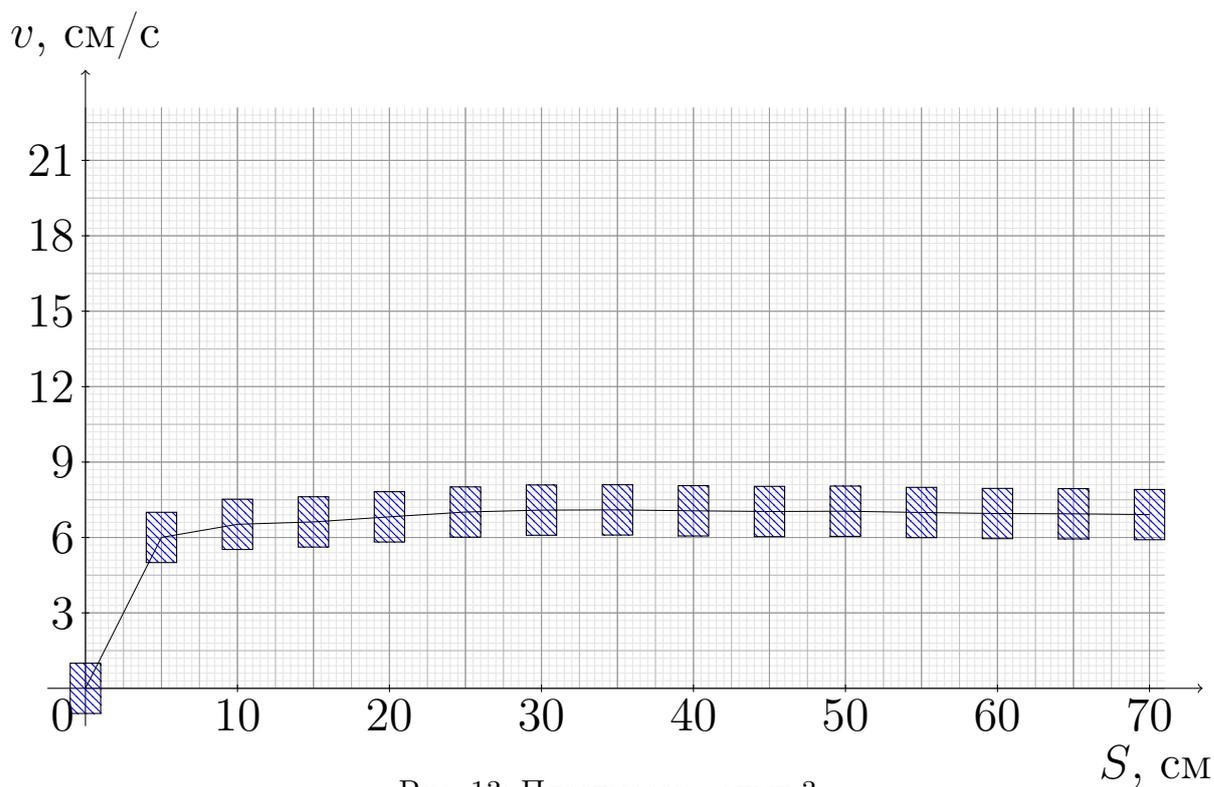


Рис. 13: Пластмасса - опыт 3

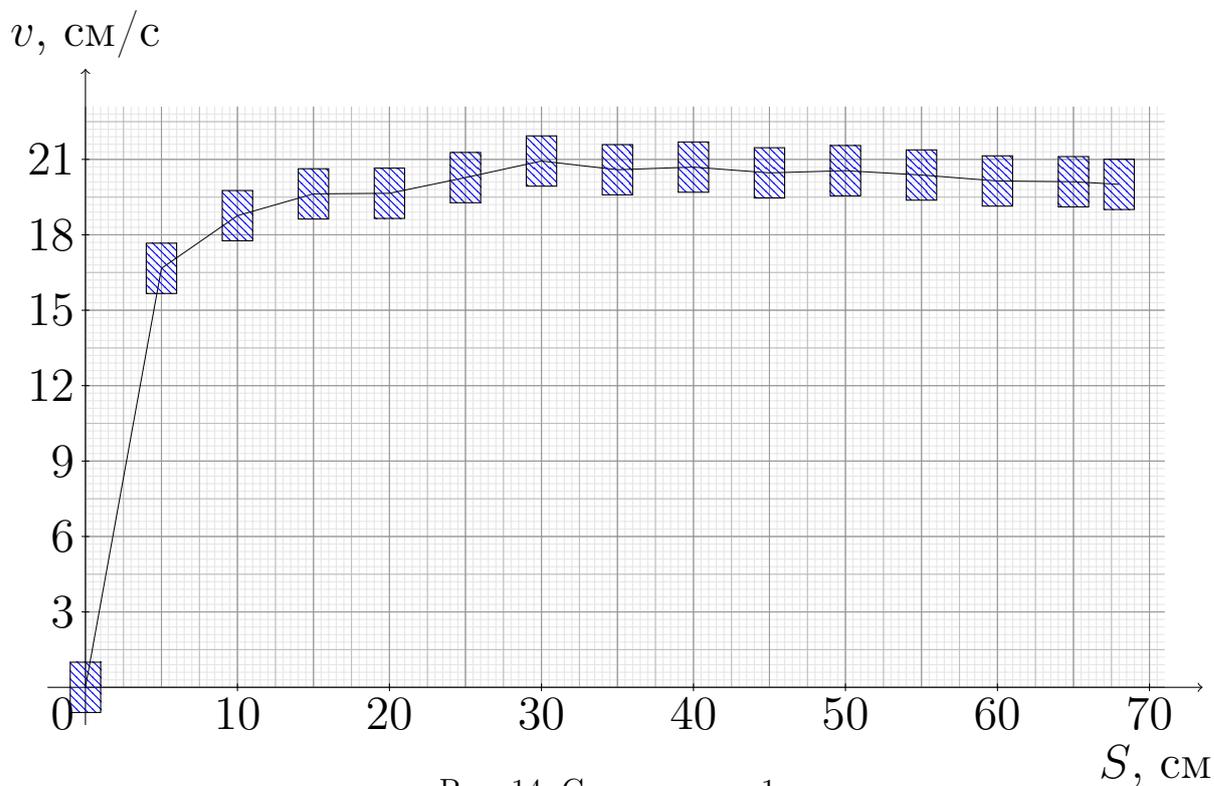


Рис. 14: Сталь - опыт 1

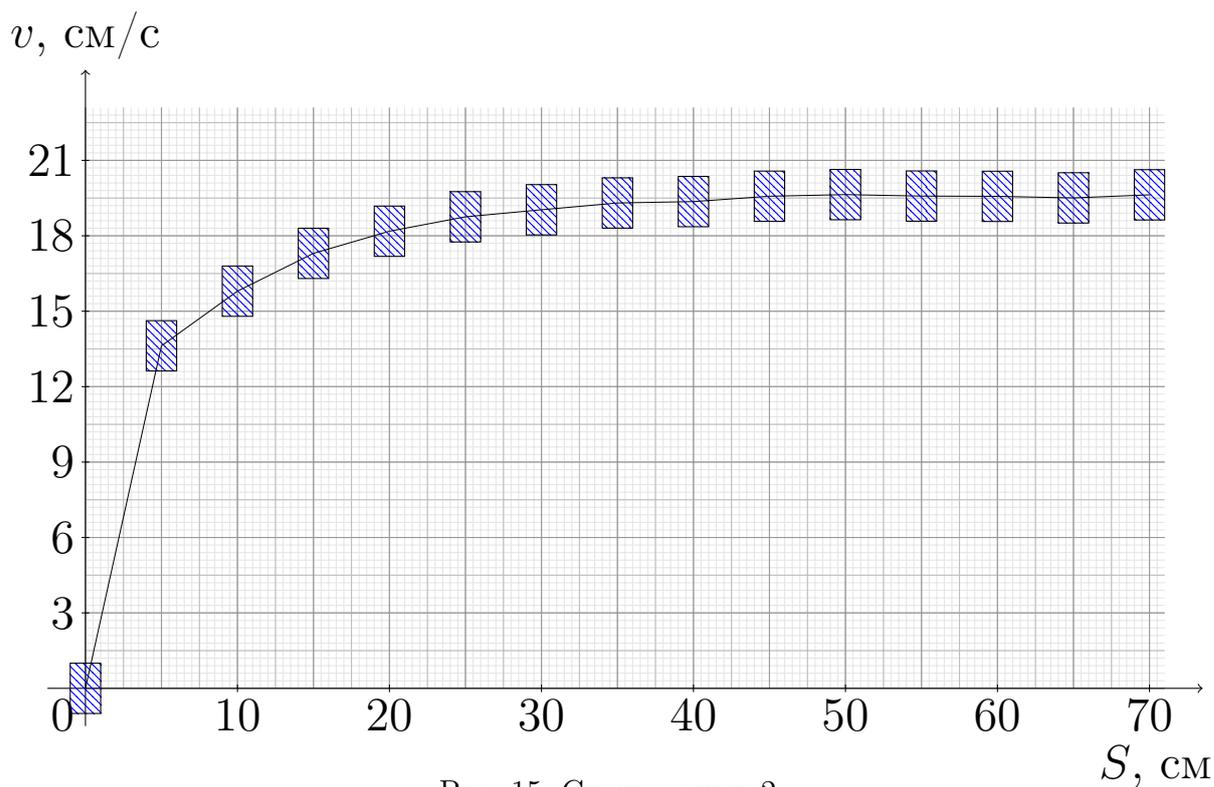


Рис. 15: Сталь - опыт 2

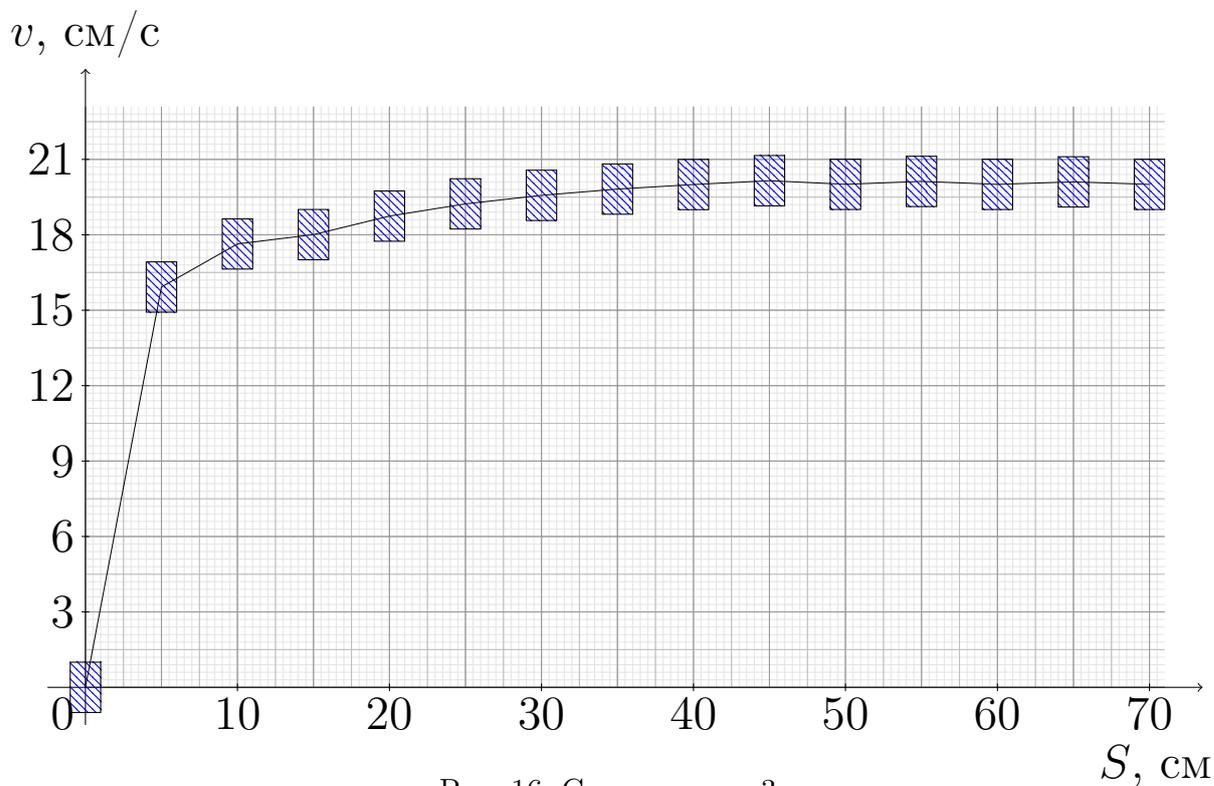


Рис. 16: Сталь - опыт 3

Заключение

Замерили массы шариков – 0.24 и 0.265 грамм, плотность пластмассы – 2.2 г/см³, радиусы шариков – $2 \pm 0.02\text{mm}$, $5.92 \pm 0.02\text{mm}$.

Сняли зависимости координат шарика по радиальной оси во времени для набора опытов.

Методом раскадровки преобразовали видеоряд опыта в таблицу координат и скоростей по времени.

Проанализировав данные, нашли установившуюся скорость пластмассового шарика – $7 \pm 4\%$ см/с, стального шарика – $20 \pm 11\%$ см/с.

Для данных по пластмассовым шарикам (табл. 2) получили значения вязкости $2.12 \pm 9.1\%$ Пз, $2.19 \pm 8.8\%$ Пз, $2.11 \pm 8.92\%$ Пз.

Для данных по стальным шарикам (табл. 3) получили значения вязкости $2.52 \pm 11.9\%$ Пз, $2.57 \pm 12.3\%$ Пз, $2.55 \pm 12.1\%$ Пз.

Вывели зависимости скорости, координат по времени для шарика, движущегося в бесконечной вязкой среде.

Построили графики зависимостей для всех опытов, эскизы для сводных графиков.

Изучили влияние вязкого трения на характер движения сферического тела в цилиндрическом сосуде.

Нашли число Рейнольдса для данного эксперимента

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} = 48.3, \quad (42)$$

где v – характерная скорость – 0.2 м/с, ρ – плотность глицерина – 1220 кг/м³ D – характерный размер – 0.0926 м, η – средняя вязкость – 0.23 Па·с.

Характер движения – ламинарный.

Объяснили существование поправок Ладенбурга влияния стенок и дна цилиндрического сосуда на силу внутреннего трения.

Ответы на вопросы