Примечание: кликнув по номеру задачи, автоматически перейдете к её решению

6.8. Найти распределение комплексной амплитуды $\mathbf{E}(x)$ вектора переменного электрического поля, представляемого в виде $\mathrm{Re}\,(\mathbf{E}(x)\,e^{i\omega t})$, внутри проводящего плоского слоя толщины $2a$ с проводимостью $\sigma \gg \omega$ и магнитной проницаемостью μ. На границах слоя ($x = \pm a$) задана амплитуда тангенциальной компоненты поля: $E_y(-a) = E_y(a) = E_0$. Изобразить графически «моментальные снимки» поля при различных t для двух случаев: а) $a \gg \delta$ и б) $a \ll \delta$ ($\delta = c/\sqrt{2\pi\sigma\mu\omega}$ — толщина скин-слоя в проводнике).

6.9. В предыдущей задаче найти также при $a \gg \delta$:

а) распределение магнитного поля в слое $H_z(x)\,e^{i\omega t}$;

б) сдвиг фаз φ между полями E_y и H_z при $x = \pm a$;

6.10. Решить задачу, аналогичную 6.8, если на одной границе слоя ($x = -a$) $E_y(-a) = E_0$, а на другой границе ($x = 0$):

а) лежит идеально проводящий лист;

6.12. Плоский конденсатор с круглыми пластинами подключен к источнику переменного напряжения $U = U_0 \sin\omega t$. Найти магнитное поле внутри конденсатора $\mathbf{H}$ при условии $d \ll a \ll c/\omega$, где d — расстояние между пластинами, a — радиус пластин, c — скорость света.

6.13. Бесконечный соленоид с числом витков в обмотке на единицу длины n питается переменным током $I = I_0 \sin\omega t$. Найти электрическое поле внутри соленоида при условии $a \ll c/\omega$ (a — радиус соленоида).

7.1. Вектор электрического поля гармонической плоской однородной волны задан в комплексной форме $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\,e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$. Векторы $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{k}$ лежат в плоскости xz.

1) Записать комплексные и действительные выражения для проекций электрического и магнитного полей на направления x, y, z, которые содержали бы явные зависимости от переменных x, y, z, t и параметров $|\mathbf{E}_0|, \omega, k_x, k_z$, для случая, когда волна распространяется вакууме.

2) Определить пространственные периоды поля λ_x, λ_z по осям x и z, если заданы: частота ω, диэлектрическая и магнитная проницаемости среды ε, μ и угол α между вектором $\mathbf{k}$ и осью z.

3) Определить λ_x, если заданы: ω, ε, μ, λ_z.

4) Определить частоту ω, если заданы: ε, μ, λ_x, $v^{(z)}$, где $v^{(z)}$ — скорость, с которой перемещается вдоль оси z точка пересечения фазового фронта с этой осью.

5) Построить графики зависимости отличных от нуля компонент электрического и магнитного полей от координат x, y, z в различные моменты времени t для случая, когда вектор $\mathbf{k}$ направлен по оси z.

6) Построить графики зависимости поля от координат x, z для различных значений угла α между $\mathbf{k}$ и осью z.

7.2. Волновой вектор $\mathbf{k}$ плоской однородной волны направлен под углом α к оси z. Среда имеет проницаемости ε и μ. Найти поперечные (по отношению к оси z) характеристические импедансы волны $\zeta_\perp$, связывающие поперечные компоненты полей соотношением $\mathbf{E}_\perp = \zeta_\perp[\mathbf{H}_\perp \mathbf{z_0}]$, для поляризаций типа TE ($E_z = 0$), TM ($H_z = 0$), TEM ($E_z = H_z = 0$).

7.3. Выразить амплитуды электрического и магнитного полей гармонической плоской однородной волны E_0 и H_0 в среде с проницаемостями ε и μ через среднюю за период плотность потока энергии S. Вычислить значения E_0 (в В/см) и H_0 (в эрстедах и в А/м) в вакууме при S=1 кВт/см^2.

7.5. Найти комплексную диэлектрическую проницаемость среды $\varepsilon_c = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$, если ее магнитная проницаемость $\mu = 1$ и если для распространяющейся в данной среде плоской волны известны:

а) ее частота ω, скорость v перемещения волнового фронта и расстояние L, на котором амплитуда убывает в e раз;

б) сдвиг фаз между электрическим и магнитным полями φ и отношение их амплитуд $E_0/H_0 = p$.

7.7. Найти магнитное поле $\mathbf{H}$ неоднородной плоской волны в среде с проницаемостями ε и μ, если электрическое поле волны задано в виде $E_y = E_0 \exp\,(i(\omega t - hz) - \kappa x)$, $E_x = E_z = 0$. Каким образом связаны между собой параметры κ, h, ω, ε, μ? При каком условии поляризация магнитного поля близка к круговой?

7.13. Получить выражения для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ стоячей волны. Чему равен сдвиг фаз φ между полями? Изобразить «моментальные снимки» полей в различные моменты времени.

7.14. Электромагнитное поле представляет собой суперпозицию двух гармонических плоских однородных волн с одинаковыми частотами и амплитудами. Векторы электрического поля в обеих волнах параллельны оси x. Волновые векторы $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ лежат в плоскости yz, причем $k_{1z} = k_{2z}$, $k_{1y} = -k_{2y}$. Написать выражения для компонент суммарного поля. Построить графики, иллюстрирующие поведение полей в пространстве и времени. Нарисовать картину силовых линий магнитного поля.

8.1. Плоская волна с вектором электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{x_0} E_0\,e^{i(\omega t - kz)}$ падает в среде с проницаемостями ε и μ, занимающей область $z < 0$, на плоскость $z = 0$ с заданным поверхностным импедансом $\zeta_s = E_x(0)/H_y(0)$.

1) Найти коэффициент отражения волны Γ.

2) Получить формулу пересчета импеданса, позволяющую определить импеданс суммарного поля падающей и отраженной волн $\zeta(L) = (E_x/H_y)_{z=-L}$ на расстоянии L от границы.

3) Найти функцию $|E|^2(z)$ и определить коэффициент стоячей волны КСВ = $|E|^2_{\max}/|E|^2_{\min}$.

4) Что можно сказать об импедансе ζ_s при КСВ = 1 и при КСВ =∞?

8.3. Пользуясь формулой пересчета импеданса (см. задачу 8.1(2), получить выражение для коэффициента отражения Γ плоской волны от плоского слоя толщины d с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε, μ, разделяющего среды 1 и 2 с проницаемостями ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2. Волна падает на слой по нормали из среды 1. Найти условия, при которых $\Gamma = 0$, для случаев, когда среды 1 и 2: а) одинаковы, б) различны.

9.7. Излучение источника распределено равномерно внутри сектора углов $-\alpha < \varphi < \alpha$, $90° - \beta < \theta < 90° + \beta$ (φ – азимутальный, θ — полярный углы в сферической системе координат). Вне этого сектора излучение отсутствует. Найти амплитуду электрического поля в дальней зоне на расстоянии R от источника, если излучаемая им мощность равна P. Найти численное значение амплитуды в единицах В/см при $\alpha = \beta = 5°$, $R = 100$ км, $P = 100$ кВт.

9.9. Вдоль оси z течет переменный линейный ток $I\,e^{i\omega t}$, амплитуда которого одинакова ($I = \mathrm{const} \neq 0$) во всех точках отрезка $|z| \leq L$ и равна нулю вне этого отрезка.

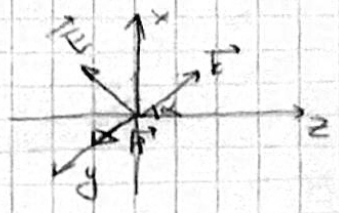
1) Начиная с каких расстояний r от начала координат можно считать сформированной диаграмму направленности данного излучателя?

2) Получить выражения для векторного потенциала $\mathbf{A}$ и полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в дальней зоне.

3) Исследовать и построить в полярных координатах диаграмму направленности $|H|^2(\theta)$ для случаев $kL \ll 1$ и $kL \gg 1$ (θ — сферический полярный угол).

Задачи

№1



$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$$\sin\alpha = \frac{k_x}{|k|} = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}}$$

а) $E_y = 0$, $E_x = |\vec{E}_0| \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \cdot e^{i\omega t - ik_x x - ik_z z}$

$E_z = -|\vec{E}_0| \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} e^{i\omega t - ik_x x - ik_z z}$

$E_y = 0$, $E_x = |\vec{E}_0| \frac{k_z}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \cos(\omega t - k_x x - k_z z)$, $E_z = -|\vec{E}_0| \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} \cos(\omega t - k_x x - k_z z)$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H}$ (т.к. вакуум $\mu = 1$)

$$\vec{H} = \frac{i}{k_0}\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{i}{k_0}\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} = 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & E_y \end{vmatrix} = \vec{y}_0 \frac{i}{k_0}\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$H_x = 0$, $H_z = 0$, $H_y = \frac{i}{k_0}\left(|\vec{E}_0| \frac{-ik_z^2}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}} + |\vec{E}_0| \frac{-ik_x^2}{\sqrt{k_x^2+k_z^2}}\right) e^{i\omega t - ik_x x - ik_z z} =$

$= \frac{|\vec{E}_0|}{k_0}\sqrt{k_x^2+k_z^2}\, e^{i\omega t - ik_x x - ik_z z}$ $\qquad \frac{\sqrt{k_x^2+k_z^2}}{k_0} = \frac{k}{k_0} = \frac{k_0\sqrt{\varepsilon\mu}}{k_0} = 1$ $\left(\begin{matrix}\varepsilon = 1 \\ \mu = 1\end{matrix}\right)$

$H_x = 0$, $H_z = 0$, $H_y = \frac{|\vec{E}_0|}{k_0}\sqrt{k_x^2+k_z^2}\cos(\omega t - k_x x - k_z z) = |\vec{E}_0|\cos(\omega t - k_x x - k_z z)$

б) $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{2\pi}{\sin\alpha \cdot k} = \frac{2\pi}{\sin\alpha \cdot k_0\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{2\pi \cdot c}{\sin\alpha \cdot \omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{k \cdot \cos\alpha} = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\alpha}$

в) $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{2\pi \cdot c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{2\pi \cdot c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{2\pi \cdot c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k_z}{k}\right)^2}} =$

$= \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{k}{\sqrt{k_0^2\varepsilon\mu - \frac{4\pi}{\lambda_z^2}}} = \frac{2\pi\lambda_z}{\sqrt{\lambda_z^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\mu - 4\pi}}$

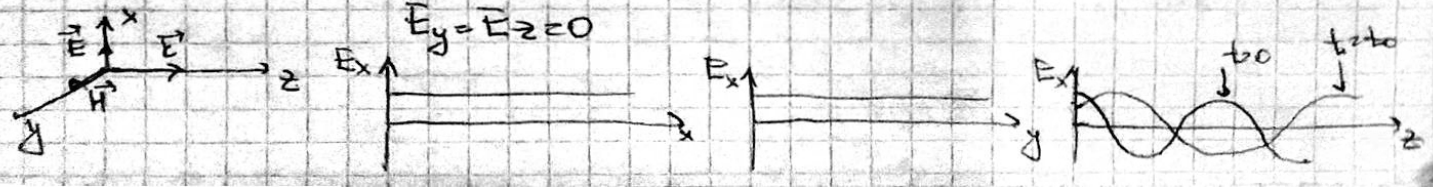
г) $v^{(z)} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega\lambda_z}{2\pi} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon\mu - \frac{4\pi}{\lambda_x^2}}}$

$v^{(z)2}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \frac{4\pi}{\lambda_x^2}\right) = \omega^2$

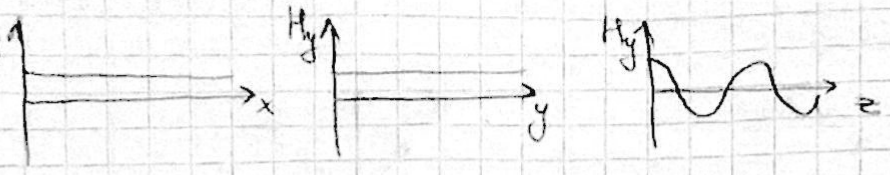
$\omega^2\left(\frac{v^{(z)2}\varepsilon\mu}{c^2} - 1\right) = \frac{4\pi v^{(z)2}}{\lambda_x^2}$

$\omega^2 = \frac{c^2 4\pi (v^{(z)})^2}{\lambda_x^2} \frac{1}{\frac{v^{(z)2}}{c^2}\varepsilon\mu - 1} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi v^{(z)} c}{\lambda_x} \frac{1}{\sqrt{\frac{v^{(z)2}}{c^2}\varepsilon\mu - 1}}$

д) $E_y = E_z = 0$



$H_x = H_z = 0$, H_y



№6.8.

$$\Delta E + \tilde{k}^2 E = 0 \qquad E_y(-a) = E_y(a) = E_0$$

$$\vec{E}(x) = E_y(x)\,\vec{y}_0$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} \qquad \frac{d^2 E_y}{dx^2} + \tilde{k}^2 E_y = 0$$

$$E''_{xx} + \tilde{k}^2 E = 0$$

Это уравнение у: $\Box \vec{E} = 0$ т.к. источников нет

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{E}(x) e^{i\omega t} - \frac{1}{v^2}(i\omega)^2 \vec{E}(x) e^{i\omega t} = 0$$

$$\Delta \vec{E}(x) + \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon_k \mu)\vec{E}(x) = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_k \mu \qquad \tilde{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_k \mu} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\left(\varepsilon - i\frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)} = \frac{\omega}{c}\sqrt{-i\frac{4\pi\sigma\mu}{\omega}} = \frac{1-i}{\delta}$$

$$p^2 + \tilde{k}^2 = 0 \qquad p = \pm i\tilde{k} = \pm \underbrace{\left(\frac{1+i}{\delta}\right)}_{\tilde{k}}$$

$$E_y(x) = A\,ch(\tilde{k}x) + B\,sh(\tilde{k}x)$$

$$E_y(-a) = A\,ch(\tilde{k}a) - B\,sh(\tilde{k}a) \quad (1)$$

$$E_y(a) = A\,ch(\tilde{k}a) + B\,sh(\tilde{k}a) \quad (2)$$

Складываем $(1)+(2) \Rightarrow A = E_0\,ch^{-1}(\tilde{k}a)$

Вычитаем $(1)-(2) \Rightarrow B = 0$

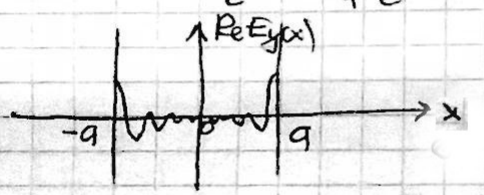
$$E_y(x) = E_0\frac{ch(\tilde{k}x)}{ch(\tilde{k}a)} = E_0\frac{ch\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{ch\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}$$

а) $a \gg \delta$

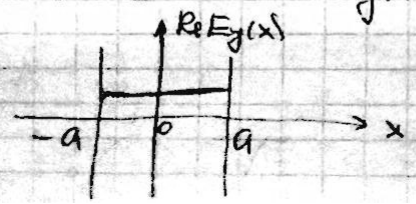
$$E_y(x) = E_0\frac{e^{\frac{1+i}{\delta}x} + e^{-\frac{1+i}{\delta}x}}{e^{\frac{1+i}{\delta}a} + e^{-\frac{1+i}{\delta}a}}$$

при $x \to a$ $E_y(x) \to E_0$

при $x \to 0$ $E_y(x) \to \frac{E_0}{\text{большое число}} \to 0$



б) $a \ll \delta$ $\quad E_y(x) \to E_0$



№6.9 (а, в)

а) $a \gg \delta$

$$E_y(x) = E_0 \frac{ch\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{ch\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}$$

$\vec{H} = Re(\vec{z}H_z(x)e^{i\omega t})$

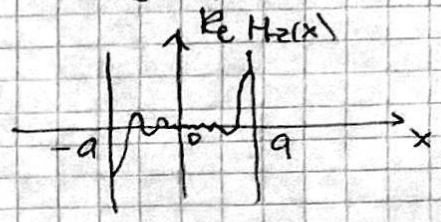
$rot\vec{E}(x) = -ik_0\mu\vec{H}(x)$

$$\vec{H}(x) = \frac{i}{k_0\mu}\begin{vmatrix} \vec{x_0} & \vec{y_0} & \vec{z_0} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}=0 & \frac{\partial}{\partial z}=0 \\ 0 & E_y(x) & 0 \end{vmatrix} = \frac{i}{k_0\mu}\vec{z_0}\frac{\partial E_y(x)}{\partial x}$$

$$H_z(x) = \frac{i}{k_0\mu}E_0\frac{sh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{ch\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}\cdot\frac{1+i}{\delta} = \frac{(i-1)}{k_0\mu\delta}E_0\frac{sh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{ch\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}$$

при $x \to 0$ $H_z(x) \to 0$

при $x \to \pm a$ $H_z(x) \to \pm$ какому-то числу



в) $$\eta_s = \frac{E_y}{H_z} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_k}}$$

$$\frac{E_y}{H_z} = \frac{E_0\cancel{ch\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}}{\cancel{ch\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}(i-1)}\frac{ch\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)k_0\mu\delta}{E_0 sh\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)} = \frac{k_0\mu\delta}{(i-1)}\cdot\frac{ch\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)}{sh\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)} =$$

$$= -\frac{k_0\mu\delta}{2}(1+i)\,th\left(\frac{1+i}{\delta}a\right) \approx -\frac{k_0\mu\delta}{2}(1+i) = -\frac{k_0\mu}{2}\frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}(1+i) =$$

$$= -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega\mu}{4\pi\sigma}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{4\pi\sigma}} = \sqrt{\frac{\mu}{-i\frac{4\pi\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_k}}$$

№6.10 (а)

$E_y(-a) = E_0$ Идеально проводящий лист: $E_\tau = 0$

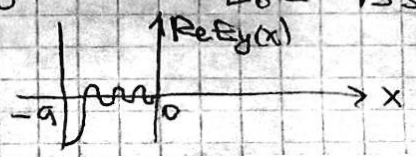
$$\frac{d^2E_y(x)}{dx^2} + k^2E_y = 0 \qquad k = \frac{1-i}{\delta}$$

$$p^2 = \pm ik^2 = \pm\frac{1+i}{\delta}$$

$$E_y(x) = A\,ch\left(\frac{1+i}{\delta}x\right) + B\,sh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)$$

$E_\tau(0) = 0 = E_y(0) \Rightarrow E_y(0) = A = 0$ $\qquad E_0 = -B\,sh\left(\frac{1+i}{\delta}a\right)$

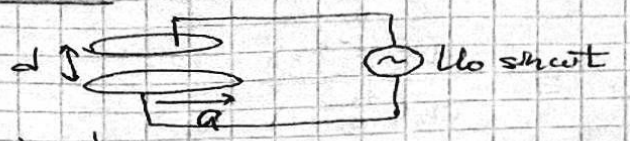
$$\Rightarrow E_y(x) = -E_0\frac{sh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}{sh\left(\frac{1+i}{\delta}x\right)}$$



№6.12.

$U = U_0 \sin\omega t$

$d \ll a \ll c/\omega$



Условие квазистатики: $l \ll \lambda \sim \frac{1}{k}$

$a \ll \frac{c}{\omega} = \frac{1}{k}$ => у нас квазистационарный процесс

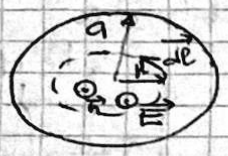
=> $U = E \cdot d$

$E = \frac{U_0 \sin\omega t}{d}$

$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, d\vec{S} + \frac{4\pi}{c} \underset{0}{\underset{\parallel}{I}}$

т.к. тока нет

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$



$H_\varphi 2\pi r = \frac{1}{c}\int_0^r \frac{\omega \varepsilon U_0}{d} \cos\omega t\, 2\pi r\, dr$

$H_\varphi = \frac{\omega \varepsilon U_0 \cos\omega t\, \pi r^2}{c d\, 2\pi r} = \frac{\omega \varepsilon}{2cd} U_0 \cos\omega t\, r$

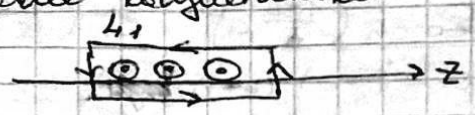
$r < a$

№6.13.

Дано: n, $I = I_0 \sin\omega t$

Есть условие $a \ll c/\omega$ - это условие квазистатики

$\oint_{L_1} \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I'$

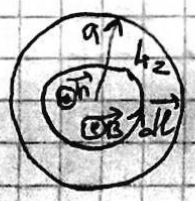


$I' = n \Delta l\, I_0 \sin\omega t$

$H_z \Delta l = n \Delta l\, I_0 \sin\omega t\, \frac{4\pi}{c}$

$H_z = \frac{4\pi}{c} n I_0 \sin\omega t$

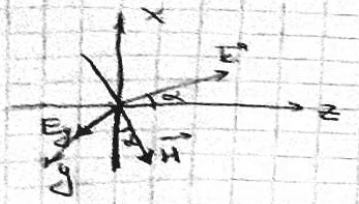
$\oint_{L_2} \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int_{S'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{S}$ $\quad \vec{B} = \mu \vec{H}$ $\quad B_z = \frac{4\pi\mu}{c} I_0 n \sin\omega t$



$E_l 2\pi r = -\frac{4\pi\mu}{c} I_0 n \omega \cos\omega t\, \pi r^2$

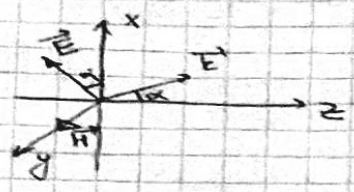
$E_l = -\frac{2\mu\pi}{c} I_0 n \omega \cos\omega t\, r \quad (0 < r < a)$

№7.2



TE: $E_z = 0$ $\quad \vec{H} = H_x \vec{x_0} + H_z \vec{z_0}$

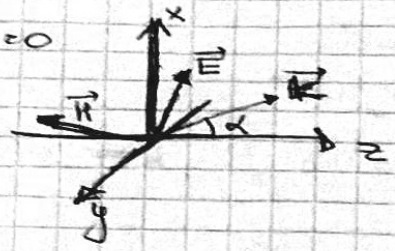
$$\eta_\perp = \frac{E_\perp}{H_\perp} = \frac{E_y}{H_x} = \frac{E_y}{H\cos\alpha} = \frac{E}{H\cos\alpha} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\cos\alpha}$$



TM: $H_z = 0$, $\quad \vec{E} = E_x \vec{x_0} + E_z \vec{z_0}$

$$\eta_\perp = \frac{E_\perp}{H_\perp} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E\cos\alpha}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cos\alpha$$

TEM: $E_z = H_z = 0$



$$\eta_\perp = \frac{E_\perp}{H_\perp} = \frac{E}{H} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

№7.5.

$\varepsilon_c = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$, $\mu = 1$

а) Дано: ω, v, L

$$(\vec{k},\vec{k}) = k_0^2 \varepsilon_c \mu = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_c \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{c^2}{\omega^2}(\vec{k},\vec{k})$$

$\vec{k} = \vec{k_1} - i\vec{k_2}$

Амплитуда убывает в e раз при $L \Rightarrow e^{-k_2 L} = e^{-1} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{L}$

$k_1 = \frac{\omega}{v}$

$$\varepsilon_c = \frac{c^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{v} - i\frac{1}{L}\right)^2 = \frac{c^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega^2}{v^2} - 2i\frac{\omega}{Lv} - \frac{1}{L^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{c^2}{v^2} - \frac{c^2}{\omega^2 L^2}\right) - 2i\frac{c^2}{\omega L v}$$

$$\varepsilon_r = \frac{c^2}{v^2} - \frac{c^2}{\omega^2 L^2} \qquad \varepsilon_i = -2\frac{c^2}{\omega L v}$$

б) $\varphi_E - \varphi_H = \varphi$ $\qquad E_0/H_0 = p$

$$\eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_0 e^{i\varphi_E}}{H_0 e^{i\varphi_H}} = \frac{E_0}{H_0} e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_c}}$$

$$p^2 e^{2i\varphi} = \frac{1}{\varepsilon_c} \qquad \varepsilon_c = \frac{1}{p^2}e^{-2i\varphi} = \frac{1}{p^2}(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_r = \frac{\cos 2\varphi}{p^2} \qquad \varepsilon_i = -\frac{\sin 2\varphi}{p^2}$$

№7.7

$$E_y = E_0 e^{i\omega t - ihz - kx} \qquad E_x = E_z = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{i}{k_0\mu}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}=0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\vec{x}_0\frac{\partial E_y}{\partial z} + \vec{z}_0\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$H_x = -\frac{i}{k_0\mu}E_0(-ih)e^{i\omega t - ihz - kx} = -\frac{E_0 h}{k_0\mu}e^{i\omega t - ihz - kx}$$

$$H_z = -\frac{i}{k_0\mu}kE_0 e^{i\omega t - ikz - kx} \qquad H_y = 0$$

$$E_y = E_0 e^{i\omega t}e^{-i\vec{k}\vec{r}} \qquad \vec{k} = h\vec{z}_0 - ik\vec{x}_0$$

$$(\vec{k},\vec{k}) = k_0^2\varepsilon\mu \rightarrow h^2 - k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu$$

Чтобы была круговая поляризация, то $H_x = H_z \Rightarrow h = ik$

но $h^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu = k^2$

и чтобы $h^2 \approx k^2$ нужно чтобы $h^2 \gg \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu$ – тогда поляризация будет близка к круговой.

№7.3.

$$\vec{S}^T = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}[\vec{E},\vec{H}^*]$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}+i\omega t} \qquad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}+i\omega t}$$

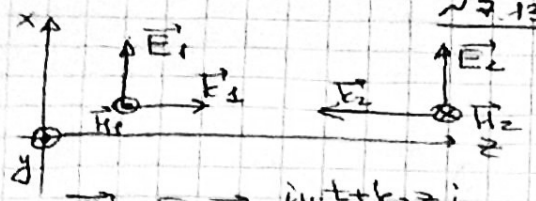
$$\eta = \frac{E_0}{H_0}$$

$$\vec{S}^T = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\left[\vec{E}_0 e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}, \frac{1}{\eta}\vec{E}_0^* e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}\right] = \frac{c}{8\pi\eta}|\vec{E}_0|^2$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi S}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

$$H_0 = E_0\frac{1}{\eta} = \sqrt{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{8\pi S}{c}}$$

№7.13.



$\vec{E}_1 = E_0 \vec{x}_0 e^{i\omega t - ik_1 z}$

$\vec{H}_1 = H_0 \vec{y}_0 e^{i\omega t - ik_1 z}$

$\vec{E}_2 = E_0 \vec{x}_0 e^{i\omega t + k_2 z i}$ $\qquad \vec{H}_2 = \vec{y}_0 H_0 e^{i\omega t + ik_2 z}$

$k_1 = k_2 \equiv k$

$$\eta_1 = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \rightarrow H_0 = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

$$\eta_2 = \frac{E_0}{-H_0} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \rightarrow H_0 = -E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

$$\vec{E}_\Sigma = E_0 \vec{x}_0 e^{i\omega t}\left(e^{-ikz} + e^{ikz}\right) = E_0 \vec{x}_0 e^{i\omega t}\left(\cos(kz) - i\sin(kz) + \cos(kz) + i\sin(kz)\right) =$$

$$= E_0 \vec{x}_0 e^{i\omega t}\, 2\cos(kz)$$

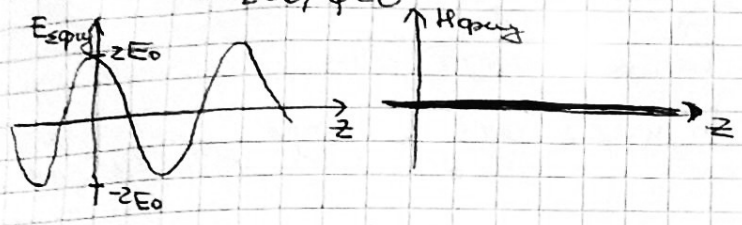
$$\vec{H}_\Sigma = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \vec{y}_0 e^{i\omega t}\left(e^{-ikz} - e^{ikz}\right) = E_0 \vec{y}_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, e^{i\omega t}\left(\cos kz - i\sin kz - \cos kz - i\sin kz\right)$$

$$= \vec{y}_0 E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, e^{i\omega t}\left(-2i\sin(kz)\right) = \vec{y}_0 E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, 2\sin(kz)\left(-i\cos(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi)\right)$$

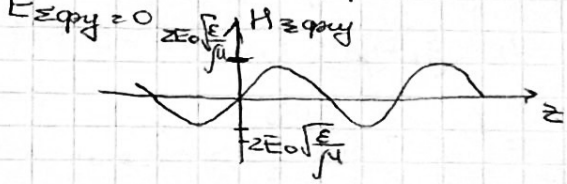
$$\vec{E}_{\Sigma\text{физ}} = 2E_0 \vec{x}_0 \cos(kz)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{H}_{\Sigma\text{физ}} = -2E_0 \vec{y}_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \sin(kz)\sin(\omega t + \varphi)$$

$t = 0,\ \varphi = 0$

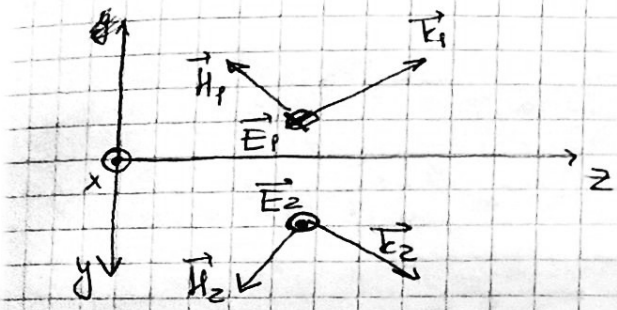


$t = \frac{T}{2\omega},\ \varphi = 0$



Сдвиг фаз $= \frac{\pi}{2}$.

№7.14.



$k_{1z} = k_{2z}, \quad k_{1y} = -k_{2y}$

$\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega \qquad E_{01} = E_{02} \equiv E_0$

$$E_x = E_0 e^{i\omega t}\left(e^{-ik_{2z}z - ik_{2y}y} + e^{-ik_{1z}z - ik_{1y}y}\right)$$

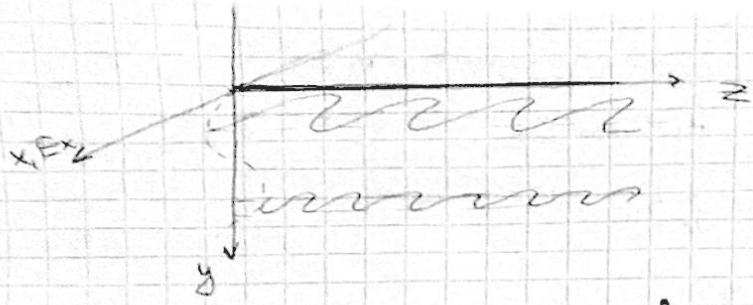
$$= E_0 e^{i\omega t} e^{-ik_{1z}z}\left(e^{-ik_{1y}y} + e^{ik_{1y}y}\right) = 2E_0\cos k_{1y}y \cdot$$

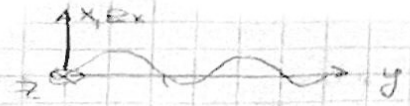
$$\cdot e^{i\omega t - ik_{1z}z}$$

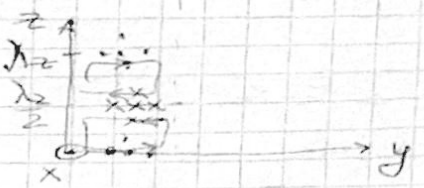
$$\mathrm{rot}\vec{E} = -ik_0\mu\vec{H} \rightarrow \vec{H} = \frac{i}{k_0\mu}\begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} = 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(\vec{y}_0 \frac{\partial E_x}{\partial z} - \vec{z}_0 \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\frac{i}{k_0\mu}$$

$$H_y = \frac{i}{k_0\mu} 2E_0\cos(k_{1y}y)(-ik_{1z})e^{i\omega t - ik_{1z}z} = \frac{2E_0 k_{1z}}{k_0\mu}\cos(k_{1y}y)e^{i\omega t - ik_{1z}z}$$

$$H_z = \frac{-i}{k_0\mu} 2E_0(-\sin k_{1y}y)k_{1y}e^{i\omega t - ik_{1z}z} = \frac{2iE_0 k_{1y}}{k_0\mu}\sin(k_{1y}y)e^{i\omega t - ik_{1z}z}$$







№7.15.

Дано: ω, $k_1 = \sqrt{k_{1y}^2 + k_{1z}^2}$ $\quad k_z = \cos\alpha \cdot k \quad k_y = \sin\alpha \cdot k$

7.15. Выразить структурные параметры поля в предыдущей задаче (длину волны λ_z и фазовую скорость $v^{(z)}$ в направлении оси z, расстояние L между плоскостями $y = \text{const}$, на которых $E_x = 0$, поперечный импеданс $\zeta_\perp = E_x/H_y$) через частоту поля ω и угол наклона α волновых векторов к оси z. При каком α средняя по времени плотность энергии магнитного поля w_m не зависит от координат?

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{k \cdot \cos\alpha} = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\cos\alpha}$$

$$v_\varphi^{(z)} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{k\cos\alpha} = \frac{\omega c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\cos\alpha} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\cos\alpha}$$

$E_x = 0 \Rightarrow \cos k_{1y}\cdot y = 0$

$$k_{1y}\cdot y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$y = \frac{1}{k_{1y}}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$$

$$y_0 = \frac{1}{k_{1y}}\frac{\pi}{2} \qquad y_1 = \frac{1}{k_{1y}}\frac{3\pi}{2}$$

$$L = y_1 - y_0 = \frac{1}{k_{1y}}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{k_{1y}} = \frac{\pi}{k\sin\alpha} = \frac{\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot\sin\alpha}$$

$$\zeta_\perp = \frac{E_x}{H_y} = \frac{2E_0\cos(k_{1y}y)\,e^{i\omega t - ik_{1z}z}\,k_0\mu}{2E_0 k_{1z}\cos(k_{1y}y)\,e^{i\omega t - ik_{1z}z}} = \frac{k_0\mu}{k_{1z}} = \frac{\omega\mu}{c}\frac{c}{\cos\alpha\,\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\overline{w_m} = \frac{1}{16\pi}\cdot\mu|\vec{H}|^2$$

$$\vec{H} = H_y\vec{y_0} + H_z\vec{z_0}$$

$$|\vec{H}|^2 = \vec{H}^*\vec{H} = \frac{2E_0}{k_0\mu}\left(k_{1z}\cos(k_{1y}y)\vec{y_0} + ik_{1y}\sin(k_{1y}y)\vec{z_0}\right)e^{i\omega t - ik_{1z}z}\cdot$$

$$\cdot\frac{2E_0}{k_0\mu}\left(k_{1z}\cos(k_{1y}y)\vec{y_0} - ik_{1y}\sin(k_{1y}y)\vec{z_0}\right)e^{-i\omega t + ik_{1z}z} = \frac{4E_0^2}{k_0^2\mu^2}\left(k_{1z}^2\cos^2(k_{1y}y) + k_{1y}^2\sin^2(k_{1y}y)\right)$$

Можем получить $k_{1z}^2 + k_{1y}^2 = k_1^2$, тогда $\overline{w_m}$ не будет зависеть от коорд-т

но когда $\cos(k_{1y}y) = \sin(k_{1y}y)$ это возможно при каком-то α, но

можно при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ получаю $k_{1y} = k_{1z} \Rightarrow$ сможем вынести

а $\cos^2(k_{1y}y) + \sin^2(k_{1y}y) = 1 \Rightarrow$ энергия не зависит от коорд-т

при $\alpha = \pi/4$

№8.1.

$\vec{E}^{(i)} = \vec{x_0} E_0 e^{i\omega t - ikz}$, ε, μ $\qquad \eta_s = \frac{E_x(0)}{H_y(0)}$

1) $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

$\vec{E}^{(n)} = \Gamma \vec{x_0} E_0 e^{i\omega t + ikz}$

$\eta = \frac{E_0}{H_0}$

$\vec{H}^{(i)} = \frac{1}{\eta} E_0 e^{i\omega t - ikz} \vec{n}$ $\qquad \vec{H}^{(n)} = -\frac{1}{\eta} \Gamma E_0 e^{i\omega t + ikz} \vec{n}$

$$\eta_s = \frac{E_x(0)}{H_y(0)} = \frac{E_0 e^{i\omega t} + \Gamma E_0 e^{i\omega t}}{\frac{1}{\eta} E_0 e^{i\omega t} - \frac{1}{\eta} \Gamma E_0 e^{i\omega t}} = \frac{1+\Gamma}{\frac{1}{\eta} - \frac{\Gamma}{\eta}}$$

$$\frac{\eta_s}{\eta}(1-\Gamma) = 1+\Gamma \qquad \frac{\eta_s}{\eta} - 1 = \Gamma\left(1 + \frac{\eta_s}{\eta}\right)$$

$$\Gamma = \frac{\eta_s - \eta}{\eta_s + \eta}$$

2) $$\eta(L) = \frac{E_x(-L)}{H_y(-L)} = \frac{E_0 e^{i\omega t + ikL} + \Gamma E_0 e^{i\omega t - ikL}}{\frac{1}{\eta} E_0 e^{i\omega t + ikL} - \frac{\Gamma}{\eta} E_0 e^{i\omega t - ikL}} =$$

$$= \eta \frac{e^{ikL} + \Gamma e^{-ikL}}{e^{ikL} - \Gamma e^{-ikL}} = \eta \frac{\eta_s e^{ikL} + \eta e^{ikL} + \eta_s e^{-ikL} - \eta e^{-ikL}}{\eta_s e^{ikL} + \eta e^{ikL} - \eta_s e^{-ikL} + \eta e^{-ikL}} =$$

$$= \eta \frac{\eta_s \cos(kL) + i\eta \sin(kL)}{\eta \cos(kL) + i\eta_s \sin(kL)}$$

3) $$|E_x|^2 = |E_0 e^{i\omega t - ikz} + \Gamma E_0 e^{i\omega t + ikz}|^2 = |E_0|^2 |1 \cdot e^{-ikz} + \Gamma e^{ikz}|^2 =$$

$$= |E_0|^2 \left((e^{-ikz} + \Gamma e^{ikz})(e^{ikz} + \Gamma^* e^{-ikz}) \right) = |E_0|^2 + \Gamma e^{2ikz} |E_0|^2 +$$

$$+ |E_0|^2 \Gamma^* e^{-2ikz} + |E_0|^2 \Gamma \Gamma^* = |E_0|^2 + |E_0 \Gamma|^2 + |E_0|^2 |\Gamma| (e^{2ikz + i\varphi} + e^{-2ikz - i\varphi}) =$$

$$= |E_0|^2 + |E_0 \Gamma|^2 + |E_0|^2 |\Gamma| 2\cos(2kz + \varphi)$$

$$|E_x|^2_{max} = |E_0|^2 (1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma|) = |E_0|^2 (1 + |\Gamma|)^2$$

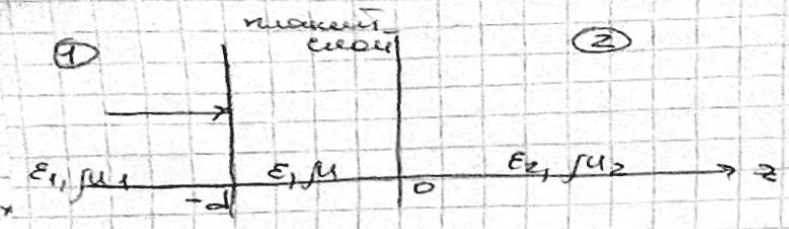
$$|E_x|^2_{min} = |E_0|^2 (1 + |\Gamma|^2 - 2|\Gamma|) = |E_0|^2 (1 - |\Gamma|)^2$$

$$\Rightarrow \quad KCB = \left(\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}\right)^2$$

4) $KCB = 1 \Rightarrow |\Gamma| = 0 \Rightarrow \eta_s = \eta$

$KCB = \infty \Rightarrow |\Gamma| = 1 \Rightarrow \eta_s = \pm i\eta_s$

№8.3.



$$\Gamma = \frac{Z(-d) - Z_1}{Z(-d) + Z_1}$$

$$Z(-d) = Z\,\frac{Z_2\cos kd + iZ\sin kd}{Z\cos kd + iZ_2\sin kd}$$

$$\eta(-d) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\cos kd + i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\sin kd}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\cos kd + i\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}\sin kd}$$

$$\Gamma = \frac{\eta(-d) - \eta_1}{\eta(-d) + \eta_1} = \frac{\eta(\eta_2\cos kd + i\eta\sin kd) - \eta_1(\eta\cos kd + i\eta_2\sin kd)}{\eta(\eta_2\cos kd + i\eta\sin kd) + \eta_1(\eta\cos kd + i\eta_2\sin kd)}$$

1) $\eta_1 = \eta_2$ $\quad \Gamma = 0 \Leftrightarrow \eta(\eta_2\cos kd + i\eta\sin kd) = \eta_1(\eta\cos kd + i\eta_2\sin kd)$

$$\cancel{\eta\eta_2\cos kd} + i\eta^2\sin kd = \cancel{\eta_1\eta\cos kd} + \eta_1\eta_2 i\sin kd$$

$\sin kd = 0$

$kd = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ при $\forall\ \eta_1$ и η_2

или

$$\eta^2 = \eta_1\eta_2$$

$$\eta = \sqrt{\eta_1^2} = \sqrt{\eta_2^2} = \eta_1 \text{ или } \eta_2$$

при $\forall$ толщине слоя

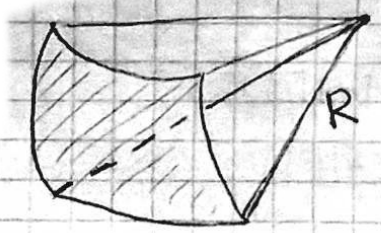
2) $\eta_1 \neq \eta_2$

$$\eta\cos kd(\eta_2 - \eta_1) + i\sin kd(\eta^2 - \eta_1\eta_2) = 0$$

$\cos kd = 0$ и $\eta^2 - \eta_1\eta_2 = 0$

$kd = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ $\quad \eta = \sqrt{\eta_1\eta_2}$

№9.7.



$-\alpha < \varphi < \alpha \qquad 90^\circ - \beta < \Theta < 90^\circ + \beta$

$$\vec{S}^T = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Re}[\vec{E}, \vec{H}^*]$$

$$\vec{S}^T = \frac{c}{8\pi}\,\frac{1}{\eta}\,|\vec{E}_0|^2$$

$$S_n = \frac{c}{8\pi\eta}\,|E_0|^2$$

$$S_n = \frac{P}{S_m}$$ ← площадь площадки

$$S_m = \iint dS = \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{90^\circ-\beta}^{90^\circ+\beta} R^2\sin\Theta\, d\varphi\, d\Theta = R^2\, 2\alpha\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right) =$$

$$= R^2\, 2\alpha(\sin\beta + \sin\beta) = 4\alpha R^2\sin\beta$$

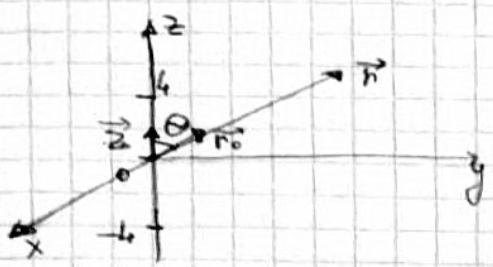
$$S_r = \frac{P}{4\alpha R^2 \sin\beta}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{S_r \eta_{st}}{c}} = \sqrt{\frac{\eta_{st} P}{c\, 4\alpha R^2 \sin\beta}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{Z_{st}\eta P}{c\alpha \sin\beta}}$$

9.9.

$$I' = \begin{cases} I e^{i\omega t}, & -L < z < L \\ 0, & z < -L,\ z > L \end{cases}$$

2) $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r}\vec{N}$, $\vec{N} = \int_V \vec{j}(\vec{r}\,')e^{-i\vec{k}\vec{r}\,'}dV'$



$\vec{k} = k\vec{r}_0$ $\qquad \vec{r}\,' = z'\vec{z}_0$

$\vec{k}\vec{r}\,' = k z' \cos\theta$

$dV' = \underbrace{dx'}_{=1}\underbrace{dy'}_{=1}dz' = dz'$

$\vec{j}(\vec{r}\,') = I e^{i\omega t}\vec{z}_0$

$$\vec{N} = e^{i\omega t} I \vec{z}_0 \int_{-L}^{L} e^{-ikz'\cos\theta}dz' = e^{i\omega t} I \vec{z}_0 \frac{i}{k\cos\theta}\left(e^{-ikL\cos\theta} - e^{ikL\cos\theta}\right)$$

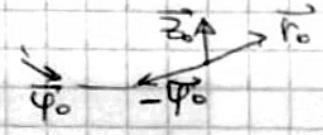
$$= e^{i\omega t} I \vec{z}_0 \frac{i}{k\cos\theta}(-1)\, 2i \sin(kL\cos\theta) = L\, 2 e^{i\omega t} I \vec{z}_0 \frac{\sin(kL\cos\theta)}{L k\cos\theta} =$$

$$= 2L e^{i\omega t} I \left(\operatorname{sinc}(kL\cos\theta)\right)\vec{z}_0$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\frac{e^{-ikr}}{r} 2L e^{i\omega t} I \operatorname{sinc}(kL\cos\theta)\vec{z}_0$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\mu}[\nabla, \vec{A}] = -\frac{i}{\mu}[\vec{k}, \vec{A}] = -\frac{i}{\mu}A_z k [\vec{r}_0, \vec{z}_0] =$$

$$= \frac{i}{\mu}A_z k \vec{\varphi}_0 \sin\theta$$



$\vec{E} = \eta[\vec{H}, \vec{n}]$ $\qquad \vec{n} \equiv \vec{r}_0$

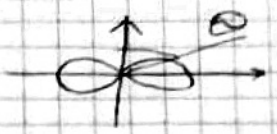
$$\vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[\vec{H}, \vec{r}_0] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_\varphi [\vec{\varphi}_0, \vec{r}_0] = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\vec{\theta}_0 \frac{i}{\mu}A_z k \sin\theta$$

$|H_\varphi|^2 \sim \sin^2\Theta \quad \left(\frac{\sin \xi_\varphi}{\xi_\varphi}\right)^2$

поляризационный множитель — дифр-ный множитель.

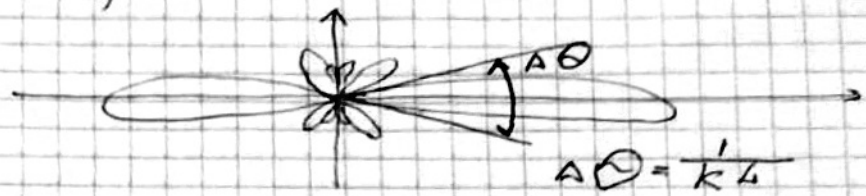
1) $kL \ll 1 \Rightarrow \left(\frac{\sin \xi_\varphi}{\xi_\varphi}\right)^2 \simeq 1$

$|H_\varphi|^2 \sim \sin^2\Theta$

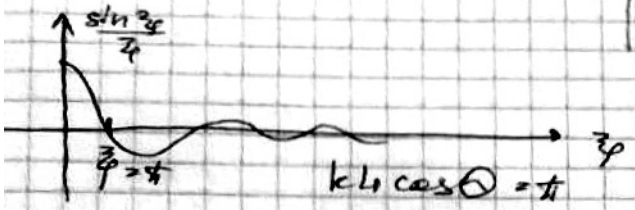


2)

$|H_\varphi|^2 \sim \sin^2\Theta \left(\frac{\sin \xi_\varphi}{\xi_\varphi}\right)^2$



$\Delta\Theta = \frac{1}{kL}$



$kL\cos\Theta = \pi$

$\cos\Theta = \frac{\pi}{kL}$

Введём угол добавляющий его до 90° $\quad \Theta = 90° - \alpha$

$\cos\Theta = \sin\alpha = \frac{\pi}{kL} \ll 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{kL}$