

Отчет по лабораторной работе №110

Гироскоп

Выполнил студент 410 группы
Сарафанов Ф.Г.

Нижний Новгород, 2016

Содержание

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Установка | 2 |
| 2 | Теория лабораторной работы | 2 |
| 2.1 | Краткая теоретическая вводная | 2 |
| 3 | Экспериментальные данные | 4 |
| 3.1 | Расчетный момент инерции ротора | 4 |
| 3.2 | Оценка скорости собственного вращения | 5 |
| 3.3 | Зависимость $\frac{1}{T}$ от l | 6 |
| 3.4 | Коэффициенты A и B | 6 |
| 3.5 | Момент инерции из графика | 7 |
| | Заключение | 8 |

1 Установка

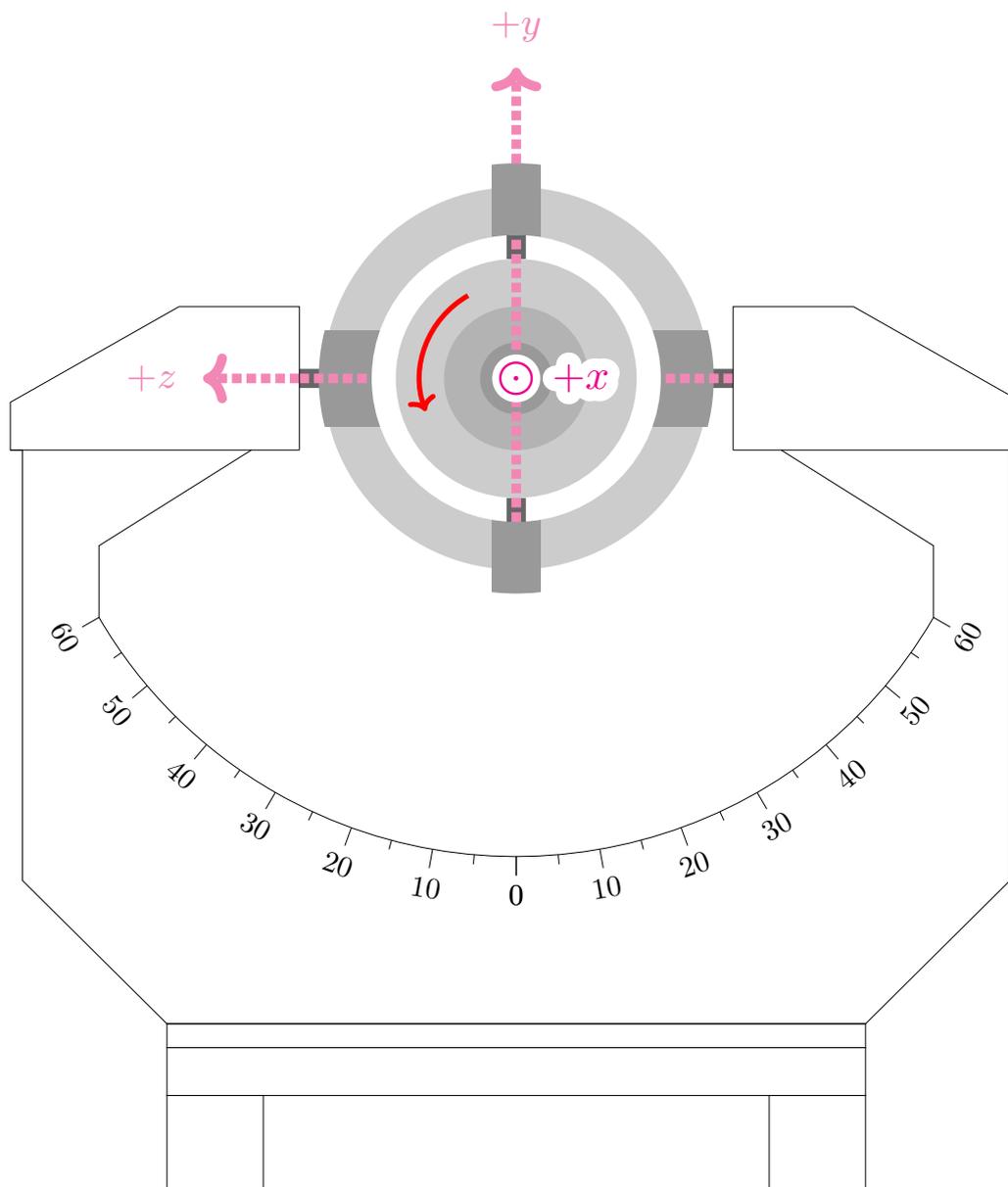


Рис. 1: Схематичное изображение гироскопа

2 Теория лабораторной работы

2.1 Краткая теоретическая вводная

Запишем уравнение моментов относительно центра масс гироскопа:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M} = [\vec{OA} \times m\vec{g}] \quad (1)$$

Момент силы тяжести груза будет создавать прецессию гироскопа следующим образом. Представим вектор $\vec{N} = \vec{N}_\perp + \vec{N}_\parallel$ (относительно оси основного вращения)

Со временем \vec{N}_\parallel остается постоянным, а конец вектора \vec{N}_\perp движется по окружности с радиусом $N_\perp = N \sin \alpha$.

За малый промежуток времени dt вектор \vec{N}_\perp повернется на угол

$$d\phi = \frac{dN}{N_\perp} = \frac{M dt}{N \sin \alpha} \quad (2)$$

Угловую скорость его поворота найдем по определению

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{M}{N \sin \alpha} \quad (3)$$

Но момент нам известен, а $N = J\omega$, и тогда

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{mg \cdot OA}{J\omega} \quad (4)$$

Удобно представить OA как сумму постоянных величин и переменной:

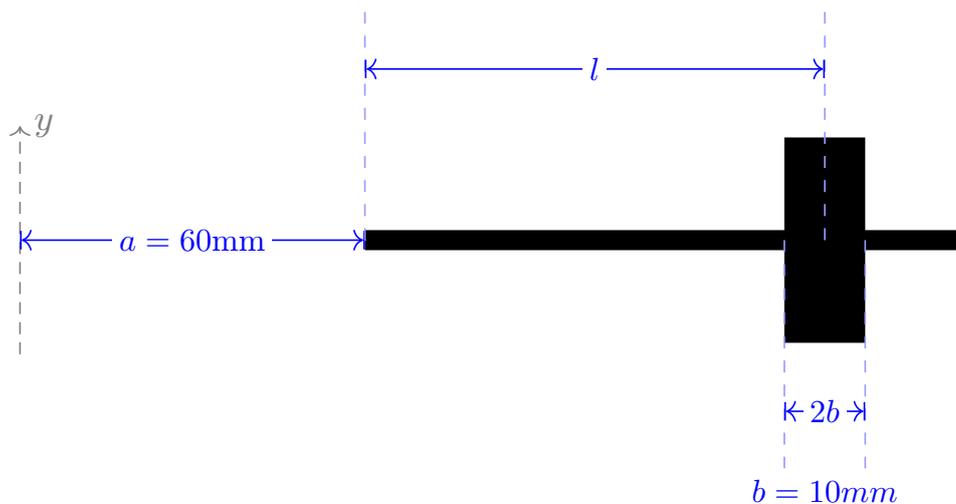


Рис. 2: Оценка расстояний a и b

$$OA = l + (a + b) \quad (5)$$

Практически можно измерить не скорость, а период прецессии. Запишем в следующем виде:

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{mgl + mg(a + b)}{J\omega} \quad (6)$$

или как уравнение прямой

$$\frac{1}{T} = Al + B, \quad (7)$$

где

$$A = \frac{mg}{2\pi J\omega} \quad (8)$$

$$B = \frac{mg(a+b)}{2\pi J\omega} \quad (9)$$

3 Экспериментальные данные

3.1 Расчетный момент инерции ротора

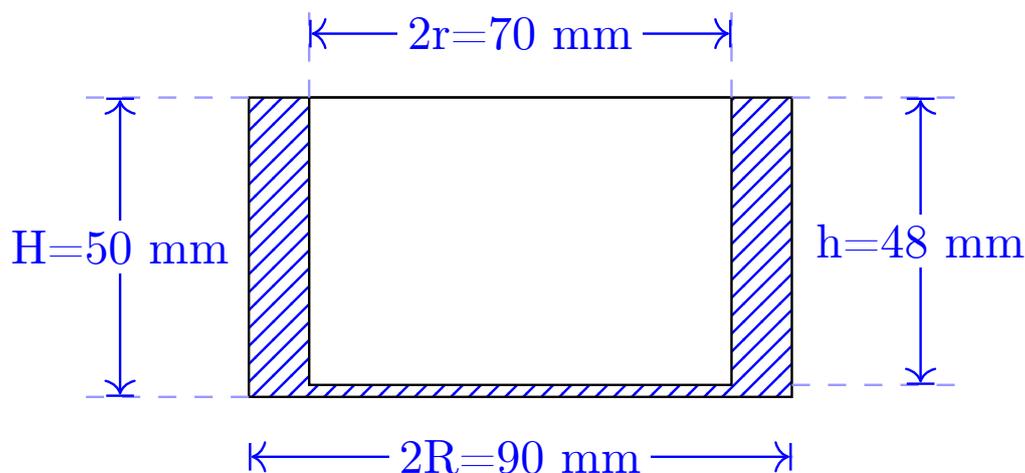


Рис. 3: Схематическое изображение ротора гироскопа в разрезе

Момент инерции гироскопа можно найти как разность моментов инерции внешнего цилиндра и внутреннего:

$$J_{\text{внеш}} = \frac{m_{\text{внеш}} R^2}{2} = \frac{\rho\pi R^4 H}{2} \quad (10)$$

$$J_{\text{внутр}} = \frac{m_{\text{внутр}} r^4}{2} = \frac{\rho\pi r^4 h}{2} \quad (11)$$

$$(12)$$

$$J = \frac{\rho\pi}{2} [R^4 H - r^4 h] = \frac{7.8 \cdot 3.14}{2} [(4.5)^4 \cdot 5 - (3.5)^4 \cdot 4.8] = 16287 [g \cdot cm^2] \quad (13)$$

3.2 Оценка скорости собственного вращения

Таблица 1: Результаты опыта для 15 вольт

| l , см | t_1 , с | t_2 , с | t_3 , с | $\langle t \rangle$, с | T , с | $\frac{1}{T}$, c^{-1} | $\Delta[\frac{1}{T}]$, c^{-1} |
|----------|-----------|-----------|-----------|-------------------------|---------|--------------------------|----------------------------------|
| 1 | 45.23 | 45.8 | 45 | 45.34 | 15.11 | $6.62 \cdot 10^{-2}$ | $2.6 \cdot 10^{-3}$ |
| 2 | 41.27 | 40.49 | 40.8 | 40.85 | 13.62 | $7.34 \cdot 10^{-2}$ | $3.2 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | 37.72 | 35.18 | 35.92 | 36.27 | 12.09 | $8.27 \cdot 10^{-2}$ | $4.1 \cdot 10^{-3}$ |
| 4 | 33.03 | 32.81 | 34.13 | 33.32 | 11.11 | $9 \cdot 10^{-2}$ | $4.9 \cdot 10^{-3}$ |
| 5 | 30.38 | 29.8 | 30.8 | 30.33 | 10.11 | $9.89 \cdot 10^{-2}$ | $5.9 \cdot 10^{-3}$ |
| 6 | 28.4 | 28.33 | 28.65 | 28.46 | 9.49 | 0.11 | $6.7 \cdot 10^{-3}$ |
| 7 | 27 | 26.59 | 27.1 | 26.9 | 8.97 | 0.11 | $7.5 \cdot 10^{-3}$ |
| 8 | 24.8 | 25.34 | 25.32 | 25.15 | 8.38 | 0.12 | $8.5 \cdot 10^{-3}$ |

Таблица 2: Результаты опыта для 18 вольт

| l , см | t_1 , с | t_2 , с | t_3 , с | $\langle t \rangle$, с | T , с | $\frac{1}{T}$, c^{-1} | $\Delta[\frac{1}{T}]$, c^{-1} |
|----------|-----------|-----------|-----------|-------------------------|---------|--------------------------|----------------------------------|
| 1 | 52.57 | 51.49 | 52.32 | 52.13 | 17.38 | $5.76 \cdot 10^{-2}$ | $2 \cdot 10^{-3}$ |
| 2 | 49.28 | 49.11 | 49.32 | 49.24 | 16.41 | $6.09 \cdot 10^{-2}$ | $2.2 \cdot 10^{-3}$ |
| 3 | 44.88 | 43.79 | 44.15 | 44.27 | 14.76 | $6.78 \cdot 10^{-2}$ | $2.8 \cdot 10^{-3}$ |
| 4 | 41.77 | 41.54 | 41.75 | 41.69 | 13.9 | $7.2 \cdot 10^{-2}$ | $3.1 \cdot 10^{-3}$ |
| 5 | 39 | 38.67 | 38.72 | 38.8 | 12.93 | $7.73 \cdot 10^{-2}$ | $3.6 \cdot 10^{-3}$ |
| 6 | 36.49 | 35.92 | 36.73 | 36.38 | 12.13 | $8.25 \cdot 10^{-2}$ | $4.1 \cdot 10^{-3}$ |
| 7 | 34.51 | 33.96 | 34.12 | 34.2 | 11.4 | $8.77 \cdot 10^{-2}$ | $4.6 \cdot 10^{-3}$ |
| 8 | 32.18 | 32.12 | 32.53 | 32.28 | 10.76 | $9.29 \cdot 10^{-2}$ | $5.2 \cdot 10^{-3}$ |

Мы оценили $a = 6\text{см}$, $b = 1\text{см}$, и рассчитали $J = 16287 [g \cdot \text{см}^2]$. Из эксперимента можно взять значение периода для определенной длины, например $T = 11.11\text{ с}$, $l = 1\text{см}$. Тогда можем оценить собственную скорость ω_{15} :

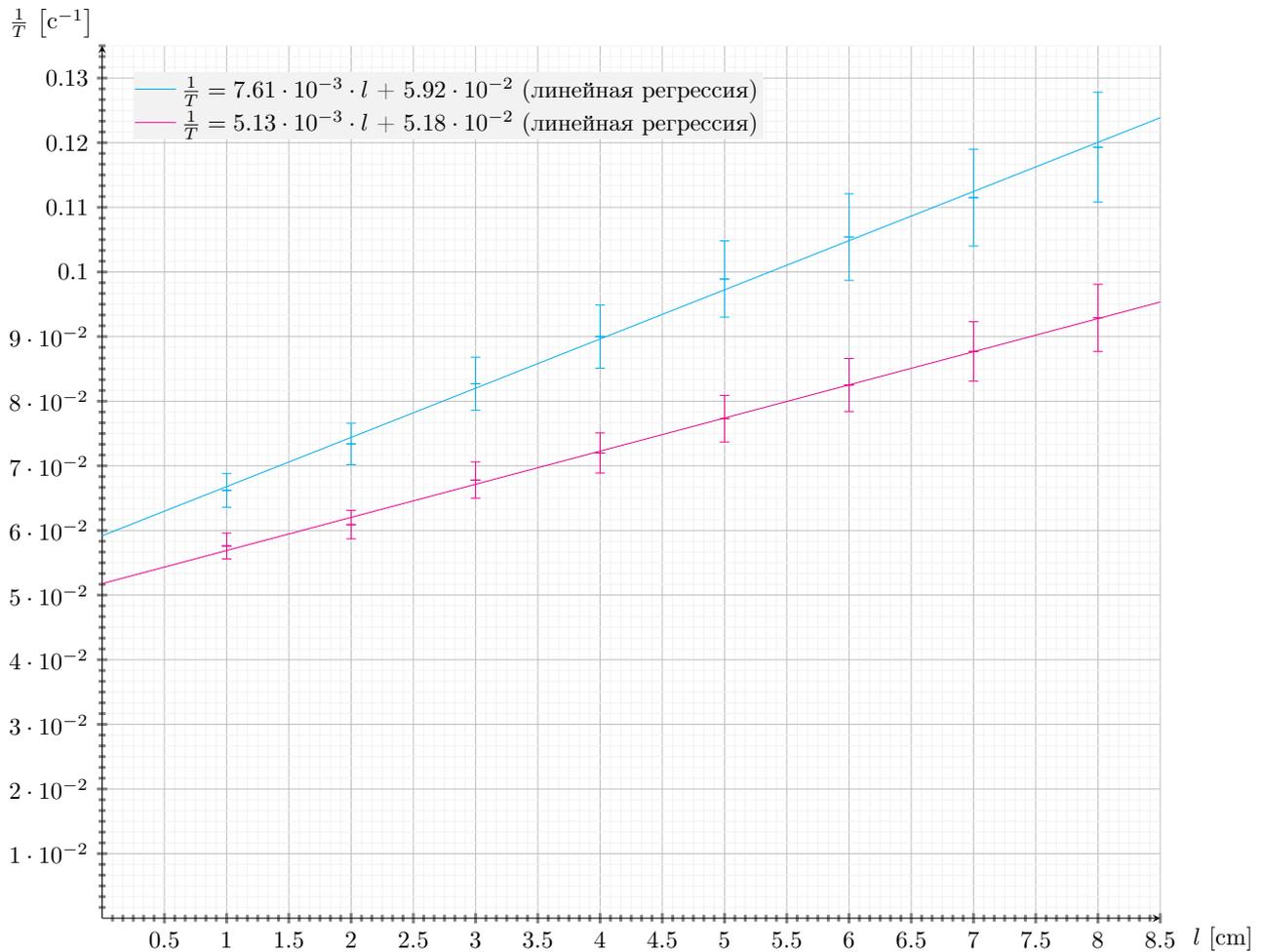
$$\frac{2\pi}{T} = \frac{mgl + mg(a+b)}{J\omega} \quad (14)$$

$$\omega = \frac{mgT(l+a+b)}{2\pi J} \quad (15)$$

$$\omega_{15} = \frac{208 \cdot 980 \cdot 11.11 \cdot 11}{2 \cdot 3.14 \cdot 16287} \approx 260 [c^{-1}] \quad (16)$$

$$\omega_{18} = \frac{208 \cdot 980 \cdot 16.41 \cdot 9}{2 \cdot 3.14 \cdot 16287} \approx 294 [c^{-1}] \quad (17)$$

3.3 Зависимость $\frac{1}{T}$ от l

Рис. 4: Зависимость $\frac{1}{T}$ от l

3.4 Коэффициенты A и B

Из графика нашли уточненные данные по коэффициентам $A_{15}, B_{15}, A_{18}, B_{18}$

$$A_{15} \left[= \frac{mg}{2\pi J\omega_{15}} \right] = 5.13 \cdot 10^{-3} \quad (18)$$

$$B_{15} \left[= \frac{mg(a+b)}{2\pi J\omega_{15}} \right] = 5.18 \cdot 10^{-2} \quad (19)$$

$$A_{18} \left[= \frac{mg}{2\pi J\omega_{18}} \right] = 7.61 \cdot 10^{-3} \quad (20)$$

$$B_{18} \left[= \frac{mg(a+b)}{2\pi J\omega_{18}} \right] = 5.92 \cdot 10^{-2} \quad (21)$$

3.5 Момент инерции из графика

Тогда можем найти момент инерции через коэффициенты:

$$J_{A15} = \frac{mg}{2\pi\omega_{15}A_{15}} = \frac{208 \cdot 980}{2 \cdot 3.14 \approx 260 \cdot 5.13 \cdot 10^{-3}} \approx 17873 [g \cdot cm^2] \quad (22)$$

$$J_{A18} = \frac{mg}{2\pi\omega_{18}A_{18}} = \frac{208 \cdot 980}{2 \cdot 3.14 \cdot 294 \cdot 7.61 \cdot 10^{-3}} \approx 14507 [g \cdot cm^2] \quad (23)$$

$$J_{B15} = \frac{mg(a+b)}{2\pi\omega_{15}B_{15}} = \frac{208 \cdot 980 \cdot 7}{2 \cdot 3.14 \cdot 260 \cdot 5.18 \cdot 10^{-2}} \approx 16870 [g \cdot cm^2] \quad (24)$$

$$J_{B18} = \frac{mg(a+b)}{2\pi\omega_{15}B_{15}} = \frac{208 \cdot 980 \cdot 7}{2 \cdot 3.14 \cdot 294 \cdot 5.92 \cdot 10^{-2}} \approx 13054 [g \cdot cm^2] \quad (25)$$

$$\langle J \rangle = 15576 [g \cdot cm^2] \quad (26)$$

Заключение

В проведенной лабораторной работе было экспериментально рассмотрено поведение гироскопа с двумя и тремя степенями свободы, изучено явление прецессии гироскопа.

Найден момент инерции ротора из геометрических соображений:

$$J = 16287 [g \cdot cm^2] \quad (27)$$

Измерены периоды прецессии T для различного удаления l груза от тела гироскопа. По рассчитанному J , найденным $a = 6cm$ и $b = 1cm$ и измеренному T оценили собственную угловую скорость (скорость вращения ротора):

Для 15 вольт

$$\omega_{15} = 260 [c^{-1}] \quad (28)$$

Для 18 вольт

$$\omega_{18} = 294 [c^{-1}] \quad (29)$$

Построили график зависимости $\frac{1}{T}$ от l , откуда, найдя константы $A_{15}, B_{15}, A_{18}, B_{18}$:

$$A_{15} = 5.13 \cdot 10^{-3} \quad (30)$$

$$B_{15} = 5.18 \cdot 10^{-2} \quad (31)$$

$$A_{18} = 7.61 \cdot 10^{-3} \quad (32)$$

$$B_{18} = 5.92 \cdot 10^{-2} \quad (33)$$

Нашли момент инерции через эти константы:

$$J_{A15} = 17873 [g \cdot cm^2] \quad (34)$$

$$J_{A18} = 14507 [g \cdot cm^2] \quad (35)$$

$$J_{B15} = 16870 [g \cdot cm^2] \quad (36)$$

$$J_{B18} = 13054 [g \cdot cm^2] \quad (37)$$

И среднее значение близко к первому расчетному:

$$\langle J \rangle = 15576 [g \cdot cm^2] \quad (38)$$