Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Отчет по лабораторной работе №16

Определение вязкости воздуха

Выполнил студент 410 группы
Сарафанов Ф.Г.

Нижний Новгород, 2016

Содержание

Введение **2**

1 Теория лабораторной работы **2**

1.1 Эскиз установки . . . 2

1.2 Вывод формулы Пуазёйля . . . 3

1.3 Расчет вязкости через экспериментальные данные . . . 5

1.4 Оценка уровня установления жидкости . . . 6

1.5 Оценка ошибки определения давления . . . 7

2 Экспериментальные данные **9**

2.1 Прямые измерения и график $\ln \frac{h_0}{h}$ . . . 9

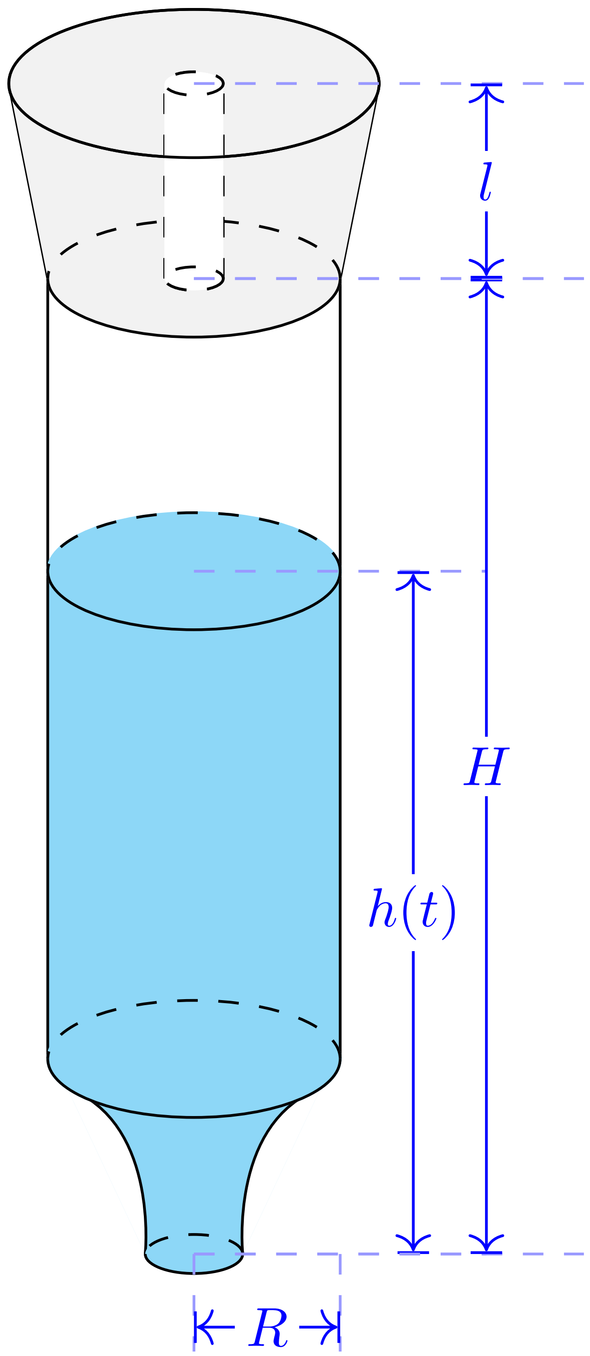
2.2 Число Рейнольдса . . . 11

Заключение **12**

Введение

1 Теория лабораторной работы

1.1 Эскиз установки



1.2 Вывод формулы Пуазёйля

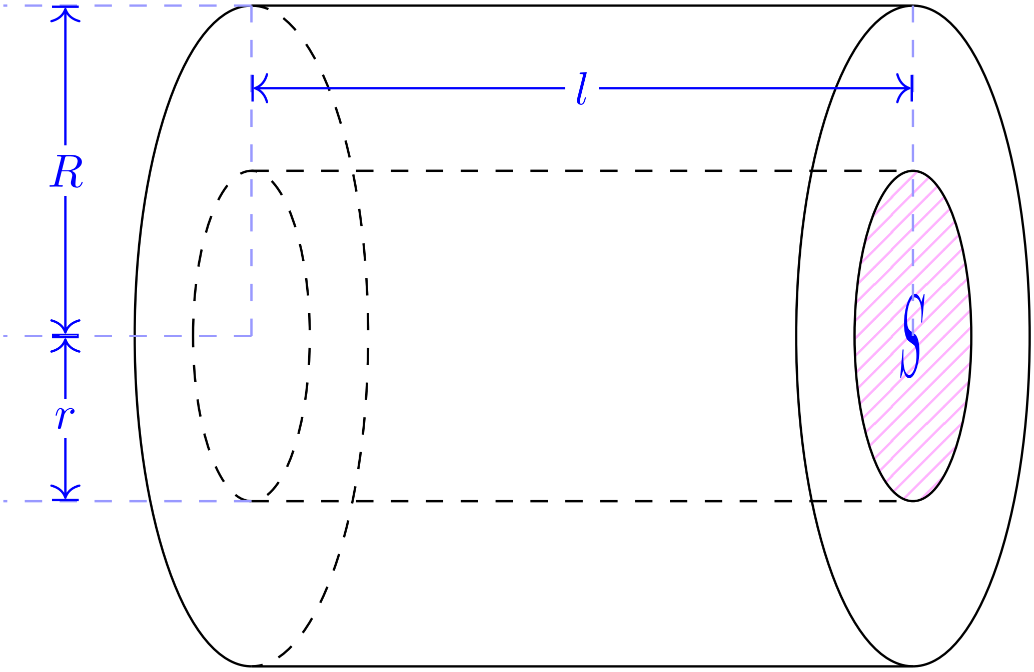


Рис. 1: pz1

Выделим из всей трубы радиусом R цилиндр радиусом r. По формуле вязкого трения Ньютона, сила трения при движении такого цилиндра

$$f_R = \eta \frac{dv}{dr} S_{\text{бок}} \tag{1}$$

С другой стороны, при перепаде давления на концах трубки Δp, будет действовать сила давления:

$$f_p = \Delta p \cdot S \tag{2}$$

Из условия стационарности потока скорость потока должна оставаться постоянной, т.е. сила давления уравновешивает силу трения:

$$\eta \frac{dv}{dr} S_{\text{бок}} = \Delta p \cdot S \tag{3}$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r l \tag{4}$$

$$S = \pi r^2 \tag{5}$$

$$\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l = \Delta p \cdot \pi r^2 \tag{6}$$

Произведем разделение переменных:

$$dv = \frac{\Delta p}{2\eta l} r dr \tag{7}$$

Граничные условия $v(r = R) = 0$, $v(r = 0) \neq \infty$. Тогда расставим пределы и произведем интегрирование:

$$\int\limits_0^{v(r)} dv = \int\limits_R^r \frac{\Delta p}{2\eta l} r dr \tag{8}$$

Отсюда получаем параболическое распределение скорости в течении Пуазёйля:

$$v(r) = \frac{\Delta p(r^2 - R^2)}{4\eta l} \tag{9}$$

Расход жидкости через кольцевое сечение радиусом r, шириной dr ($S = 2\pi r dr$)

$$dQ = S \cdot v = \frac{\Delta p(r^2 - R^2)}{4\eta l} \pi r dr \tag{10}$$

Тогда расход жидкости через все сечение трубы

$$Q = \int dQ = \int\limits_0^R \frac{\Delta p(r^2 - R^2)}{4\eta l} \pi r dr \tag{11}$$

И окончательно получили формулу Пуазёйля:

$$Q = \Delta p \frac{\pi R^4}{8\eta l} \tag{12}$$

1.3 Расчет вязкости через экспериментальные данные

С одной стороны, Q нашли как функцию $Q = f(\Delta p, R, \eta, l)$ (см. 12), с другой, объёмный расход можно выразить по определению:

$$Q = -\frac{dV}{dt} = -S\frac{dh}{dt} \tag{13}$$

Знак минус говорит об убыли жидкости. Теперь можем записать дифференциальное уравнение:

$$-S\frac{dh}{dt} = \Delta p\frac{\pi R^4}{8\eta l} \tag{14}$$

Как было показано ранее, $\Delta p = \rho g h$. Тогда

$$S\frac{dh}{dt} = -\frac{\pi R^4}{8\eta l}\rho g h \tag{15}$$

Обозначим

$$c = \frac{\pi R^4 \rho g}{8\eta l S} \tag{16}$$

Тогда

$$-\frac{dh}{dt} = ch \tag{17}$$

$$-\int\limits_{h_0}^{h(t)} \frac{dh}{h} = \int\limits_0^t c dt \tag{18}$$

Отсюда получаем

$$\ln\frac{h_0}{h} = ct \tag{19}$$

Из предыдущего уравнения

$$h(t) = h_0 \cdot e^{-ct}, \quad \text{где} \quad c = \frac{\pi R^4 \rho g}{8\eta l S} \tag{20}$$

Таким образом, можно построением графика $\ln\frac{h_0}{h}$ от t найти угловой коэффициент c, через который выразится вязкость воздуха:

$$\eta = \frac{\pi R^4 \rho g}{8clS} \tag{21}$$

где ρ – плотность жидкости, R – радиус капилляра, l – длина капилляра, g – ускорение свободного падения, S – площадь поперечного сечения сосуда, c – угловой коэффициент графика $\ln\frac{h_0}{h}$ от t.

$$h(t) = h_0 e^{-ct}, \quad \text{где} \quad c = \frac{\pi r^4 \rho h}{8\eta l S} \tag{22}$$

1.4 Оценка уровня установления жидкости

Выполнение лабораторной работы возможно при условии, что на концах капилляра установится квазистационарная разность давлений.

Эта необходимость объясняется условием равенства расхода жидкости и воздуха.

Связав первоначальное понижение давления воздуха с расширением *без* изменения количества, можем найти такое расстояние b, которое должен пройти уровень жидкости до установления квазистационарной разности давлений.

Воспользуемся законом Менделеева-Клапейрона на данных условиях:

$$p_a V_0 = p_a S l = \frac{m}{M} RT = \mathrm{const} \tag{23}$$

Где l – высота воздушного столба в сосуде в начальный момент времени.

Если высота всего сосуда H, то

$$l = H - h_0, \tag{24}$$

где $h_0 = h(t = 0)$ – высота водяного столба в сосуде в начальный момент времени.

Тогда высота водяного столба в момент установления давлений будет

$$h = h_0 - b \tag{25}$$

Тогда

$$p_a l = (p_a - \rho g(h_0 - b))(l + b) \tag{26}$$

$$p_a l = p_a l + p_a b - \rho g h_0 l - \rho g h_0 b + \rho g b l + \rho g b^2 \tag{27}$$

$$\rho g b^2 + b(p_a - \rho g h_0 + \rho g l) - \rho g h_0 l = 0 \tag{28}$$

Тогда

$$b = \frac{-(p_a - \rho g h_0 + \rho g l) \pm \sqrt{(p_a - \rho g h_0 + \rho g l)^2 + 4\rho^2 g^2 h_0 l}}{2\rho g} \tag{29}$$

Подставив параметры установки и лабораторные условия ($p_a = 100258$ Па), получим пару решений.

Решением, имеющим физический смысл, будет

$$b = 1.5486\ldots \tag{30}$$

Оценочно, погрешность вычисления $b > \Delta h_0 = 0.1$ cm. Тогда необходимо «откинуть» незначащие разряды, и окончательно получим значение, на которое нужно дать опуститься уровню воды для установления разности давлений –

$$b = 1.5 \text{ cm} \tag{31}$$

Однако, эта оценка получена при предположении, что за время установления воздух в сосуд не поступает. В условиях эксперимента это не так.

Понижение давления воздуха в сосуде будет замедлено постоянным увеличением объёма воздуха, а значит, до установления уровень жидкость пройдет большее расстояние.

Получили, что рассчитанное нами b – заниженная оценка.

В эксперименте уровню воды дали опуститься на 9 cm.

1.5 Оценка ошибки определения давления

Формула (22) зависимости $h(t)$ выведена в предположении о статичности перепада давлений на капилляре:

$$\Delta p = \rho g h \tag{32}$$

Этот закон достаточно хорошо совпадает с реальностью до начала колебаний жидкости. Однако из (22) можно выразить скорость жидкости:

$$h(t) = h_0 e^{-ct} \tag{33}$$

$$v = \frac{dh}{dt} = \frac{d[h_0 e^{-ct}]}{dt} = -ch_0 e^{-ct} \tag{34}$$

Или, избавляясь от времени

$$v = -ch \tag{35}$$

Тогда запишем уравнение Бернулли для верхней и нижней точки жидкости в кране:

$$p^* + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = p_a + \frac{\rho v_k^2}{2} \tag{36}$$

Где v_k – скорость жидкости в кране, которую можно выразить через расход жидкости в сечении сосуда и в сечении крана:

$$Q_1 = S_k v_k = Q_2 = Sv \Rightarrow v_k = v\frac{S}{S_k} \tag{37}$$

Откуда давление воздуха в сосуде p^*

$$p^* = p_a - \rho g h - \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\rho v_k^2}{2} \tag{38}$$

То есть, в случае наличия динамического давления разность давлений будет

$$\Delta p = p_a - p^* = \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho v_k^2}{2} \tag{39}$$

И наша ошибка в определении давления

$$p_{err} = \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho v_k^2}{2} = \frac{1}{2}\rho c^2 h^2 [1 - \frac{S^2}{S_k^2}] \tag{40}$$

Т.е. максимальная ошибка, при подстановке экспериментальных значений составляет

$$p_{err} = -5.821 \text{ Па}, \tag{41}$$

что составляет примерно -0.1% от значения $\rho g h$ на той же высоте.

2 Экспериментальные данные

2.1 Прямые измерения и график $\ln \frac{h_0}{h}$

Таблица 1: Экспериментальные данные из протокола

h'	t_1	t_2	t_3	$< t >$	$\ln \frac{h_0}{h}$
0	0	0	0	0	0
2	15	16	15	15.33	$3.45 \cdot 10^{-2}$
4	32	31	32	31.67	$7.02 \cdot 10^{-2}$
6	49	49	49	49	0.11
8	67	67	67	67	0.15
10	86	87	86	86.33	0.19
12	105	105	105	105	0.23
14	125	125	124	124.67	0.27
16	145	144	144	144.33	0.32
18	167	167	166	166.67	0.36
20	190	190	189	189.67	0.41
22	213	213	213	213	0.47
24	238	238	238	238	0.52
26	264	264	264	264	0.58
28	297	297	297	297	0.64
30	322	322	322	322	0.71
32	356	356	356	356	0.78
34	387	386	387	386.27	0.86
36	424	424	424	424	0.94
38	464	464	463	463.67	1.03
40	507	507	508	507.33	1.13
42	554	554	554	554	1.24
44	605	605	605	605	1.37
46	666	666	665	665.67	1.51

Из формулы (22) можно получить следующую:

$$ct = \ln \frac{h_0}{h} \tag{42}$$

Которая есть ничто иное, как линейная зависимость. Построив график логарифма от времени, можно найти c и выразить вязкость.

$$f(h, h_0) = \ln \frac{h_0}{h} \tag{43}$$

$$\Delta f = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial h_0}\Delta h\right)^2} = \pm\Delta h\sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h_0^2}} \tag{44}$$

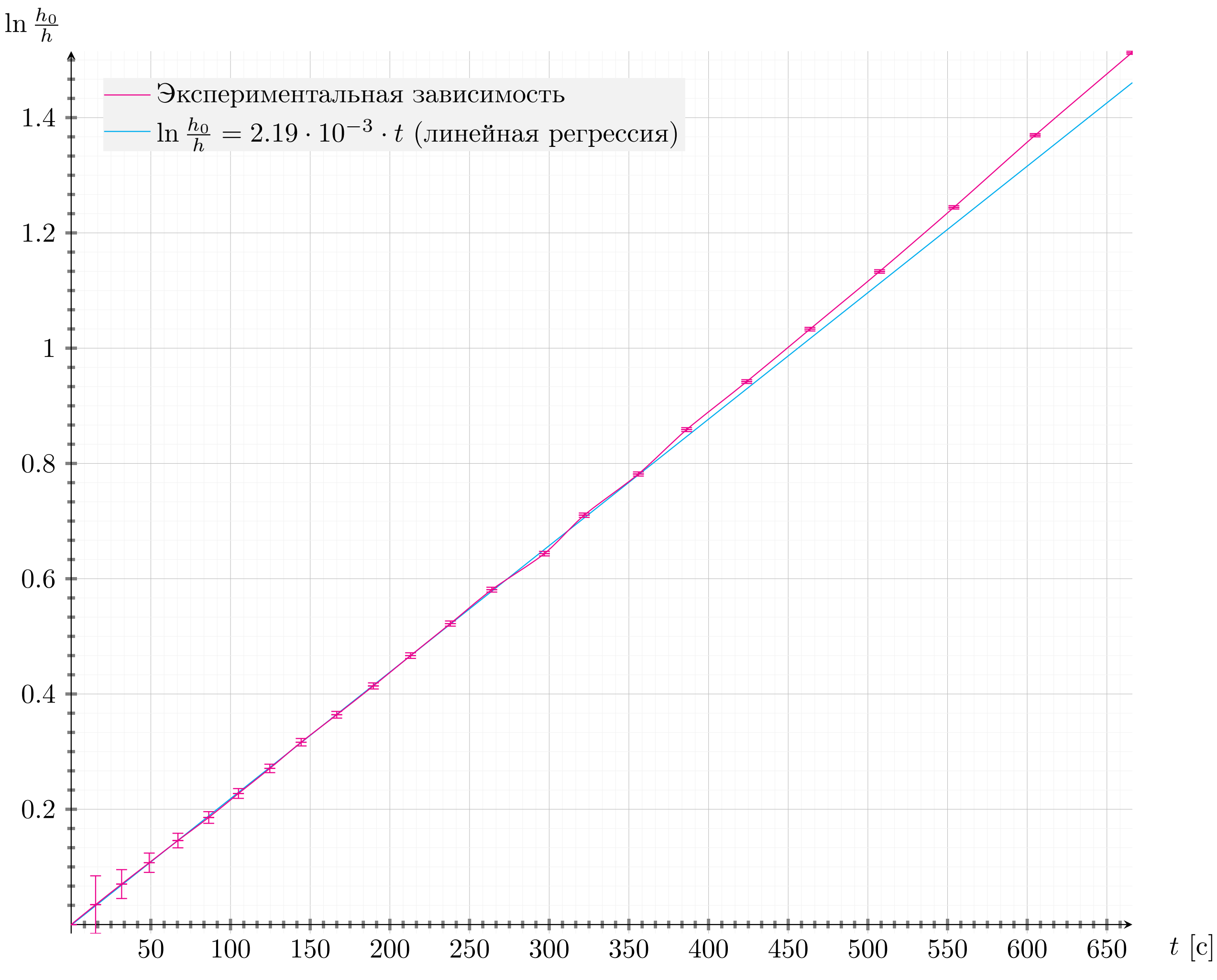


Рис. 2: Зависимость $\ln \frac{h_0}{h}$ от времени

Из графика, построенного по экспериментальным данным, нашли линейную регрессию графика $f(t)$.

Так как после 400 секунды началось неравномерное вытекание воды, для поиска регрессии такие данные не учитывались.

Из графика нашли коэффициент c:

$$c = 2.19 \cdot 10^{-3} \tag{45}$$

Максимальная относительная погрешность определения коэффициента

$$\varepsilon(c) = \varepsilon(f_{max}[t']) + \varepsilon(t') \approx 0.07 \tag{46}$$

И отсюда абсолютная

$$\Delta c = 0.22 \cdot 10^{-3} \tag{47}$$

Погрешность определения вязкости

$$\varepsilon(\eta) = 4\varepsilon(R) + \varepsilon(c) + \varepsilon(l) = 4\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta c}{c} = 0.0004 + 0.07 = 0.0704 \tag{48}$$

И

$$\Delta\eta = 0.0704 \cdot \eta = 13.5 \text{ П} \tag{49}$$

Подставляя опытные значения в следующую формулу, найдем вязкость воздуха:

$$\eta = \frac{\pi R^4 \rho g}{8clS} = 192[\pm 13.5] \cdot 10^{-6} \text{ П} \tag{50}$$

2.2 Число Рейнольдса

Число Рейнольдса характеризует переход от ламинарного течения к турбулентному. В нашем случае найдем Re для течения в капилляре.

$$Re = \frac{\rho_{\text{воздуха}} \cdot v \cdot R_{\text{капилляра}}}{\eta} \tag{51}$$

Скорость течения воздуха в капилляре пока неизвестна. Найдем её через условие равенства расходов воздуха и воды. С одной стороны,

$$|Q| = \Delta p \frac{\pi R^4}{8\eta l} \tag{52}$$

Но с другой стороны

$$|Q| = S_{\text{капилляра}} v \tag{53}$$

Отсюда

$$v = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \rho g h \frac{1}{S_{\text{капилляра}}} \tag{54}$$

или

$$v = ch \frac{S_{\text{сосуда}}}{S_{\text{капилляра}}} \tag{55}$$

Тогда максимальная скорость будет

$$v_{max} = 2.19 \cdot 10^{-3} \cdot 59 \cdot \frac{18.5}{0.00062} = 3299 \text{ см/с} \tag{56}$$

И тогда

$$Re_{max} = 525 \leq 1100 \tag{57}$$

Заключение

В проведенной лабораторной работе было найдено значение вязкости воздуха при температуре $t^\circ = 25\ C$, давлении $p_a = 100258$ Па:

$$\eta = 192[\pm 13.5] \cdot 10^{-6}\ \Pi \tag{58}$$

Снята зависимость высоты уровня воды от времени, а также значение времени начала колебаний жидкости ($t^* = 400c$).

Оценено расстояние, на которое должен опуститься уровень воды для установления давления в верхней части сосуда b (при условии постоянного объема воздуха):

$$b = 1.5 \pm 0.1 \text{ см} \tag{59}$$

Показано, что данная оценка в реальности является заниженной.

Оценена относительна ошибка, вызванная предположением о статичности перепада давлений:

$$p_{err} \approx -0.1\% \cdot \rho g h_0 \tag{60}$$

Найдено число Рейнольдса для течения воздуха в капилляре:

$$Re_{max} = 525 \leq 1100 \tag{61}$$

Откуда сделан вывод о ламинарности течения воздуха в капилляре.