Задача Штурма-Лиувилля.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right)+(\lambda\rho(x)-q(x))X=0 \quad (1)$$

$X=X(x)$

Задача для однородного дифф. ур-я. Можно рассматривать на ∞ промежутке, но мы только на $x\in(0;l)$. Это краевая задача. На концах тоже задаётся граничное условие.

Условия, при которых ставится задача:

$$\left.\begin{array}{l} p(x)\in C^1(0,l),\ \rho(x),\ q(x)\in C(0,l) \\ p(x)\geq p_0>0,\ \rho(x)\geq \rho_0>0,\ x\in[0,l] \end{array}\right\}$$ условия, при которых ставится задача

Задача регулярная

(2) $\alpha_1 X'(0)-\beta_1 X(0)=0,\ \alpha_1\geq 0,\ \beta_1\geq 0,\ \alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$

Если коэфф-ты не обладают такими св-ми то могут быть решения, неограниченные в нуле.

(3) $\alpha_2 X'(l)+\beta_2 X(l)=0,\ \alpha_2\geq 0,\ \beta_2\geq 0,\ \alpha_2^2+\beta_2^2\neq 0$

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ – входные данные

λ – входной параметр

Те значения параметра λ, при которых (1) имеет нетривиальное решение, удовл-ее граничным условиям (2), (3), называются собственными значениями, а соответствующие решения — собственными функциями.

$X \equiv 0$ всегда решение — тривиальное

Задача заключается в отыскании всех собственных значений и собственных ф-ий.

$L_{2,\rho}(0,l)$ — пространство ф-ий, обладающих свойством: $\int_0^l f^2(x)\rho(x)dx < \infty$ — сходится

$\rho(x)$ — весовая функция.

В этом пространстве вводится понятие скалярного произведения:

$$(f(x),g(x)) = \int_0^l f(x)g(x)\rho(x)dx$$

А также норма: $\|f(x)\|^2 = (f(x),f(x)) = \int_0^l f^2(x)\rho(x)dx$

Пусть мы знаем λ (собств. значение)

2 $X_\lambda(x)$ — соответствующая собств. ф-я

$\|X_\lambda(x)\|^2 = \int_0^l X_\lambda^2(x)\rho(x)dx > 0$ (строго)

ф-я нормированна на единицу, если $\|X_\lambda(x)\|^2 = 1$

Если λ - собств. знач., то $cX_\lambda(x)$ - собств. ф-я, потому что задача однородная. Это позволяет для каждого λ поставить в соответствие ф-ю, которая будет нормирована на 1.

Предположим, $\|X_\lambda\|^2 = H$; $\frac{X_\lambda}{\sqrt{H}}$ - тоже собств. ф-я

Предположим, $\int_0^l X_\lambda^2(x)\rho(x)dx = H$

$\left\|\frac{X_\lambda}{\sqrt{H}}\right\|^2 = 1$

Свойство λ.

① Каждому собственному значению соответствует одна с точностью до множителя собственная функция.

Док-во: от противного

Предположим, λ - собственное значение

$X_\lambda(x)$ - собств. ф-я
$\tilde{X}_\lambda(x)$ - собств. ф-я } обе удовлетворяют (1), (2), (3)

$$\begin{cases} \alpha_1 X_\lambda'(0) - \beta_1 X_\lambda(0) = 0 \\ \alpha_1 \tilde{X}_\lambda'(0) - \beta_1 \tilde{X}_\lambda(0) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим как систему относительно α_1, β_1, которые $\alpha_1^2+\beta_1^2\neq 0$. Относительно них система линейная однородная. Имеет нетривиальное решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} X'_\lambda(0) & -X_\lambda(0) \\ \tilde{X}'_\lambda(0) & -\tilde{X}_\lambda(0) \end{vmatrix} = 0 = -X'_\lambda(0)\tilde{X}_\lambda(0) + X_\lambda(0)\tilde{X}'_\lambda(0)$$

$$\Delta = -W\left(X_\lambda(x), \tilde{X}_\lambda(x)\right)\Big|_{x=0}$$

$W(X_\lambda(x), \tilde{X}_\lambda(x)) \equiv 0$, тогда $X_\lambda = c\tilde{X}_\lambda(x)$ - решения линейно зависимы

② Собственные ф-ии, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны на промежутке $(0,l)$ с весом $\rho(x)$

Пусть $\lambda_n \sim X_n(x)$

$\lambda_m \sim X_m(x)$

Если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то $(X_n, X_m) = \int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho(x) dx = 0$.

Док-во: $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right) + (\lambda_n \rho(x) - q(x)) X_n = 0 \,\Big|\cdot X_m(x)$

$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_m}{dx}\right) + (\lambda_m \rho(x) - q(x)) X_m = 0 \,\Big|\cdot X_n(x)$

④ Домножаем, вычитаем и берём $\int$

$$\int_0^l \left[X_m(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right) - X_n(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_m}{dx}\right)\right]dx +$$

$$+(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx = 0.$$

$$u = X_m(x) \quad du = \frac{d}{dx}X_m(x)$$

$$dv = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right) \quad v = p(x)\frac{dX_n}{dx}$$

$$p(x)X_m(x)\frac{dX_n}{dx}\Big|_0^l - \int_0^l p(x)\frac{dX_n}{dx}\frac{d}{dx}X_m(x)\,dx - p(x)X_n(x)\frac{dX_m}{dx}\Big|_0^l +$$

$$+\int_0^l p(x)\frac{dX_m}{dx}\frac{d}{dx}X_n(x)\,dx + (\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx = 0$$

$$p(l)\left[X_n'(l)X_m(l) - X_m'(l)X_n(l)\right] - p(0)\left[X_m(0)X_n'(0) - X_n(0)X_m'(0)\right]$$

$$+(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx = 0$$

$$\begin{cases}\alpha_1 X_n'(0) - \beta_1 X_n(0) = 0\\ \alpha_1 X_m'(0) - \beta_1 X_m(0) = 0\end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} X_n'(0) & -X_n(0)\\ X_m'(0) & -X_m(0)\end{vmatrix} = -X_n'(0)X_m(0) + X_m'(0)X_n(0)$$

X_n, X_m - решения разных ур-ий

$$\begin{cases}\alpha_2 X_n'(l) - \beta_2 X_n(l) = 0\\ \alpha_2 X_m'(l) - \beta_2 X_m(l) = 0\end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} X_n'(l) & -X_n(l)\\ X_m'(l) & -X_m(l)\end{vmatrix} = -X_n'(l)X_m(l) + X_m'(l)X_n(l)$$

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx = 0$$

если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то $\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx = 0.$ ■

5

③ Все собственные значения вещественные

Док-во: от противного.

Предположим, $\lambda_0 = \lambda_0' + i\lambda_0''$, $\lambda_0'' \neq 0$ — комплексное собств. значение

$X_{\lambda_0}(x)$ — комплексно значная собств. ф-я

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_{\lambda_0}}{dx}\right) + \left((\lambda_0' + i\lambda_0'')\rho(x) - q(x)\right)X_{\lambda_0}(x) = 0$$

$$\alpha_1 X_{\lambda_0}'(0) - \beta_1 X_{\lambda_0}(0) = 0$$

$$\alpha_2 X_{\lambda_0}'(l) + \beta_2 X_{\lambda_0}(l) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\overline{X}_{\lambda_0}}{dx}\right) + \left((\lambda_0' - i\lambda_0'')\rho(x) - q(x)\right)\overline{X}_{\lambda_0}(x) = 0$$

$$\alpha_1 \overline{X}_{\lambda_0}'(0) - \beta_1 \overline{X}_{\lambda_0}(0) = 0$$

$$\alpha_2 \overline{X}_{\lambda_0}'(l) + \beta_1 \overline{X}_{\lambda_0}(l) = 0$$

$\lambda' - i\lambda_0'' = \overline{\lambda}_0$ — тоже собственное значение

$X_{\overline{\lambda}_0}(x) = \overline{X}_{\lambda_0}(x)$

$\lambda_0 \neq \overline{\lambda}_0$

по св-ву 2: $\int_0^l X_{\lambda_0}(x) X_{\overline{\lambda}_0}(x)\rho(x)dx = 0$ — ортогональны

$$\int_0^l X_{\lambda_0}(x)\overline{X_{\lambda_0}(x)}\rho(x)dx = 0$$

$$\int_0^l |X_{\lambda_0}(x)|^2\rho(x)dx = 0 \quad ?!$$

④ Если $q(x) \geq 0$, то все собственные значения неотрицательны.

⑥ Док-во: пусть λ_n — собств значение

$X_n(x)$ - соств. собств. ф-я, нормировано на 1

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right)+(\lambda_n s(x)-q(x))X_n=0 \quad / \cdot X_n(x)$$

$$\int_0^l X_n(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right)dx+\lambda_n\underbrace{\int_0^l X_n^2(x)s(x)dx}_{=1,\ \text{т.к. нормир.}}-$$

$$-\int_0^l q(x)X_n^2(x)dx=0$$

$$\lambda_n=-\int_0^l X_n(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right)dx+\int_0^l q(x)X_n^2(x)dx=$$

$$u=X_n(x) \quad du=\frac{d}{dx}X_n(x)$$

$$dv=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right) \quad v=p(x)\frac{dX_n}{dx}$$

$$=-X_n(x)p(x)\frac{dX_n}{dx}\Big|_0^l+\int_0^l p(x)\frac{dX_n}{dx}\cdot\frac{dX_n}{dx}dx+\int_0^l q(x)X_n^2(x)dx=$$

$$=-p(l)X_n(l)X_n'(l)+p(0)X_n(0)X_n'(0)+\underbrace{\int_0^l p(x)\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2dx}_{\geq 0}+$$

$$+\underbrace{\int_0^l q(x)X_n^2(x)dx}_{\geq 0}=0$$

$X_n(0)=0$, $X_n'(0)=0$ - гр. усл I рода, в этих усл-ях

$\lambda_n=0+\ldots$

Первое слагаемое $=0$. Пусть $\alpha_1\neq 0, \alpha_2\neq 0$

$$X_n'(0)=\frac{\beta_1}{\alpha_1}X_n(0)$$

$$X_n'(l)=-\frac{\beta_2}{\alpha_2}X_n(l)$$

John Eppes - Lonely Planet (лучший трек)

$$\lambda_n = p(l)\frac{\beta_2}{\alpha_2}X_n^2(l) + p(0)\frac{\beta_1}{\alpha_1}X_n^2(0) + \int_0^l p(x)(X_n')^2dx + \int_0^l q(x)X_n^2dx \geq 0$$

Это св-во связано со знаками в (2), (3)

(5) ∃ счетное множество собств. значений, кот. можно расположить в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$

Предельная точка для собственных значений находится на ∞, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$

Теорема Стеклова.

Пусть $f(x) \in C^2(0,l) \cap C^1[0,l]$ и удовлетворяет граничн. усл.: $\alpha_1 f'(0) - \beta_1 f(0) = 0$, тогда

$$\alpha_2 f'(l) + \beta_2 f(l) = 0$$

ф-ю $f(x)$ можно разложить в ряд по собственным ф-ям задачи (1)-(3):

(4) $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x)$ с коэфф-ми

(5) $$a_n = \frac{\int_0^l f(x)X_n(x)\rho(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)\rho(x)dx} = \frac{(f(x), X_n(x))}{\|X_n\|^2}$$

(8) Этот ряд сх-ся к ф-ии $f(x)$ абсолютно и равномерно.

$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x)$ - сх-ся равномерно, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): |f(x) - S_n(x)| \le \varepsilon, \ \forall x \in [0, l] \ n > N(\varepsilon)$

(4) $\cdot X_m(x) \rho(x)$ и $\int$:

$$\int_0^l f(x) X_m(x) \rho(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho(x) dx}_{=0, \text{ если } n \ne m} =$$

$$= a_m \int_0^l X_m^2(x) \rho(x) dx$$

$$a_m = \frac{\int_0^l f(x) X_m(x) \rho(x) dx}{\int_0^l X_m^2(x) \rho(x) dx}.$$

Пусть $f(x) \in L_{2,\rho}(0, l)$, тогда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x)$,

где $a_n = \frac{(f(x), X_n(x))}{\|X_n\|^2}$

этот ряд сх-ся к $f(x)$ по норме пространства $L_{2,\rho}$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \|f(x) - S_n(x)\|_{L_{2,\rho}} \le \varepsilon \ n > N(\varepsilon)$

$\int_0^l (f(x) - S_n(x))^2 \rho(x) dx \le \varepsilon^2.$

Метод разделения переменных.

Метод применим для уравнений 9
начальных, начально-краевых задач,
ур-ий гиперболического и параболического

типов, а также для краевых задач ур-ий эллиптического вида.

Условия применимости:

- Задача должна быть линейной (линейное ур-ние, нач. усл. и гранич. условие)
- В однородном ур-ии соответствующей задачи и однородных условиях соотв. задачи должны разделяться переменные

Принцип дискретной суперпозиции:

Пусть $\hat{L}u=0$ ($\hat{L}$ - дифф. линейный оператор)

$\hat{L}=\frac{d}{dx}$, $\hat{L}=\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+(\lambda\rho-p(x))$

$\hat{L}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial}{\partial x^2}$

$\hat{L}$ - линейный, если $\hat{L}(c_1u_1+c_2u_2)=c_1\hat{L}(u_1)+c_2\hat{L}(u_2)$

Пусть 1) $\hat{L}u=0$ - линейное ДУ

2) u_k, $k=\overline{1,\infty}$ - решения ур-я

(10) Тогда $u=\sum_{k=1}^{\infty}c_ku_k$ - также решение ур-я, если все производные, входящие в ур-е, можно вычислить перестановкой дифф-я и суммир-я.

Док-во: $\hat{L}\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_ku_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{L}(c_ku_k)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\underbrace{\hat{L}(u_k)}_{0}=0$.

Пример: решение задачи о свободных колебаниях струны методом разделения

(1) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \ t > 0$

(2) $u|_{t=0} = \varphi(x)$

(3) $u_t|_{t=0} = \psi(x)$

(4) $u|_{x=0} = 0$

(5) $u|_{x=l} = 0$

Решение ищется в виде: $u = X(x)T(t)$ (6)

$XT'' - a^2 X'' T = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{a^2 XT}$

$\frac{T''}{aT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$

$T'' + a^2 \lambda T = 0$ (7)

$X'' + \lambda X = 0$ (8)

В граничных условиях:

$T(t)X(0) = 0 \qquad X(0) = 0$ (9)

$T(t)X(l) = 0 \qquad X(l) = 0$ (10)

$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \ n \in \mathbb{N} \rightarrow (7)$

$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$

$T_n'' + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 T_n = 0$ (11) всё подставляем в (6)

$\omega_n = \frac{a\pi n}{l}$

$T_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t$ (12)

$u_n(x,t) = X_n T_n = (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\frac{\pi n x}{l}$, $n \in N$

Все ф-ии $u_n(x,t)$ удовл. (1) и грал. усл (3)-(5)

Применяем принцип суперпозиции

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t)\sin\frac{\pi n x}{l}, \ n \in N$$

При хорошей сходимости этот ряд-реш. (1) и удовлетворяет (1)-(5)

$$(2) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\sin\frac{\pi n}{l}x}_{X_n(x)} = \varphi(x)$$

$$A_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) X_n(x) \rho(x)\,dx}{\|X_n\|^2} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx \quad (14)$$

$$(3) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \psi(x)$$

$$B_n \omega_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx \quad (15)$$

Ответ: ряд (13) с коэфф. (14, 15)

12 ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

$$u(x,t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\left(\underbrace{\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}}_{\cos\varphi_n}\cos\omega_n t + \underbrace{\frac{B_n}{\sqrt{A_n^2+B_n^2}}}_{\sin\varphi_n}\sin\omega_n t\right)\sin\frac{\pi n x}{l} =$$

$$= \sqrt{A_n^2+B_n^2}\cos(\omega_n t - \varphi_n)\sin\frac{\pi n x}{l}$$ – стоячая волна

$$u_n(x_0,t) = \sqrt{A_n^2+B_n^2}\sin\frac{\pi n x_0}{l}\cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

ω_n - собственная частота колебаний струны

$\sin\frac{\omega n}{c}x_0 = 0$

$\frac{\omega n}{c}x_0 = \pi k \rightarrow x_0 = \frac{kl}{n}, k = 1, \dots, n-1$

$U_n(x_0, t) = 0$ - точки неподвижны. Это узлы стоячей волны

$\sin\frac{\omega n}{c}x_0 = \pm 1$ - пучности стоячей волны. Здесь амплитуда гармонической волны max.

$U_n(x, t_0) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\cos(\omega_n t - \varphi_n)\sin\frac{\pi x}{l}$

Профиль в $\forall t$.

$\cos(\omega_n t - \varphi_n) = 0 \Rightarrow U_n(x, t_0) = 0$, скорость max

$\cos(\omega_n t_0 - \varphi_n) = \pm 1 \Rightarrow$ Амплитуда max, скорость 0

$\omega_1 = \frac{a\pi n}{l}$

$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$ / плотность струны $\rho_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

A_n, B_n - определяются нач. отклонениями

$E_n = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\rho_0\left(\frac{\partial U_n}{\partial t}\right)^2 + T_0\left(\frac{\partial U_n}{\partial x}\right)^2\right)dx = \frac{m\omega_n^2}{4}(A_n^2 + B_n^2)$ [m=const]

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА И УРАВНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА (однор. ур-е и неоднор. условия)

13

(1) $\rho(x)u_{tt} - \frac{\partial}{\partial t}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = 0,\ 0<x<l,\ t>0$

$p(x) \geq p_0 > 0,\ x \in [0,l]$

$\rho(x) \geq \rho_0 > 0,\ x \in [0,l]$

продольные колебания неоднородного стержня

(2) $u|_{t=0} = \varphi(x)$

(3) $u_t|_{t=0} = \psi(x)$

(4) $(\alpha_1 u_x - \beta_1 u)|_{x=0} = 0$

(5) $(\alpha_2 u_x + \beta_2 u)|_{x=l} = 0$

(6) $u = X(x)T(t) \to$ в (1)

$\rho(x)XT'' - T\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + q(x)XT = 0 \ \Big|\cdot \frac{1}{XT\rho(x)}$

$$\frac{T''}{T} = \frac{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx} - q(x)X\right)}{\rho(x)X} = -\lambda$$

$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\lambda\rho(x) - q(x))X = 0$ (8)

$T'' + \lambda T = 0$ (7)

(6) $\to$ (4) разделяем переменные в грал. усл-ях

(4) $\Rightarrow T(t)(\alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0)) = 0 \Rightarrow \alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0) = 0$ (9)

(5) $\Rightarrow T(t)(\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l)) = 0 \Rightarrow \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0$ (10)

(8) - (10) задача Штурма-Лиувилля

Предполагаем, она решена (т.е найдены λ_n и X_n)

$\lambda \Rightarrow$ (7), $\lambda_n > 0$

$T_n'' + \lambda_n T_n = 0$

$T_n = A_n \cos(\sqrt{\lambda_n}\, t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n}\, t)$

$u(x,t) = (A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t)) X_n(x),\ n \in \mathbb{N}$ (11)

Все ф-ии (11) удовлетворяют ур-ю (1) и граничным условиям (1)-(5)

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t)) X_n(x)$ (12)

(2) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi(x)$

$$A_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) X_n(x) \rho(x)\, dx}{\|X_n\|^2} \quad (13)$$

$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + B_n \sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} t)) X_n(x)$

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x) = \psi(x)$

$$B_n = \frac{\int_0^l \psi(x) X_n(x) \rho(x)\, dx}{\sqrt{\lambda_n}\, \|X_n(x)\|^2} \quad (14)$$

Решение задачи - ряд (12) с коэфф-ми (13), (14)

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УР-Я С ОДНОР. ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ.

(1) $\rho(x) u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x) u = f(x,t)$

(метод разложения по собственным ф-ям)

Redebom-Amsba

(2) $u|_{t=0} = \varphi(x)$

(3) $u'_t|_{t=0} = \psi(x)$

(4) $(\alpha_1 u_x - \beta_1 u)|_{x=0} = 0$

(5) $(\alpha_2 u_x + \beta_2 u)|_{x=l} = 0$

$$\rho(x) u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x) u = 0$$

$$u = X(x) T(t)$$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right) + (\lambda \rho(x) - q(x))X = 0 \quad (6)$$

$$\alpha_1 X'(0) - \beta_1 X(0) = 0 \quad (7)$$

$$\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \quad (8) \qquad (\lambda_n, X_n(x), \lambda_n > 0)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) X_n(x) \quad (9)$$

При каждом фиксированном t обе стороны.

Все ф-ии (9) удовлетв-ют усл-ям (4)-(5)

$$(1) \Rightarrow \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} C_n''(t) X_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \underbrace{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dX_n}{dx}\right] - q(x) X_n(x)}_{-\lambda_n \rho(x) X_n(x)} = f(x,t)$$

Если ф-ии $C_n(t)$ подставить в ур-е мгновенно-мгновенны, из которого они находятся, и соответствующие собственное значение, получается тождество

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right) + (\lambda_n \rho(x) - q(x)) X_n \equiv 0$$

16

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_n}{dx}\right) - q(x) X_n = -\lambda_n \rho(x) X_n(x)$$

$$\rho(x)\sum_{n=1}^{\infty} C_n''(t)X_n(x)+\rho(x)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n C_n(t)X_n(x)=f(x,t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n''(t)+\lambda_n C_n(t)\right)X_n(x)=\frac{f(x,t)}{\rho(x)}$$

$$C_n''(t)+\lambda_n C_n(t)=\frac{\int_0^l \frac{f(x,t)}{\rho(x)}X_n(x)\rho(x)\,dx}{\|X_n\|^2}=f_n(t) \quad (10)$$

$$C_n''(t)+\lambda_n C_n(t)=f_n(t) \quad (11)$$

$$(2)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n(0)X_n(x)=\varphi(x)\Rightarrow C_n(0)=\frac{\int_0^l \varphi(x)X_n(x)\rho(x)\,dx}{\|X_n\|^2}$$

$$C_n(0)=\alpha_n \quad (13)$$

$$(3)\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(0)X_n(x)=\psi(x)$$

$$\beta_n=\frac{\int_0^l \psi(x)X_n(x)\rho(x)\,dx}{\|X_n\|^2} \quad (14)$$

$$C_n'(0)=\beta_n \quad (15)$$

Если $C_n(t)$ удовл. ур-ю (11), то ряд (9) удовл. (1). Если удовл. (13)-(15) то ряд удовл. и нач. усл. (2)-(3).

Решаем задачу Коши (11), (13), (15)

$$C_n''+\lambda_n C_n=0 \quad (\lambda_n>0)$$

$$C_n=A_n\cos(\sqrt{\lambda_n}t)+B_n\sin(\sqrt{\lambda_n}t)$$

$$C_n(t)=A_n(t)\cos(\sqrt{\lambda_n}t)+B_n(t)\sin(\sqrt{\lambda_n}t) \quad (16)$$

$C_n'(t) = A_n'(t)\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + B_n'(t)\sin(\sqrt{\lambda_n}t) - A_n(t)\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}t)$
$+B_n(t)\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}t)$

(17) $A_n'(t)\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + B_n'(t)\sin\sqrt{\lambda_n}t = 0 \quad | \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n}t)$

$C_n'(t) = -A_n'(t)\sqrt{\lambda_n}\sin(\sqrt{\lambda_n}t) + B_n'(t)\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}t) -$
$- A_n(t)\lambda_n\cos(\sqrt{\lambda_n}t) - B_n(t)\lambda_n\sin(\sqrt{\lambda_n}t) \Rightarrow (11)$

(18) $-A_n'(t)\sin(\sqrt{\lambda_n}t) + B_n'(t)\cos(\sqrt{\lambda_n}t) = \frac{f_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} \quad | \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n}t)$

(17)-(18):

$A_n'(t) = -\frac{f_n(t)\sin(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}} \to A_n(t) = -\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} f_n(\xi)\sin(\sqrt{\lambda_n}\xi)d\xi + a_n$

$B_n'(t) = \frac{f_n(t)\cos(\sqrt{\lambda_n}t)}{\sqrt{\lambda_n}} \to B_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t f_n(\xi)\cos(\sqrt{\lambda_n}\xi)d\xi + b_n$

$C_n(t) = a_n\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + b_n\sin(\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t f_n(\xi)\{-\cos(\sqrt{\lambda_n}t)\times$
$\times\sin(\sqrt{\lambda_n}\xi) + \sin(\sqrt{\lambda_n}t)\cos(\sqrt{\lambda_n}\xi)\}d\xi = a_n\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + b_n\sin(\sqrt{\lambda_n}t) +$
$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t f_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(t-\xi)d\xi$

$\Rightarrow (13) \Rightarrow a_n = \alpha_n$

$C_n'(t) = -\sqrt{\lambda_n}a_n\sin(\sqrt{\lambda_n}t) + \sqrt{\lambda_n}b_n\cos(\sqrt{\lambda_n}t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\overbrace{(f_n(\xi)\sin(\sqrt{\lambda_n}(t-\xi))}^{=0}$
$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^t f_n(\xi)\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}(t-\xi)d\xi \Rightarrow (15)$ $\quad \xi = t$

$C_n'(0) = \sqrt{\lambda_n}b_n = \beta_n \to b_n = \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}}$

Найденное решение удовлетворяет (13), (15)

$$C_n(t) = \alpha_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\xi) \sin(\sqrt{\lambda_n}(t-\xi)) d\xi$$

$$u(x,t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n} t)\right) X_n(x)}_{v(x,t)} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t f_n(\xi) \sin(\sqrt{\lambda_n}(t-\xi)) X_n(x) d\xi}_{w(x,t)}$$

Можно показать что v удовлетворяет:

$$\rho(x) v_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial v}{\partial x}\right) + q(x) v = 0$$

$$v|_{t=0} = \varphi(x)$$

$$v_t|_{t=0} = \psi(x)$$

$$(\alpha_1 v_x - \beta_1 v)|_{x=0} = 0$$

$$(\alpha_2 v_x + \beta_2 v)|_{x=l} = 0$$

$$\rho(x) w_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial w}{\partial x}\right) - q(x) w = f(x,t)$$

$$w|_{t=0} = 0$$

$$w_t|_{t=0} = 0$$

$$(\alpha_1 w_x - \beta_2 w)|_{x=0} = 0$$

$$(\alpha_2 w_x + \beta_2 w)|_{x=l} = 0.$$

СВЕДЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НКУ К ЗАДАЧЕ С ОГУ.

19

(1) $\rho(x) u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x) u = f(x,t), \; 0 < x < l, \; t > 0$

(2) $u|_{t=0} = \varphi(x)$

(3) $u_t|_{t=0} = \psi(x)$

(4) $(\alpha_1 u_x - \beta_1 u)|_{x=0} = \mu_1(t)$

(5) $(\alpha_2 u_x + \beta_2 u)|_{x=l} = \mu_2(t)$

(6) $u = v + w$

$(\alpha_1 v_x - \beta_1 v)|_{x=0} = \mu_1(t)$

$(\alpha_2 v_x + \beta_2 v)|_{x=l} = \mu_2(t)$

Таких ф-ий много. Чем удачнее их подберём, тем лучше решать.

В большинстве случаев ф-ю v можно найти в линейном виде

(7) $v = A(t)x + B(t)$

$$\begin{cases} \alpha_1 A(t) - \beta_1 B(t) = \mu_1(t) \\ \alpha_2 A(t) + \beta_2 (A(t) l + B(t)) = \mu_2(t) \end{cases}$$

В виде линейной ф-ии найти нельзя если:

$$\begin{cases} v_x|_{x=0} = \mu_1(t) \\ v_x|_{x=l} = \mu_2(t) \\ \mu_1(t) \neq \mu_2(t) \end{cases}$$

В таком случае (7.a) $v = A(t)x^2 + B(t)x$

20 Формулируем задачу для w. (6) → (1)

$$\rho(x)v_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + q(x)v + \rho(x)w_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + q(x)w = f(x,t)$$

$$\rho(x)w_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right) + q(x)w = f_1(x,t)$$

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \left(\rho(x)v_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + q(x)v\right)$$

v выбираем так, чтобы занулить $f_1(x,t)$

$$w = u - v$$

$$w|_{t=0} = u|_{t=0} - v|_{t=0} = \varphi(x) - v|_{t=0}$$

$$w_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - v_t|_{t=0} = \psi(x) - v_t|_{t=0}$$

$$(6) \Rightarrow (4) \quad \underbrace{(\alpha_1 v_x - \beta_1 v)|_{x=0}}_{\mu_1(t)} + (\alpha_1 w_x - \beta_1 w)|_{x=0} = \mu_1(t)$$

$$(6) \Rightarrow (5) \quad (\alpha_1 w_x - \beta_1 w)|_{x=0} = 0$$

$$(\alpha_2 w_x + \beta_2 w)|_{x=l} = 0.$$

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = u(x,t)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u) + q(x)u = f(x,t)$$

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

$$\vec{A}(x,t) = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

$\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u) = k(x)\Delta u + (\operatorname{grad} k, \operatorname{grad} u)$

(1) $\underbrace{\rho(x)u_{tt} - k(x)\Delta u}_{} - (\operatorname{grad} k, \operatorname{grad} u) + q(x)u = f(x,t)$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$

$\rho(x) \geq \rho_0 > 0,\ x \in Q,\ Q \subset \mathbb{R}^n,\ k(x) \geq k_0 > 0,\ x \in Q$

В этом случае (1) - уравнение гиперболического типа. Тип определяется в конкретной точке ($x_0 \in Q$)

Главной части ($\smile$) ставится в соответствие квадратичная форма в каждой конкретной точке.

$\omega = \rho(x_0)t^2 - k(x_0)(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$

$\omega = \rho(x_0)t_1^2 - k(x_0)\sum_{i=2}^{n+1} t_i^2$

$t_1, \dots, t_{n+1}$ переменных

Сформулируем начально-краевую задачу уравнения (1)

$\rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(k(x), \operatorname{grad} u) + q(x)u = f(x,t)$

Требуется решить ур-ние в области $x \in Q,\ t > 0$ с условиями:

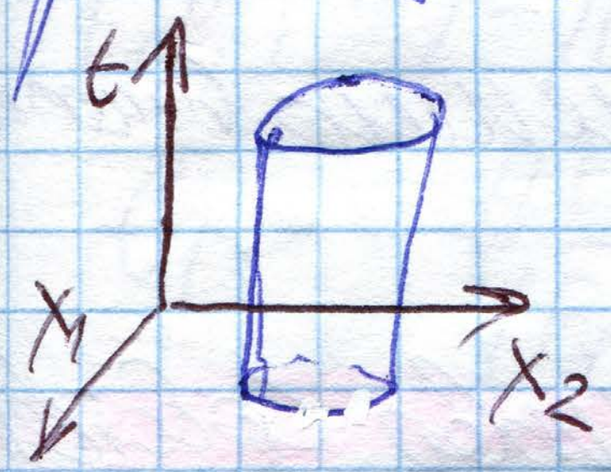
22 (2) $u|_{t=0} = \varphi(x)$

(3) $u_t|_{t=0} = \psi(x)$

(4) $\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\Big|_{\partial Q}=\mu(x,t),\ x\in\partial Q,\ t>0$ ← x всегда ур-ия границы

все компоненты

α и β известны, n - внешняя нормаль к границе области ∂Q.



полубесконечный цилиндр в пространстве размерности $n+1$.

$u=u(x_1,x_2,\dots,x_n,t)=u(x,t),\ x=(x_1,\dots,x_n)$

(1) $\rho(x)u_{tt}-\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}(u))+q(x)u=0$

(2) $u|_{t=0}=\varphi(x)$

(3) $u_t|_{t=0}=\psi(x)$

(4) $\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\Big|_{\partial Q}=0$

определяет можно только по одной переменной

(5) $u=T(t)F(x_1,\dots,x_n)=T(t)F(x)$

$\rho(x)T''(t)F(x)-T(t)\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}F)+q(x)T(t)F(x)=0$

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}F)-q(x)F}{\rho(x)F}=-\lambda$$

(6) $T''(t)+\lambda T(t)=0$

(7) $\operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad}F)+(\lambda\rho(x)-q(x))F=0$

$T(t)\left(\alpha\frac{\partial F}{\partial n}+\beta F\right)\Big|_{\partial Q}=0$

(8) $\left(\alpha \frac{\partial F}{\partial n} + \beta F\right)\Big|_{\partial Q} = 0$

(7)-(8) задача на собственные значения для ур-я в частных производных. Собственное значение по определению такие

Свойства:

① Существует счетное множество собственных значений $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$

② $\lambda_n \neq \lambda_m$, соответствующие собств. ф-ии ортог.

$$\int\limits_Q F_n(x) F_m(x) \rho(x) dx = 0$$

$dx_1 dx_2 \ldots dx_n$

③ Каждому собств. знач. λ_n может соответствовать конечное число множество независимых собств. ф-ий

$\lambda_1 \to F_1^{(1)} \ldots F_1^{(s)}$

Разным λ соответствует разное мн-во F

Между собств. $F^{(i)}$ могут быть неортогональны

? Ортогонализация Шмидта

Берём за основу $F_1^{(1)}$

$(F_1^{(1)}, F_1^{(2)}) \neq 0$

Берем $\tilde{F}_1^{(2)}$ так, чтобы было ортогонально $F_1^{(1)}$

$\tilde{F}_1^{(2)} = F_1^{(1)} + C_1 F_1^{(2)}$ - тоже решение

C_1 подбирается так, чтобы $(F_1^{(1)}, \tilde{F}_1^{(2)}) = 0$

$(F_1^{(1)}, \tilde{F}_1^{(2)}) = (F_1^{(1)}, F_1^{(1)}) + C_1 (F_1^{(1)}, F_1^{(2)})$

$C_1 = -\dfrac{\|F_1^{(1)}\|^2}{(F_1^{(1)}, F_1^{(2)})}$ всегда можно выбрать так, чтобы $F_n^{(1)}$ были ортогон.

$\underset{\tilde{F}_1^{(1)}}{\lambda_1} = \underset{\tilde{F}_1^{(2)}}{\lambda_2} = \ldots = \underset{\tilde{F}_1^{(s)}}{\lambda_s} < \lambda_2 \overset{\lambda_{s+1}}{=} \ldots = \ldots$

Каждое собственное значение может иметь кратность

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$ обычно пишут так

Известны все собств. ф-ии, все они ортогон.

4 Теорема Стеклова

Любую ф-ю $\varphi(x)$ можно разложить в ряд по собственным ф-ям

$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k F_k(x)$ с коэфф-ми разложения

$C_k = \dfrac{\int_a^b \varphi(x) F_k(x) \rho(x) dx}{\int_a^b F_k^2(x) \rho(x) dx}$

Предполагаем, что все λ и собств. ф-ии найдены

$T_k'' + \lambda_k T_k = 0$

$T_k = a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k}\, t)$

$U_k = (a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k}\, t)) F_k(x)$

принцип дискретной суперпозиции:

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\sqrt{\lambda_k}\, t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k}\, t)) F_k(x) \quad (9)$$

(9) удовлетворяет ур-ю и гранич. усл-ям

$$U|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k(x) = \varphi(x)$$

$$a_k = \frac{\int \varphi(x) F_k(x) \rho(x)\, dx}{\|F_k\|^2}$$

$$U_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sqrt{\lambda_k} F_k(x) = \psi(x)$$

$$b_k = \frac{\int \psi(x) F_k(x) \rho(x)\, dx}{\sqrt{\lambda_k}\, \|F_k(x)\|^2}$$

Цилиндрические функции.

$y = y(x)$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$ - ур-е Бесселя

$$x y'' + y' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x y') + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0 \quad (1)$$

26

$$x \frac{d}{dx}(x y') + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

Если рассматривается $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=0$, то $p(x_0)=0$, x_0 называется особой точкой ДУ, если в этой точке $p(x_0)$ обращается в 0.
Для ур-я Бесселя это $x=0$.

Решение ищется в виде обобщённого степенного ряда

$$y(x)=x^{\sigma}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\ a_0\neq 0$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\sigma} \quad (2)$$

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma-1} \to (1)$$

$$xy'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\sigma)x^{n+\sigma}$$

$$\frac{d}{dx}(xy')=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\sigma)^2x^{n+\sigma-1}$$

$$x\frac{d}{dx}(xy')=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\sigma)^2x^{n+\sigma}$$

$$x^2y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\sigma+2}=\{n+2=k\}=\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-2}x^{k+\sigma}=\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^{n+\sigma}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+\sigma)^2x^{n+\sigma}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+\sigma}-\nu^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\sigma}=0$$

$n=0$ $\quad a_0\sigma^2-\nu^2a_0=0$ (3)

$n=1$ $\quad a_1(1+\sigma)^2-\nu^2a_1=0$ (4)

$n\geq 2$ $\quad a_n(n+\sigma)^2+a_{n-2}-\nu^2a_n=0$ (5)

$(3) \to a_0(\sigma^2-\nu^2)=0$

$a_0 \neq 0 \Rightarrow \sigma=\pm\nu$ Пусть $\sigma=\nu$

$(4) \to a_1((1+\nu)^2-\nu^2)=0$, т.к. $\nu>0 \Rightarrow a_1=0$

$(5) \to a_n((n+\nu)^2-\nu^2)=-a_{n-2} \to a_n(n^2+2n\nu)=-a_{n-2}$

$$a_n=\frac{-a_{n-2}}{n(n+2\nu)} \quad (6)$$

$n=2k+1$

$$a_{2k+1}=-\frac{a_{2k-1}}{(2k+1)(2k+1+2\nu)}$$

$a_1=0$, $a_3=\frac{-a_1}{3(3+2\nu)}=0 \Rightarrow a_{2k+1}=0$

$n=2k$

$$a_{2k}=-\frac{a_{2k-2}}{(2k)(2k+2\nu)}=\frac{-a_{2(k-1)}}{2^2k(k+\nu)}$$

$$a_2=\frac{-a_0}{2^2(1+\nu)}, \quad a_4=\frac{-a_2}{2^2\cdot 2(2+\nu)}=\frac{a_0}{2^4\cdot 1\cdot 2(2+\nu)(1+\nu)}$$

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k(k+\nu)\ldots(1+\nu)}$$

a_0 выбираем сами. Решение однородное можно умножить на const и тоже будет решением.

28

Выбираем $a_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(1+\nu)}$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{t} dt$$

Если x целое, то $\Gamma(n+1) = n!$; $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \in \mathbb{C}$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\underbrace{\Gamma(k+1)}_{\text{заменяем } k!}(k+\nu)\underbrace{(\nu+1)\Gamma(1+\nu)}_{\Gamma(2+\nu)}} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$\Gamma(3+\nu)$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k+\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_{2k+1}}_{=0} x^{2k+1+\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$$y_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \quad (7)$$

Признак Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim \left|\frac{(-1)^k x^{2k+2} \cdot 2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}{2^{2k+2}\Gamma(k+2)\Gamma(k+\nu+2)\cdot(-1)^{k+1}x^{2k}}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{x^2 \cancel{\Gamma(k+1)}\cancel{\Gamma(k+\nu+1)}}{4(k+1)\cancel{\Gamma(k+1)}(k+\nu+1)\cancel{\Gamma(k+\nu+1)}} = 0 \Rightarrow$$

ряд сх-ся абсолютно

$R = \infty$

$$y(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}$$

$y_\nu(z)$ аналитическая при целых ν

z может иметь особенность при ν не целом или комплексном

$$y_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)} \quad (8)$$

В каком случае они неравенны и как ведут при $x \to 0$?

$$y_\nu(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \text{ при } x \to 0$$

Степенной ряд при $x \to 0$ ведёт себя как первый его член.

$$y_{-\nu}(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)} \text{ при } x \to 0$$

Рассмотрим $\nu = m$ (m - целое, $m \neq 0$)

$$y_m(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^{m} \frac{1}{\Gamma(m+1)}$$

$$y_{-m}(x) \sim \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \frac{1}{\underbrace{\Gamma(1-m)}_{=\infty}} = 0$$

?? Не можем сказать, как ведёт себя $\nu \neq m$, m - целое

$$\nu > 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \to 0, \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \to \infty$$

решения будут линейно независимы

30 $$y_{-m}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-m+1)} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-m+1)} =$$

все первые слагаемые 0.

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2m}}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(n+1)} = (-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+n+1)}$$

$$=(-1)^m J_m(x)$$

Можем сказать, как ведёт себя $Y_m(x)$ при $\nu = m$, m - целое, т.к. знаем поведение $Y_m(x)$

Для (1): $xW(y_1, y_2) = const$

y_1, y_2 - любые два решения

$$\frac{d}{dx}(xW(y_1, y_2)) = 0$$

$$xW(J_\nu(x), J_{-\nu}(x)) = \frac{2}{\pi}\sin\nu\pi$$

Функция Неймана

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \quad \nu \neq m, \text{ } m \text{ целое}$$

Это есть линейная комбинация $J_\nu(x), J_{-\nu}(x)$

$$N_m(x) = \frac{J_m(x)(-1)^m - J_m(x)}{\sin(m\pi)} = \frac{0}{0}$$

$$N_m(x) = \lim_{\nu\to m}\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

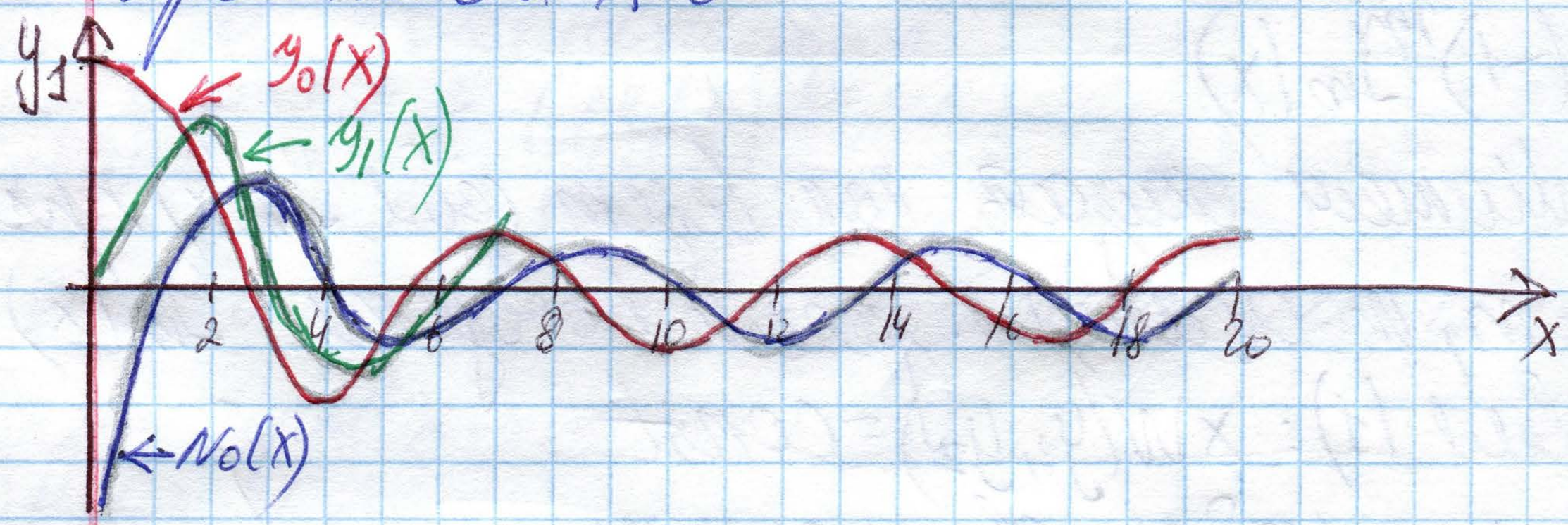
$$W(J_\nu(x), N_\nu(x)) = W\left(J_\nu(x), J_\nu(x)\operatorname{ctg}(\nu\pi) - \frac{1}{\sin(\nu\pi)}J_{-\nu}(x)\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}(\nu\pi)\underbrace{W(J_\nu(x), J_\nu(x))}_{0} - \underbrace{\frac{1}{\sin(\nu\pi)}W(J_\nu(x), J_{-\nu}(x))}_{\frac{2}{\pi x}\sin(\nu\pi)} = \frac{2}{\pi x}$$

$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)$

↑ линейно не зависимы при $\forall \nu$

В окрестности $x=0$:



$N_n(x) \sim -\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \frac{\Gamma(n)}{\pi} \quad n \geq 1$

$N_0(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln \frac{x}{2}$

При $\forall$ индексах при $x \to 0$ неограничены.

$x \to +\infty$

$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Но ∞ используют ф-ии Ханкеля - линейные комбинации ф-ий Бесселя первого и второго рода:

$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z)$ - ф-я Ханкеля I рода

$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z)$ - ф-я Ханкеля II рода

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

132 $\rho = \rho(x, y, z)$ - плотность вещества

$c = c(x,y,z)$ - удельная теплоёмкость
$k = k(x,y,z)$ - коэфф. теплопроводности
$f = f(x,y,z,t)$ - плотность источников тепла
$u = u(x,y,z,t) = u(M,t)$ - температура в точке в моменте t
$M(x,y,z)$

Поток тепла через площадку S:

$$-\iint\limits_S k(M)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

n - направление нормали, куда распространяется тепло. Направление распространения тепла - ф-л обновления

$$\iiint\limits_Q c(M)\rho(M)(u(M,t_2)-u(M,t_1))\,dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{\partial Q} k(M)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_Q f(M,t)\,dV$$

n - внешняя нормаль, поэтому нет „-"

$$u(M,t_2)-u(M,t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$$

$$\iint\limits_{\partial Q} k(M)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS \overset{\circledast}{=} \iiint\limits_Q \operatorname{div}(k(M)\cdot \operatorname{grad} u)\,dV$$

$\circledast$ - Остр-градск

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_Q c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dV = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_Q \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u)\,dV + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_Q f(M,t)\,dV$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_Q \left(c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad} u) - f(M,t)\right) dV = 0$$

Если интеграл непрерывной ф-ии по любой области 0, то подинтегральное выр-е $\equiv 0$.

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k(M)\cdot \operatorname{grad} u) = f(M,t)$$

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - (\operatorname{grad} k, \operatorname{grad} u) = f(M,t)$$

Рассмотрим частный случай, когда $c(M) \equiv const_1$, $\rho(M) = const_1$, $k(M) \equiv const_2$. Все >0.

$$\frac{k_0}{c_0\rho_0} = a^2 \qquad u_t - a^2\Delta u = f(M,t)$$

Q - некоторая область, $Q \subset R^3$

1 $u|_{\partial Q} = \mu(x,y,z,t) \qquad (x,y,z) \in \partial Q$

На границе области задана температура

2 $k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = \mu(x,y,z,t)$

На границе задается поток тепла (u берется по границе, (x, y, z) лежит на границе)

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = \mu(x,y,z,t)$$

2.a $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0$ - граница области теплоизолирована

3 $k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = h(u_0 - u)\Big|_{\partial Q}$

34 $k\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\Big|_{\partial Q} = hu_0$

на границе области теплообмен с окружающей средой с температурой $u_0(x,y,z,t)$

Постановки задач

а) Начальная задача

$u_t - a^2\Delta u = f(M,t)$, $M \in \mathbb{R}^3$, $t>0$

удовл. нач. усл-ю

$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$

б) Начально-краевая задача (смешанная)

Найти решение ур-я

$u_t - a^2\Delta u = f(x,y,z,t)$, $M \in \mathbb{R}^3$, $t>0$

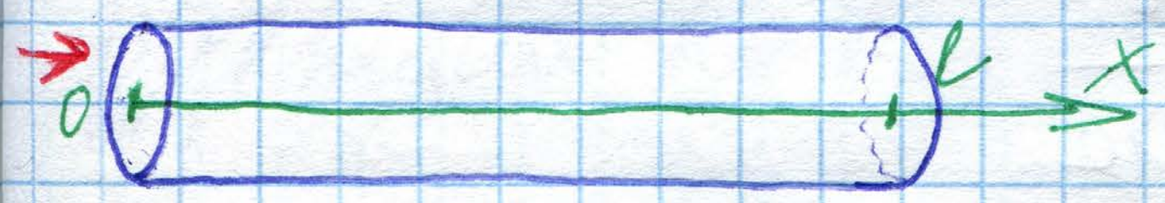
удовл. нач. усл-ю:

$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$

и граничным условиям:

$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_{\omega_Q} = \mu(x,y,z,t)$

УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ВНУТРИ СТЕРЖНЯ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ.



$\rho = \rho(x)$, $c = c(x)$, $k = k(x)$,

$u = u(x,t)$

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t)$$

div

$c = c_0,\ k = k_0,\ \rho = \rho_0$

$$u_t - a^2 u_{xx} = \frac{f(x,t)}{c_0\rho_0}$$

Типы граничных условий:

1) $u|_{x=0} = \mu_1(t)$ - на границе задана температура

2) $-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_1(t)$ задается поток тепла

$k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \mu_2(t)$

2.1) $u_x|_{x=0} = 0$

3) $u_0|_{x=0} > u|_{x=0}$

$-ku_x|_{x=0} = h(u_0 - u)|_{x=0}$

$(ku_x - hu)|_{x=0} = -hu_0$

3.1) $ku_x|_{x=0} = h(u - u_0)|_{x=0}$ тепло выходит, если окружающая среда холодна

$x = l$

$u_0|_{x=l} > u|_{x=l}$

$ku_x|_{x=l} = h(u_0 - u)|_{x=l}$

$(ku_x + hu)|_{x=l} = hu_0$

36 Постановки задач

1) Начальная задача

$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$

удовл. нач. усл:

$u|_{t=0} = \varphi(x)$

2) Начальная краевая задача для ограниченного стержня

$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ в обл. $0 < x < l$, $t > 0$

удовл. нач. усл.:

$u|_{t=0} = \varphi(x)$

и гранич. усл:

$(\alpha_1 u_x - \beta_2 u)|_{x=0} = \mu_1(t)$

$(\alpha_2 u_x + \beta_2 u)|_{x=l} = \mu_2(t)$

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УР-Я ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА. МЕТОД ИНТЕГРАЛА (ПРЕОБРАЗОВАНИЯ) ФУРЬЕ.

(1) $u_t - a^2 u_{xx} = 0$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$

(2) $u|_{t=0} = \varphi(x)$

Пусть $f(x)$ - абсолютно интегрируемая функция на $(-\infty, +\infty)$, тогда

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ - преобразование Фурье ф-ии $f(x)$

(впереди может стоять $1/\frac{1}{2\pi}/\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$)

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (3)$$

$f(x)$ абс. инт-ма, если $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$

$|f(x) e^{-ikx}| = |f(x)|$

$|e^{-ikx}| = |\cos kx - i \sin kx| = 1$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (4)$$ - обратное преобразование Фурье

не обязательно сх-ся.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$

2. $f(x)$ имеет конечное число max и min

Иногда (4) называют разложением $f(x)$ в интеграл Фурье

(1) $\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-ikx} dx - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} e^{-ikx} dx = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-ikx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx \right)}_{F(k,t)}$$

Это преобразование $u(x,t)$ по x

38 $$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx} \underbrace{e^{-ikx}}_{u} dx = \underbrace{u_x e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{\text{предполагаем равн } =0} - \int_{-\infty}^{\infty} (-ik) u_x e^{-ikx} dx =$$

$$= ik\left(ue^{-ikx}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} ue^{-ikx}dx\right) = -k^2\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F(x,t) + a^2k^2F(x,t) = 0 \quad (5)$$

$$(2) \times e^{-ikx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u|_{t=0} e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ikx}dx = h(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx)\Big|_{t=0} = h(x)$$

$$F(k,0) = h(k) \quad (6)$$

Ур-е было в частных производных. За счет преобразования получается ур-е для обыкновенного ДУ.

Метод разложения в инт. Фурье

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,t)e^{ikx}dk \quad (7) \to (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial F}{\partial t}e^{ikx}dk - \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ik)^2F(k,t)e^{ikx}dx = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + a^2k^2F\right)e^{ikx}dk = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + a^2k^2F = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(k,0)e^{ikx}dk = \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}h(k)e^{ikx}dk$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,0)e^{ikx}dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(k)e^{ikx}dk$$

$F(k,0)=h(k)$ (6)

Преобразование Фурье используется только для ур-ий с постоянными коэф-ми и при пространственной переменной, меняющейся $(-\infty;+\infty)$

(5), (6) надо решить.

$p+a^2k^2=0 \to p=-a^2k^2$

$F(k,t)=C(k)e^{-a^2k^2t}$

$F(k,0)=C(k)=h(k)$

$F(k,t)=h(k)e^{-a^2k^2t}$

$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(k)e^{-a^2k^2t}e^{ikx}dk$ - решение

$$h(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-ik\xi}d\xi$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\cdot\varphi(\xi)e^{-a^2k^2t}e^{ik(x-\xi)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\cdot\varphi(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{-a^2k^2t}e^{ik(x-\xi)}$$

$$G(x-\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2k^2t}e^{ik(x-\xi)}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2k^2t}(\cos k(x-\xi)+$$

40

$$+i\sin k(x-\xi))dk=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-a^2k^2t}\cos k(x-\xi)dk=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)$$

$$G(x-\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right),\ x\in\mathbb{R},\ t>0$$

(3) $$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)G(x-\xi,t)\,d\xi=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)d\xi$$

ф-ла Пуассона (решение)

Теорема ∃ решения задачи.

Пусть 1) $\varphi(x)\in C(\mathbb{R})$

2) $|\varphi(x)|\le M$ (ограничено), тогда (3) определяет класс решений задачи (1)-(2). Это решение будет ограничено при всех $x\in\mathbb{R}$ и $t\ge 0$:

$|u(x,t)|\le M$ и иметь производные всех порядков по x и t в области $x\in\mathbb{R}$, $t>0$

Решение имеет производные всех порядков - особенность ур-ий параболического типа. Оно оказывается бесконечным.

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ур-я ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

$$G(x-\xi,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right),\ x\in\mathbb{R},\ t>0$$ - фундаментальное решение

Свойства:

1] $G_t - a^2 G_{xx} = 0$

$G|_{t=0} = \delta(x-\xi)$ - температура в нач. момент

ФРУ теплопроводности удовлетворяет такой начальной задаче

$x = \xi$

$G|_{x=\xi} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$

$\lim\limits_{t\to 0} G|_{x=\xi} = \infty$

$x \neq \xi$

$\lim\limits_{t\to 0} G = \lim \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)}{2a\sqrt{\pi t}} = \left[\frac{0}{0}\right]$

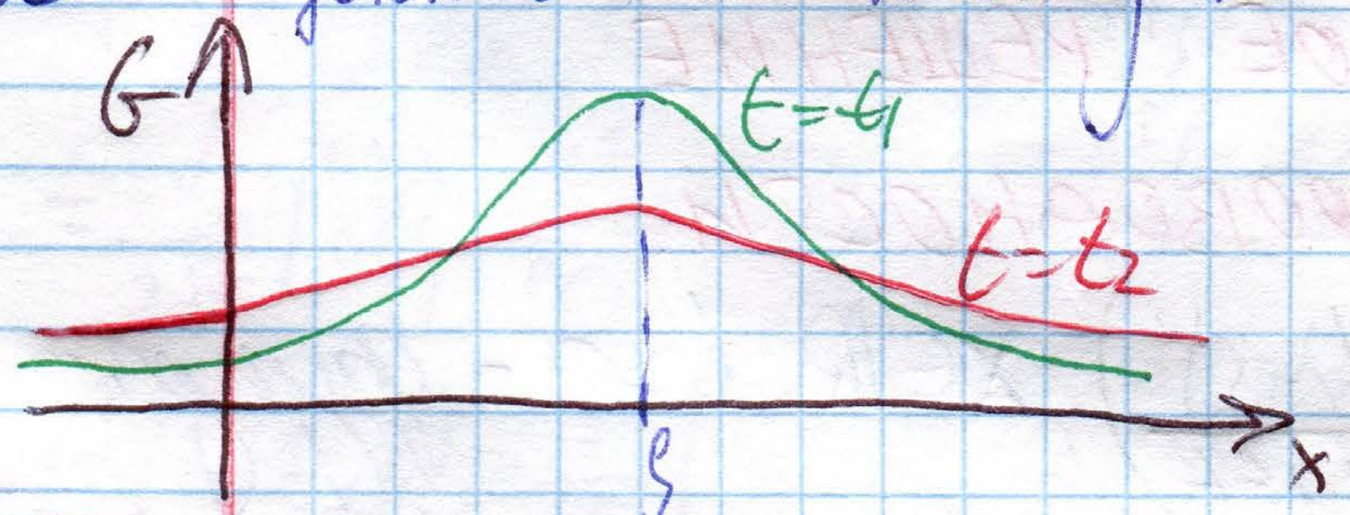
$t = \frac{1}{\eta}$

$\lim\limits_{\eta\to\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\eta}}{\exp\left(\frac{(x-\eta)^2}{4a^2}\eta\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$

$x = \xi$ - носитель $\delta(x-\xi)$. Вне - $\delta(x-\xi) \equiv 0$.

2] t - фиксировано.

ФРУ определяет распределение температуры в ∞ стержне, которое вызывается мгновенно точечным источником тепла, помещенным в точку $x = \xi$.



$G > 0$

$G \to 0,\ x \to \pm\infty$

$t_2 > t_1$

$\boxed{12}$ $G_x = -\frac{2(x-\xi)}{4a^2 t} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)$

$G_x = 0 \Rightarrow x = \xi$

В нашей модели скорость распространения тепла равна ∞. a^2 - не связан со скоростью, это характеристика среды, в которой распространяется тепло.

3] Площадь под графиком вида функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\eta^2} \cdot 2a\sqrt{t}\,d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta =$$

$$= \left\{ \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}} = \eta,\ dx = 2a\sqrt{t}\,d\eta \right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1$$

4] $G(x-\xi, t)$ имеет производные всех порядков x и t $\forall x \in \mathbb{R}, t > 0$.

<u>Замечание</u>: $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) G(x-\xi, t)\,d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$ можно рассматривать как непрерывную суперпозицию решений однородного уравнения.

Если $u_n(x,t)$ - решение, а $\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t)$ - сх-ся, то это дискретная суперпозиция. ξ может принимать все значения.

Формальная проверка:

$$u_t - a^2 u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \varphi(\xi)\underbrace{(G_t - a^2 G_{xx})}_{=0} = 0$$

это решение задачи, и это решение

$$u|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G|_{t=0}\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, \delta(x-\xi)\, d\xi = \varphi(x)$$

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УР-Я ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

(1) $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$

(2) $u|_{t=0} = 0$

Составим вспомогательную задачу

(3) $v_t - a^2 v_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > t'$

(4) $v|_{t=t'} = f(x, t')$

(5) $v(x,t,t') = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t') G(x-\xi, t-t')\, d\xi$

Если v - решение (3,4), то (6) $\to u = \int_0^t v(x,t,t')\,dt'$ - решение (1,2)

$$u_t = v|_{t'=t} + \int_0^t v_t\, dt' = f(x,t) + \int_0^t v_t\, dt'$$

$$u_{xx} = \int_0^t v_{xx}\, dt'$$

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) + \int_0^t \overbrace{(v_t - a^2 v_{xx})}^{=0,\ \text{т.к. решение (3)}} dt' = f(x,t)$$

Для написания задачи (1,2) перепишем (5)→(6)

(44) $u(x,t) = \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t') G(x-\xi, t-t')\, d\xi$ - решение

Уравнение с нетривиальными нач. условиями.

$u = u^{(1)} + u^{(2)}$

$u_t^{(1)} - a^2 u_{xx}^{(1)} = 0$ $\qquad$ $u_t^{(2)} - a^2 u_{xx}^{(2)} = f(x,t)$

$u^{(1)}|_{t=0} = \varphi(x)$ $\qquad$ $u^{(2)}|_{t=0} = 0$

Проверим, докажем, что решение записывается именно так

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x-\xi, t)\, d\xi + \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, t') G(x-\xi, t-t')\, d\xi$$

ф-ла Пуассона

В ф-ле Даламбера область зависимости совпадала с конечной скоростью распр-я волны.

О ∃! РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УР-Я ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

1) $u \equiv 0$ $\qquad$ ∀ число

2) Пусть $f(t) \in C^\infty$ и носитель $f(t) = [0,1]$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0,\ t \ge 1 \\ \exp\left(-\frac{1}{1-4(t-\frac{1}{2})^2}\right), & 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(n)}(t)$$

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$$

$$u|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(n)}(0) = 0$$

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(n+1)}(t) \quad (v)$$

$$u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n-1)x^{2n-2}}{(2n)!} f^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} f^{(n)}(t) = \{n-1=k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} f^{(k+1)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(n+1)}(t) \quad (vv)$$

$u_t = u_{xx}$

$t = const$ - характеристики уравнения

(1) $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

(2) $u|_{t=0} = 0$

В классе ф-ий $x \in \mathbb{R}, t > 0, 0 \le t \le T$ (ограничена в полосе) решение задачи (1), (2) если существует, то оно одно.

Решение растёт как $e^{\alpha x^2}$. Такие быстро растущие ф-ии не раскладываются в интеграл Фурье, поэтому они вылетают.

Ур-е решается в пространстве $\forall$ размерности.

46

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УР-Я ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ в $\mathbb{R}^3$

Найти решение ур-я $u=u(x,y,z,t)$

$u_t - a^2\Delta u = f(x,y,z,t)$ $(x,y,z)\in R^3, t>0$

$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$

Лемма

Пусть в начальной задаче для однородного ур-я: $u_t - a^2\Delta u = 0$

Начальная ф-я имеет специальный вид

$u|_{t=0} = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$

Тогда решение задачи имеет вид

$u(x,y,z,t) = u^{(1)}(x,t)\cdot u^{(2)}(y,t)\cdot u^{(3)}(z,t)$, где

$u^{(i)}$ решение задачи:

$u_t^{(1)} - a^2 u_{xx}^{(1)} = 0$ $\quad u_t^{(2)} - a^2 u_{xx}^{(2)} = 0$ $\quad u_t^{(3)} - a^2 u_{xx}^{(3)} = 0$

$u^{(1)}|_{t=0} = \varphi_1(x)$ $\quad u^{(2)}|_{t=0} = \varphi_2(y)$ $\quad u^{(3)}|_{t=0} = \varphi_3(z)$

Док-во:

$u|_{t=0} = u^{(1)}|_{t=0}\cdot u^{(2)}|_{t=0}\cdot u^{(3)}|_{t=0} = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$

$u_t = u_t^{(1)}u^{(2)}u^{(3)} + u^{(1)}u_t^{(2)}u^{(3)} + u^{(1)}u^{(2)}u_t^{(3)}$

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{xx}^{(1)}u^{(2)}u^{(3)} + u^{(1)}u_{yy}^{(2)}u^{(3)} + u^{(1)}u^{(2)}u_{zz}^{(3)}$

$u_t - a^2\Delta u = \underbrace{(u_t^{(1)} - a^2 u_{xx}^{(1)})}_{=0}u^{(2)}u^{(3)} + u^{(1)}\underbrace{(u_t^{(2)} - a^2 u_{yy}^{(2)})}_{=0}u^{(3)} +$

$+ u^{(1)}u^{(2)}\underbrace{(u_t^{(3)} - a^2 u_{xx}^{(3)})}_{=0} = 0$

ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ 3d СЛУЧАЯ

$M(x, y, z)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$G = G(x, y, z, x_0, y_0, z_0, t) = G(M, M_0, t)$

Ф-я Грина называется решением 3d ур-я теплопроводности, если

$G_t - a^2 \Delta G = 0$, $M \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$

$G|_{t=0} = \delta(M, M_0)$

$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(M)\, \delta(M, M_0)\, dV = \varphi(M_0)$

$\delta(M, M_0) = \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0)$

$\underline{n=1}$ $G_1 = G_1(x, x_0)$

$G_{1t} - a^2 G_{1xx} = 0$ $\quad G_1(x, x_0, t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{(x - x_0)^2}{4a^2 t}\right)$

$G_1|_{t=0} = \delta(x - x_0)$

Можно воспользоваться леммой:

$n=3$: $G(M, M_0, t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} \cdot \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4a^2 t}} \cdot \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4a^2 t}} =$

$= \left(\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 \exp\left(-\dfrac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}{4a^2 t}\right)$

Решение начальной задачи

$u_t - a^2 \Delta u = 0$

$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z)$

$\boxed{48}$ $u(M, t) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(P)\, G(M, P, t)\, dV_P$ $\qquad P(\xi, \eta, \zeta)$

$$u_t - a^2\Delta u = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(p)\underbrace{(G_t - a^2\Delta G)}_{=0} dV_p = 0$$

$$u|_{t=0} = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(p) G|_{t=0} dV_p = \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(p)\delta(M,p) dV_p = \varphi(M)$$

Аналогично можно показать, что

$u_t - a^2\Delta u = f(M,t)$, $M \in \mathbb{R}^3$, $t>0$

$u|_{t=0} = 0$

$$u(M,t) = \int_0^t dt' \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(p,t') G(M,p,t-t') dV_p$$

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ СТЕРЖНЕ С ПРОСТЕЙШИМИ ГРАНИЧ. УСЛ-МИ.

(1) $u_t - a^2 u_{xx} = 0$

(2) $u|_{t=0} = \varphi(x)$

(3) $u|_{x=0} = 0$ – по концу поддерживается 0 темпер.

Метод продолжений.

Лемма

Пусть $v = v(x,t)$ – решение нач. задачи для ур-я теплопроводности (начальная ф-я которой является ф-ей нечётной)

$v_t - a^2 v_{xx} = 0$

$v|_{t=0} = F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x>0 \\ -\varphi(-x), & x<0 \end{cases}$$

тогда $v|_{x=0} = 0$, $t>0$.

<u>Док-во:</u> $v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) G(x-\xi, t)\, d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$.

$$v|_{x=0} = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}}_{\text{нечет}} \underbrace{\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a^2 t}\right)}_{\text{чет}} d\xi$$

$u(x,t) \equiv v(x,t)$ $x>0$ $t>0$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) G(x-\xi, t)\, d\xi = \int_{-\infty}^{0} \overbrace{F(\xi)}^{-\varphi(-\xi)} G(x-\xi, t)\, d\xi + \int_{0}^{\infty} \overbrace{F(\xi)}^{=\varphi(\xi)} G(x-\xi, t)\, d\xi =$$

$$= \left[-\xi = \eta,\ -\int_{-\infty}^{0} \varphi(-\xi) G(x-\xi, t)\, d\xi = -\int_{0}^{\infty} \varphi(\eta) G(x+\eta, t)(-d\eta)\right] =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \varphi(\eta) G(x+\eta, t)\, d\eta = -\int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x+\xi)\, d\xi = \int_{0}^{\infty} \varphi(\xi) [G(x-\xi, t) - G(x+\xi, t)]\, d\xi$$

$\tilde{G}(x,\xi,t) = G(x-\xi, t) - G(x+\xi, t)$ – ф-я Грина начально-краевой задачи для полуограниченной прямой

(*) $u(x,t) = \int_{0}^{\infty} \varphi(\xi) \tilde{G}(x,\xi,t)\, d\xi$

Покажем, что ф-я Грина есть решение начально-краевой задачи

$\boxed{50}$ $\tilde{G}_t - a^2 \tilde{G}_{xx} = 0$

$\tilde{G}|_{t=0} = \delta(x-\xi)$

$\tilde{G}|_{x=0}=0$

Достаточно решить такую задачу, тогда (1)-(3) запишется через (*)

$\tilde{G}|_{t=0}=\delta(x-\xi)-\delta(x+\xi)=\delta(x-\xi)$

ξ интегрируется от 0 до ∞ тогда $t+\xi>0$

$\tilde{G}|_{x=0}=G(-\xi,t)-G(\xi,t)=0$ (одна и та же exp)

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ.

$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),\ x>0,\ t>0$

$u|_{t=0}=0$

$u|_{x=0}=0$

$u(x,t)=\int_0^t dt'\int_0^\infty d\xi\cdot f(\xi,t')\tilde{G}(x,\xi,t-t')$

<u>Замечание:</u> когда конец стержня теплопроводен ($\theta_x|_{x=0}=0$), эквивалентно начальной задаче, в которой $\varphi(x)$ продолжается на отриц. ось чётно.

(1) $u_t-a^2u_{xx}=0,\ x>0,\ t>0$

(2) $u|_{t=0}=\varphi(x)$

(3) $u_x|_{x=0}=0$

$u(x,t) = \int_0^\infty \varphi(\xi)\, \tilde{G}(x,\xi,t)\, d\xi$, где $\tilde{G}(x,\xi,t) = G(x-\xi,t) + G(x+\xi,t)$

$\tilde{G}_t - a^2 \tilde{G}_{xx} = 0$

$\tilde{G}|_{t=0} = \delta(x-\xi)$

$G_x|_{x=0} = 0$

Если записывать для начально-краевой:

$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ x>0,\ t>0$

$u|_{t=0} = 0$

$u_x|_{x=0} = 0$

$u(x,t) = \int_0^t dt' \int_0^\infty d\xi\, f(\xi,t')\, \tilde{G}(x,\xi,t-t')$

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА Д.П.Л ОГРАНИЧЕННОГО СТЕРЖНЯ.

(1) $u_t - a^2 u_{xx} = 0,\ 0<x<l,\ t>0$

(2) $u|_{t=0} = \varphi(x)$

(3) $u|_{x=0} = 0$

(4) $u|_{x=l} = 0$

$u = X(x)\,T(t)$

$XT' - a^2 X'' T = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{a^2 X T}$

52 $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + a^2 \lambda T = 0 \end{cases}$ $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,\ X_k = \sin\left(\frac{\pi k}{l} x\right),\ \|X_k\|^2 = \frac{l}{2}$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi k}{l} x \quad (5)$$

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \quad (6)$$

$$G^* = G^*(x, \xi, t)$$

$$G^*_t - a^2 G^*_{xx} = 0$$

$$G^*|_{t=0} = \delta(x-\xi)$$

$$G^*|_{x=0} = 0$$

$$G^*|_{x=l} = 0$$

$$G^*(x,\xi,t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)$$

$$B_k = \frac{2}{l} \int_0^l \delta(x-\xi) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right)$$

$$G^*(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \quad (7)$$

Вернемся к (5), через формулу Грина

$$u(x,t) = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right) d\xi \, \exp\left(-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t\right) \sin \frac{\pi k x}{l} =$$

$$= \int_0^l d\xi \, \varphi(\xi) \underbrace{\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l}\xi\right) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right)}_{G^*(x,\xi,t)} =$$

$$= \{\text{сравнить с } (7)\} = \int_0^l \varphi(\xi) G^*(x,\xi,t) d\xi$$

Можно показать, что решение нач.-краевой задачи для неодн. ур-я

$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0$

$u|_{t=0} = 0$

$u|_{x=0} = 0$

$u|_{x=l} = 0$

Будет иметь вид $u(x,t) = \int_0^t dt' \int_0^l f(\xi,t') G(x,\xi,t)\, d\xi$

если меняются гранич. усл., то G тоже меняется.

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

$n=2$: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ - ур-е Лапласа

$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ - ур-е Пуассона

$n=3$: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x,y,z)$

Процессы стационарные (нет t)

ФРУ Лапласа

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

$\Delta u = 0$ (1)

$u = u(r)$ (2)

$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2}$ - расстояние между точками

59

$x(x_1, \dots, x_n)$ $\quad x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$

$$U_{x_i} = U_r \frac{\partial r}{\partial x_i} = U_r \cdot \frac{(x_i - x_i^0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2}} = U_r \cdot \frac{(x_i - x_i^0)}{r}$$

$$U_{x_i x_i} = U_{rr}\frac{(x_i - x_i^0)^2}{r^2} + U_r\left(\frac{1}{r} - \frac{(x_i - x_i^0)(x_i - x_i^0)}{r^2 \quad r}\right)$$

$$\Delta U = \sum_{i=1}^{n} U_{x_i} U_{x_i} = \frac{U_{rr}}{r^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 + \frac{U_r}{r}\sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{U_r}{r^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^0)^2 =$$

$$= U_{rr} + \frac{nU_r}{r} - \frac{U_r}{r} = 0$$

$$U_{rr} + \frac{(n-1)}{r}U_r = 0$$

$$U_r = V$$

$$V_r + \frac{(n-1)}{r}V = 0$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{(n-1)}{r}dr$$

$$\ln|V| = -(n-1)\ln r + \ln(C_1)$$

$$V = \frac{C_1}{r^{n-1}}$$

$$U_r = \frac{C_1}{r^{n-1}} \longrightarrow$$

$\underline{\underline{n=2}}$

$$U_r = \frac{C_1}{r}$$

$$U = C_1 \ln r + C_2$$

$$C_2 = 0,\ C_1 = -1$$

$$U = \ln\frac{1}{r}$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$\underline{\underline{n \geq 3}}$

$$U_r = \frac{C_1}{r^{n-1}}$$

$$U = -\frac{C_1}{(n-2)r^{n-2}} + C_2$$

$$U = 1/r$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

получили ф. сфер. волн, сосредоточенного заряженной точкой.

Ход $n=3$

$n>3$: $U = \frac{1}{(n-2)r^{n-2}}$ $\quad r = \sqrt{\sum (x_i - x_i^0)^2}$.

55

$u = \frac{1}{r_{MM_0}}$ - в точке M_0 не дифф-ма (локально интегрируемо)

$\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = 0, M \neq M_0$

$\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = -4\pi\delta(M, M_0)$

$\delta(M, M_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ в декарт. системе

$\Delta\varphi = -4\pi\delta(M, M_0)$ (1)

Вычислим точечного заряда, помещенного в точку M_0.

$F(\vec{k}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{r})e^{-i(\vec{k},\vec{r})}dV$ $d\vec{r} = dxdydz$ преобр-е Фурье

$\vec{k}(k_1, k_2, k_3)$ или (k_x, k_y, k_z); $\vec{r}(x, y, z)$

$(\vec{k}, \vec{r}) = k_1x + k_2y + k_3z$ $= dk_1dk_2dk_3$

$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}F(\vec{k})e^{i(\vec{k},\vec{r})}d\vec{k}$ (2) обр. Фурье

$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)e^{-i(\vec{k},\vec{r})}dxdydz = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}e^{-i(\vec{k},\vec{r}_0)}$

$\delta(M, M_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}e^{i(\vec{k},\vec{r}-\vec{r}_0)}dk_1dk_2dk_3$ (3)

(2), (3) $\Rightarrow$ (1) разложение в интеграл Фурье

$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}F(\vec{k})\Delta(e^{i(\vec{k},\vec{r})})dk_1dk_2dk_3 = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}F(\vec{k})((ik_1)^2+(ik_2)^2+(ik_3)^2)\times$

$\times e^{i(\vec{k},\vec{r})}dk_1dk_2dk_3 = -\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}k^2F(\vec{k})e^{i(\vec{k},\vec{r})}dk_1dk_2dk_3 =$

$$= -\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{k},\vec{r}-\vec{r}_0)}\,dk_1\,dk_2\,dk_3$$

$$-\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} k^2 F(\vec{k})\, e^{i(\vec{k},\vec{r})}\,dk_1\,dk_2\,dk_3 = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\vec{k},\vec{r}-\vec{r}_0)}\,dk_1\,dk_2\,dk_3$$

$$k^2 F(k) = \frac{4\pi}{(\sqrt{2\pi})^3}\, e^{-i(\vec{k},\vec{r}_0)}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\vec{k},\vec{r}-\vec{r}_0)}}{k^2}\,dk_1\,dk_2\,dk_3 =$$

Сферическая система:

$k_1 = k\cos\varphi\sin\theta$

$k_2 = k\sin\varphi\sin\theta$

$k_3 = k\cos\theta$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty} dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, k^2 \sin\theta\, \frac{e^{ik[(x-x_0)\cos\varphi\sin\theta+(y-y_0)\sin\varphi\sin\theta+(z-z_0)\cos\theta]}}{k^2} =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, f(\alpha\cos\varphi\sin\theta+\beta\sin\varphi\sin\theta+\gamma\cos\theta)\sin\theta = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\,\xi\right)d\xi$$

(ф-ла Якоби)

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dk \int_{-1}^{1} e^{ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\,\xi}\,d\xi =$$

ф-ла Эйлера

предел суммир.

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dk \int_0^{1} \cos(k r_{\text{мно}}\xi)\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dk\, \frac{\sin(k r_{\text{мно}}\xi)}{k r_{\text{мно}}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dk\, \frac{\sin(k r_{\text{мно}})}{k r_{\text{мно}}} = \frac{1}{r_{\text{мно}}}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(k r_{\text{мно}})}{k}\,dk = \frac{1}{r_{\text{мно}}}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha k}{k}\,dk = \frac{\pi}{2}, \text{ если } \alpha > 0$$

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВАЖДЫ ДИФФ-ЫХ ФУНКЦИЙ

$u \in C^2(Q) \cap C^1(\bar{Q})$

$Q \subset \mathbb{R}^3$

∂Q - кусочно-гладкая граница области Q

$$\iiint_Q (u\Delta v - v\Delta u)\,dV = \iint_{\partial Q} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$$

$$v = \frac{1}{r_{MM_0}}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = -4\pi\delta(M, M_0)$$

$$-4\pi\iiint_Q u\,\delta(M, M_0)\,dV - \iiint_Q \frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,dV = \iint_{\partial Q}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) - \frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$$

$$\iiint_Q u\,\delta(M, M_0)\,dV = \begin{cases} u(M_0), & M_0 \in Q \\ 0, & M_0 \notin Q \end{cases}$$

$\underline{\underline{n=3}}$

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\partial Q}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right) dS - \frac{1}{4\pi}\iiint_Q \frac{1}{r_{MM_0}}\Delta u\,dV$$

$\underline{\underline{n=2}}$

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial Q} \ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n} - u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}\right) dl - \frac{1}{2\pi}\iint_Q \Delta u \cdot \ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}\,dx\,dy$$

$$\rho_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Значение на границе, значение интеграла на границе, лапласиан в области.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.

Ф-я $u=u(x,y,z)=u(M)$ называется гармонической в огр. области Q, если $\Delta u=0$, $M\in Q$

Свойство:

1] Гармоническая в области Q ф-я имеет в области Q производные всех порядков ($u\in C^\infty(Q)$)

Док-во: пусть $Q_1\subset Q$, $M_0\in Q_1$

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial Q_1}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u}{\partial n}-u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right)dS$$

$M_0\in Q_1$ - внутри

$M\in\partial Q_1$ - только на границе

$r_{MM_0}\neq 0 \Rightarrow$ интеграл не несобственный

Подинтегральная ф-я диф-ма сколь угодно раз по параметрам $x_0, y_0, z_0 \Rightarrow$ сама ф-я дифф-ма ∞ раз ■

2] Пусть 1) $\Delta u=0$, $M\in Q$
2) $Q_1\subset Q$ $\Rightarrow \iint\limits_{\partial Q_1}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$ - поток

Док-во: $\iiint\limits_{Q_1} (u\underbrace{\Delta v}_{=0} - v\underbrace{\Delta u}_{=0})\,dV = \iint\limits_{\partial Q_1} (u\underbrace{\frac{\partial v}{\partial n}}_{=0} - v\frac{\partial u}{\partial n})\,dS$

$\Delta u = 0$
$v = 1$ $\quad \iint\limits_{\partial Q_1} \frac{\partial v}{\partial n}\,dS = 0.$ ■

3] Теорема (о сферическом среднем гармонической функции)

Пусть 1) $\Delta u = 0$, $M \in Q$
2) $S^r_{M_0} \subset Q$, тогда

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S^r_{M_0}} u(M)\,dS$$

Док-во: в качестве Q_1 возьмем сферу

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S^r_{M_0}} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(M) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)\right) dS =$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} \underbrace{\iint\limits_{S^r_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n}\,dS}_{=0\ (\text{св-во 2})} + \frac{1}{4\pi r^2} \iint\limits_{S^r_{M_0}} u(M)\,dS$$ ■

4] Значение гармонической ф-ии в центре шара есть среднее арифметическое её значений по шару.

$$u(M_0) = \frac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_{\mathcal{U}^R_{M_0}} u(M)\,dV$$

60

$\mathcal{U}^R_{M_0} \subset Q$

$$4\pi r^2 u(M) = \iint\limits_{S_{M_0}^r} u(M)\,dS$$

$$4\pi u(M_0)\int_0^R r^2\,dr = \int_0^R dr \iint\limits_{S_{M_0}^r} u(M)\,dS$$

$$\frac{4\pi R^3}{3} u(M_0) = \iiint\limits_{U_{M_0}^R} u(M)\,dV$$

5] Принцип max и min

Пусть 1) $\Delta u = 0$ в Q, $M \in Q$

2) $u \in C(\hat{Q})$ в замкнутой области

3) $u \neq const$

Тогда ф-л принимает max и min значение только на границе области Q.

<u>Док-во:</u> обозначим max

$M = \max\limits_{M \in \hat{Q}} u(M)$, от противного:

Пусть $\exists M_0 \in Q: M = u(M_0)$

$S_M^r \subset Q$ – строим такую сферу

$$u(M_0) = M \overset{\text{т.о ср. арифм}}{=} \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_{M_0}^r} u(M)\,dS \le \frac{M}{4\pi r^2}\overbrace{\left(\iint\limits_{S_{M_0}^r} dS\right)}^{4\pi r^2} = M$$

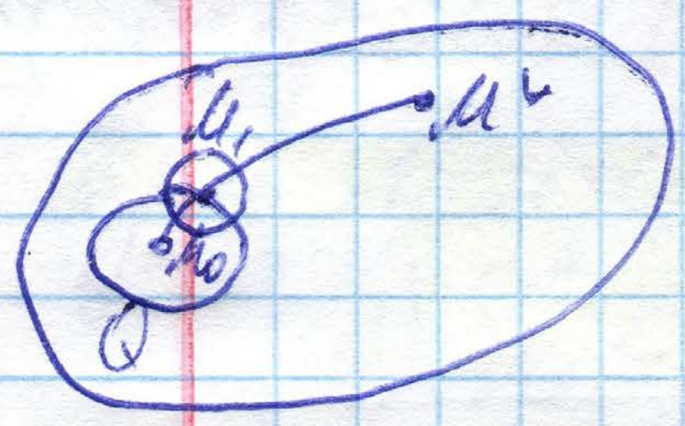
$u(M) \le M$

Может быть только "=" при $u(M) \equiv M$, $M \in S_{M_0}^r$ – радиус $\forall$, иначе бы сферо лежало

внутри области

$U(M) = M$, $M \in \mathcal{U}^R_{M_0}$, $\mathcal{U}^R_{M_0} \subset Q$

Докажем, что $U(M^*) = const$, M^* - любая точка области Q



Точки соединим непрерывной линией, целиком лежащей в Q

Для M_0 доказано, что $U \equiv const$ в шаре

Поверхность шара пересекается с линией в M, $U(M_1) = M$

M_1 берём за центр новой сферы. Опять докажем. За конечное число шагов дойдем до M^*

Принцип min аналогичен

$v = -u$ - все max станут min ☒

6] Гармоническая ф-я внутри области Q не имеет ни локальных max, ни min.

ПРИМЕР АДАМАРА

62 Показывает, что задача Коши для уравнения эллиптического типа некор-

ректно поставлена (решение $\exists!$ и непрерывно зависит от входных данных)

(1) $U_{xx}+U_{yy}=0$

(2) $U|_{x=0}=0$

(3) $U_x|_{x=0}=\frac{\sin(ny)}{n}$

Решение можно искать в виде:

(4) $U(x,y)=X(x)\sin(ny)$

(4) → (1) $X''\sin ny-n^2X\sin ny=0$

(5) $X''-n^2X=0$

(4) → (2), (3) $U|_{x=0}=X(0)\sin ny=0 \Rightarrow X(0)=0$

$U_x|_{x=0}=X'(0)\sin ny=\frac{\sin ny}{n} \Rightarrow X'(0)=\frac{1}{n}$

$p^2-n^2=0$

$p=\pm n$

$X=C_1\,sh(nx)+C_2\,ch(nx)$

$X(0)=C_2=0$

$X'(0)=nC_1=\frac{1}{n} \Rightarrow C_1=\frac{1}{n^2}$

$X(x)=\frac{sh(nx)}{n^2}$

$U=\frac{sh(nx)}{n^2}\sin(ny)$

Сформулируем ещё одну задачу

$v=v(x,y)$

$v_{xx} + v_{yy} = 0$

$v|_{x=0} = 0$ $\quad v \equiv 0$

$v_x|_{x=0} = 0$

Покажем, что в задачи Коши нарушается непрерывная зависимость от входных данных.

$|u_x|_{x=0} - v_x|_{x=0}| = \frac{|\sin(ny)|}{n} \le \frac{1}{n} \le \varepsilon$

Разницу можно сделать сколь угодно малой, если $n \ge \frac{1}{\varepsilon}$

$|u(x,y) - v(x,y)| = \frac{|\operatorname{sh} x \sin(ny)|}{n^2}$

не рассматриваем точки, где $\sin(ny) = 0$

При $n \to \infty$ в числителе $\operatorname{sh} x$ через exp и разница решений сколь угодно велика

Задача всё равно решается

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДЛЯ УР-Й ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

1). Внутренняя задача Дирихле

$n=2$: найти решение ур-я Пуассона

64 $u_{xx} + u_{yy} = f(x,t)$ в области Ω, удовлетворяющее условию Дирихле

$u|_{\partial Q} = \psi(x,y)$, где Q - огр. область $Q \subset \mathbb{R}^2$

Задача Коши на кривой без самопересечений, где задаются ф-я и её производная.

Здесь область ограничена замкнутой кривой, задаётся только одно условие

$n=3$: $M(x,y,z)$ найти решение ур-я

$\Delta u = f(M)$ в области Q, если

$u|_{\partial Q} = \varphi(M)$, Q - огр. область $Q \subset \mathbb{R}^3$

2) Внутренняя задача Неймана

$n=2$: Найти решение ур-я Пуассона

$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ в области Q, если

$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial Q} = \varphi(x,y)$, n - внешняя нормаль

$n=3$: $\Delta u = f(M)$, $M \in Q$, $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial Q} = \varphi(M)$

3) Комбинация из условий для 1 и 2

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

$n=3$ $M(x,y,z)$

Найти решение ур-я

(1) $\Delta u = f(M)$ в области Q, если

(2) $u|_{\partial Q} = \varphi(M)$, Q - огр. область $Q \subset \mathbb{R}^3$

Ф-л $u(M) \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$, удовл. (1),(2) - классическое решение

Необходимое условие $\exists$ классич. решения

$f(M) \in C(Q)$ если условия не выполнены,

$\varphi(M) \in C(\partial Q)$ решение обобщённое

Теорема (единственности)

Если классическое решение задачи (1),(2) существует, оно единственно.

Док-во: от противного. Предположим, существуют u_1 и u_2

$v = u_1 - u_2$

$\Delta v = 0$

$v|_{\partial Q} = u_1|_{\partial Q} - u_2|_{\partial Q} = \varphi(M) - \varphi(M) = 0$

$v \in C^2(Q) \cap C(\bar{Q})$

v является гармонической, для нее можно применить принцип max и min: $v \equiv 0, M \in Q$.

Теорема (о непрерывной зависимости)

Пусть $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ - решения одного и того же уравнения

$\Delta u = f(M)$, но удовлетворяют различным

гармоническим условиям

$u^{(i)}|_{\partial Q} = \varphi_i(M), \quad i=\overline{1,2}$

Тогда если $|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| \le \varepsilon$, $M \in \partial Q$, то

$|u^{(1)}(M) - u^{(2)}(M)| \le \varepsilon$, $M \in Q$

Док-во: $v = u^{(1)} - u^{(2)}$

$\Delta v = 0$, v - гармоническая

$v|_{\partial Q} = \varphi_1(M) - \varphi_2(M)$

$|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| \le \varepsilon$

$-\varepsilon \le \varphi_1(M) - \varphi_2(M) \le \varepsilon$, $M \in \partial Q$

min max

значит, $-\varepsilon \le u^{(1)}(M) - u^{(2)}(M) \le \varepsilon$ значение внутри не Q

Это следствие принципа max и min.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ.

- разделение переменных
- функция Грина
- теория потенциалов

1) $n=3$ (метод ф-лы Грина)

$G = G(M, M_0)$ $M_0(x_0, y_0, z_0)$

(3) $\Delta G = -\delta(M, M_0)$

(4) $G|_{\partial Q} = 0$

$\delta(M, M_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$

$$\iiint_Q (u\Delta v - v\Delta u)\,dV = \iint_{\partial Q}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

u - решение (1), (2)

$v = G(M, M_0)$ - возьмем в качестве v ф-ю Грина

$$\underbrace{-\iiint_Q u\,\delta(M, M_0)}_{=-u(M_0),\ \text{если } M_0 \in Q} - \iiint_Q G(M, M_0) f(M)\,dV = \iint_{\partial Q} \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial n}(M, M_0)\,dS$$

(5) $$u(M_0) = -\iint_{\partial Q}\varphi(M)\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}dS - \iiint_Q f(M)G(M, M_0)\,dS$$

Найдем решение в 1 точке области

ФРУ Лапласа: $\frac{1}{r_{MM_0}}$

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) = -4\pi\delta(M, M_0) \quad (6)$$

Найдем решение (3), (4) в виде

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} + g(M, M_0) \quad (7)$$

Сформулируем задачу для g

$$\Delta G = \underbrace{\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)}_{\to\infty \text{ при } M\to M_0} + \underbrace{\Delta g}_{\text{ограничена}} = -\delta(M, M_0) + \Delta g = -\delta(M, M_0)$$

68 $\Delta g = 0$ (8)

Ф-ий Грина задачи Дирихле для области Q называется ф-я, которая внутри Q имеет представление:

1) $G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} + g(M, M_0)$, $M \in Q$ для $\forall$ фиксир. $M_0 \in Q$

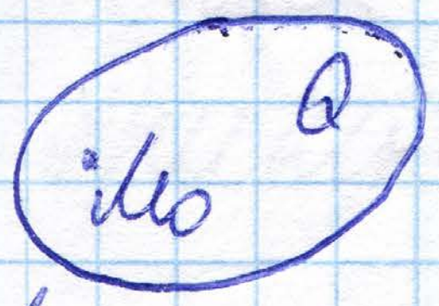
2) $\Delta g = 0$, $M \in Q$ (гармоническая)

3) $G|_{\partial Q} = 0$

Свойство ф-ий Грина

1) $G(M, M_0) > 0$, $M \in Q$

Док-во: Можно построить такую сферу, что $G|_{S^r_{M_0}} > 0$



Рассмотрим $Q - Ш^r_{M_0}$ (область с вышеуказ. шаром)

$\Delta G = 0$, $M \in Q - Ш^r_{M_0}$

$G|_{\partial Q} = 0$

$G|_{S^\varepsilon_{M_0}} > 0$

$G(M, M_0) > 0$, $M \in Q - Ш^\varepsilon_{M_0}$

Внутри шара ε до сферы $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}}$ ◻

2) $G(M, M_0) < \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}}$, $M \in Q$

Док-во: $\Delta g = 0$, $M \in Q$ - гармоническая

$g|_{\partial Q} = \underbrace{G|_{\partial Q}}_{=0} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}}$

По границе пришлось отриц. заряд

$g(M, M_0) < 0, \ M \in Q$

$G(M, M_0)' < \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}}$ ■

3) $\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{\partial Q} < 0$ при переходе к границе ф-л убывает

$G|_{\partial Q} = 0$

$G(M, M_0) > 0, \ M \in Q$

4) $G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$ - ф-л Грина симметрична

Док-во: из 2-й ф-лы Грина

$$\iiint_Q (u \Delta v - v \Delta u)\, dV = \iint_{\partial Q} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS$$

$u = G(M, M_1)$

$v = G(M, M_2)$

$$\iiint_Q \Big[G(M, M_1) \underbrace{\Delta G(M, M_2)}_{-\delta(M, M_2)} - G(M, M_2) \underbrace{\Delta G(M, M_1)}_{-\delta(M, M_1)} \Big] dV = 0$$

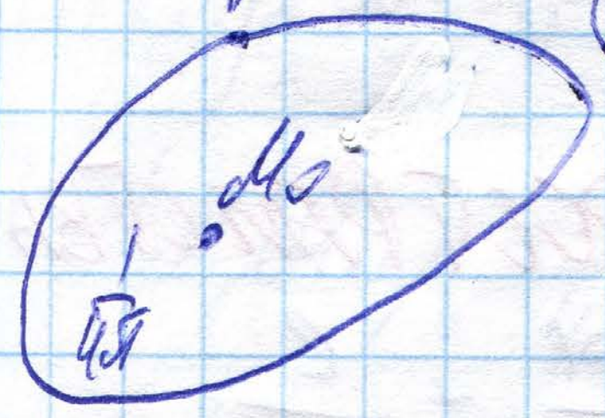
$G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$

$-G(M_2, M_1) + G(M_1, M_2) = 0$ ■

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ Ф-ИИ ГРИНА

70 Будем предполагать, что область Q практически проводящей поверхностью. Внутри области в точке M_0 помещаем заряд $\frac{1}{4\pi}$.

Он создаёт потенциал $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}}$. Граница — проводник. Индуцируются заряды, которые создают дополнительный потенциал внутри области



$$G = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} + g(M, M_0)$$

$$G|_{\partial\Omega} = 0$$

Потенциал электростатического поля, который создаёт заряд, помещённый в точку M_0, ограниченный областью (проводящей заземлённой поверхностью)

Принцип взаимности (симметричности)

МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ Ф-ИИ ГРИНА

- метод разделения переменных
- метод отражений (электростатических изображений)

Применим не для любой области. Область должна быть ограничена плоскостями или сферами

$$G = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} + g(M, M_0)$$

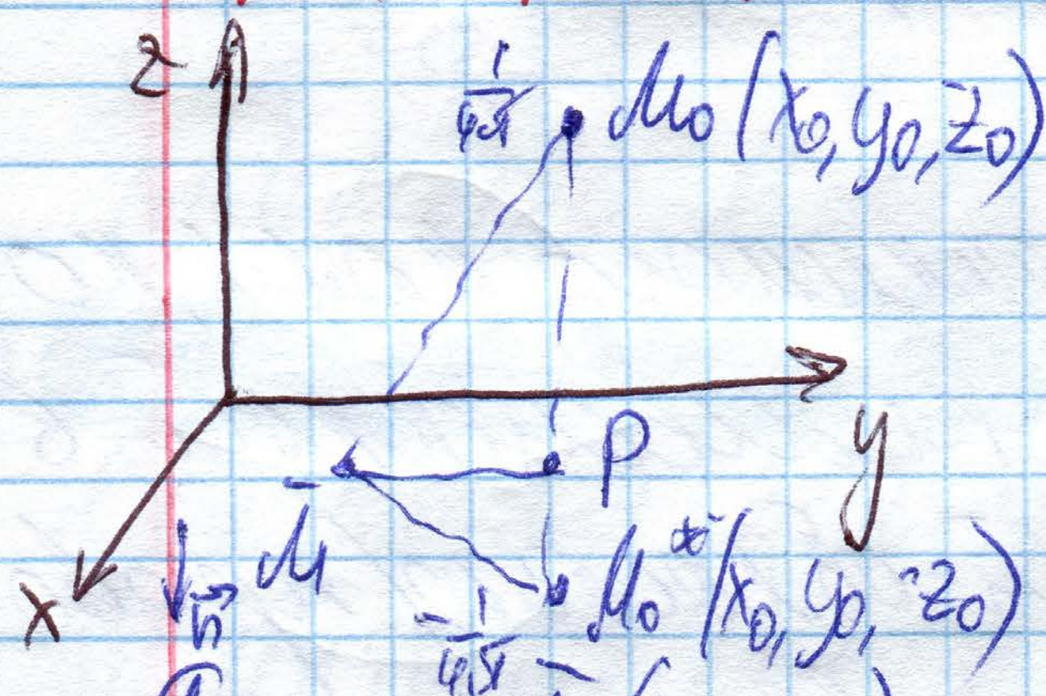
Индуцированны заряды заменим на

фиксировке вне области Q

$$g = \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{r_{MM_i}}, \quad M_i \notin \tilde{Q}$$

Величина зарядов и точки M_i подбираются специальным образом.

Ф-я ГРИНА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА



$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{e}{r_{MM_0^*}}$$

Подберем e так, чтобы $G|_{z=0} = 0$

Пусть $\tilde{M}(x, y, 0)$ - любая точка

$$\Delta \tilde{M} M_0 P = \Delta \tilde{M} M_0^* P \Rightarrow r_{\tilde{M}M_0} = r_{\tilde{M}M_0^*}$$

$$G(\tilde{M}, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{\tilde{M}M_0}} + \frac{e}{r_{\tilde{M}M_0^*}} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{\tilde{M}M_0}} + \frac{e}{r_{\tilde{M}M_0}} =$$

$$= \frac{1}{r_{\tilde{M}M_0}}\left(\frac{1}{4\pi} + e\right) \Rightarrow e = -\frac{1}{4\pi}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{e}{r_{MM_0^*}}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_0^*}}\right)$$

Решим задачу Дирихле, используя ф-лу Грина:

72 $\Delta U = 0, z > 0$

$$u|_{z=0} = F(x,y)$$

$$u(M_0) = -\iint\limits_{\partial Q} F(M)\,\frac{\partial G(M,M_0)}{\partial n}\,dS$$

внешняя

$$u(x_0,y_0,z_0) = -\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\,F(x,y)\left(-\frac{\partial G}{\partial z}\right)\Big|_{z=0}$$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{-(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{3/2}} + \frac{(z+z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2]^{3/2}}\right)\Bigg|_{z=0}$$

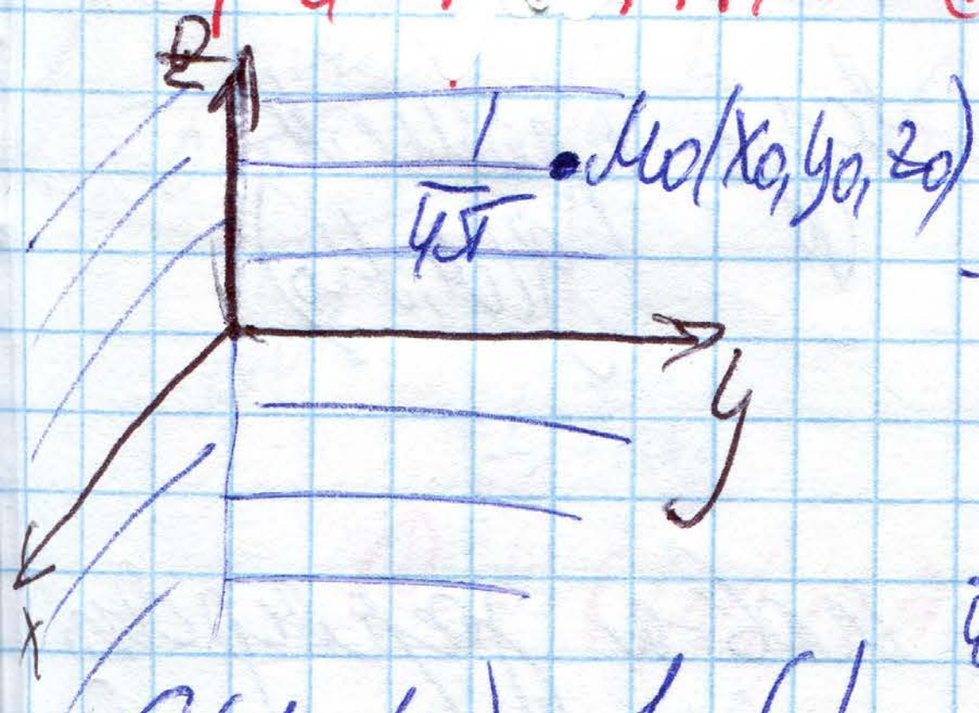
$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}$$

$$u(x_0,y_0,z_0) = \frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\frac{F(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}$$

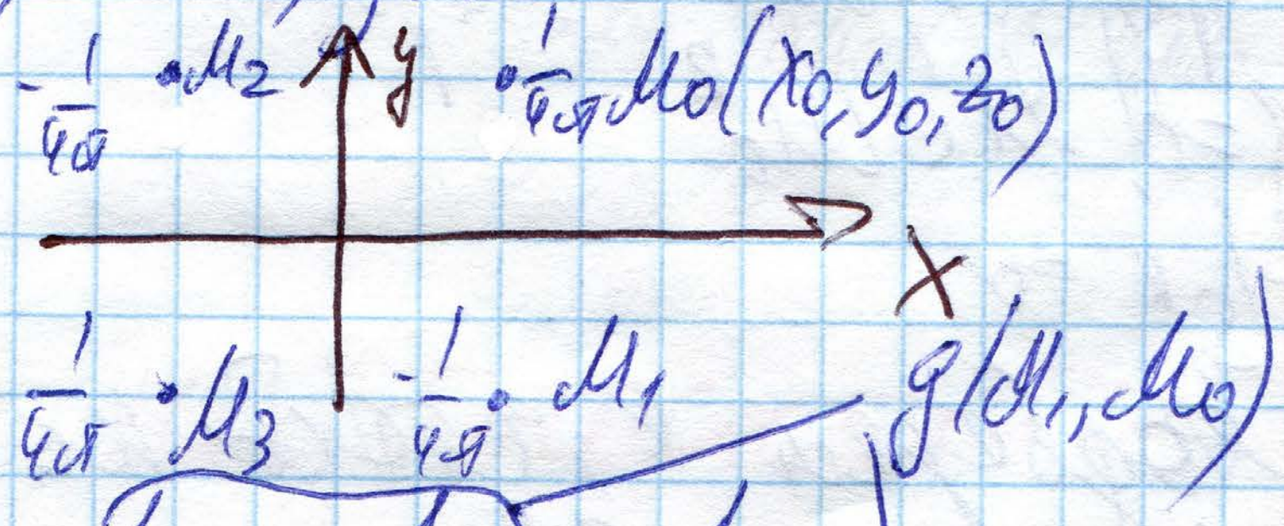
$x_0\to x,\ y_0\to y,\ z_0\to z,\ x\to\xi,\ y\to\eta$

$$u(x,y,z) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\,\frac{F(\xi,\eta)}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{3/2}}$$

Ф-я ГРИНА ДЛЯ 2-Х ГРАННОГО УГЛА.



$x>0,\ y>0$



$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}} - \frac{1}{r_{MM_2}} + \frac{1}{r_{MM_3}}\right)$$

$\Delta g > 0,\ x > 0,\ y > 0$

$G|_{x=0} = 0$

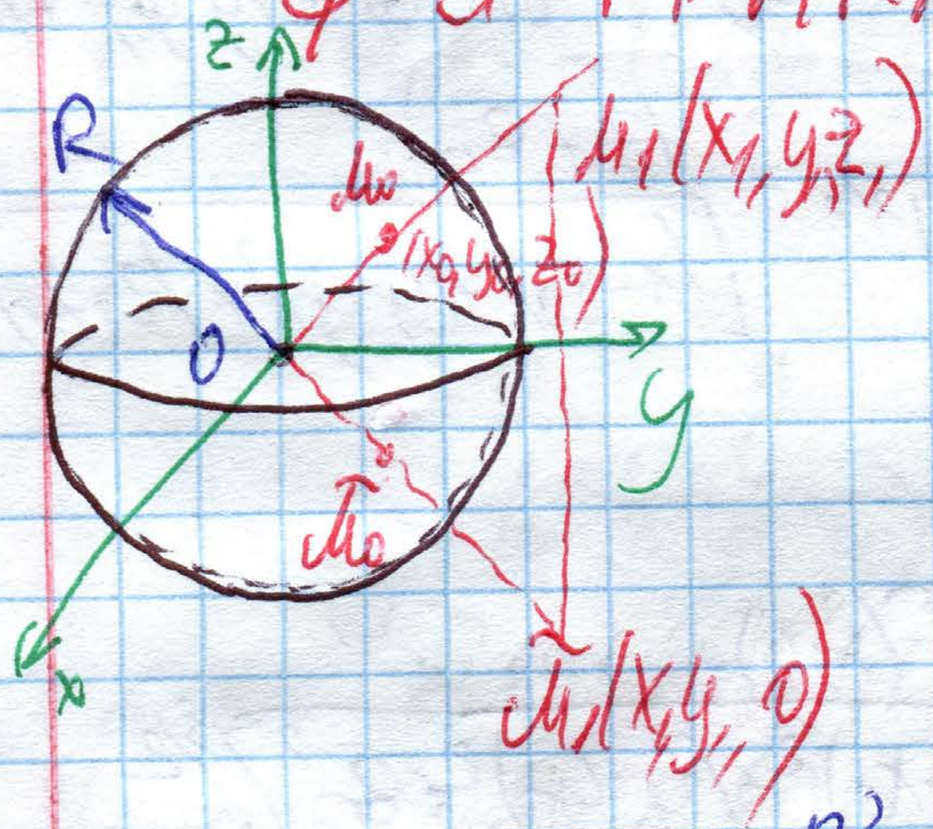
$G|_{y=0} = 0$

$\underline{S_m}$, $m < n$ - точек полезное число

n

S_{n-2} - число симметричных точек

Ф-Л ГРИНА ДЛЯ ШАРА



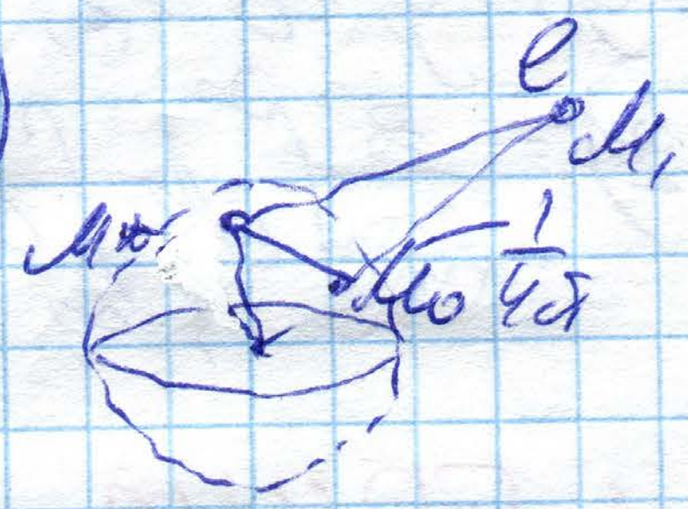
M_1 симметрично M_0, если

$r_{OM_0} \cdot r_{OM_1} = R^2$ (1)

$\Delta O\tilde{M}_0 M_0 \sim \Delta O\tilde{M}_1 M_1$

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{r_{OM_1}}{r_{OM_0}}$$

$$z_1 = \frac{z_0 \cdot r_{OM_1}}{r_{OM_0}} = \frac{z_0 R^2}{r_{OM_0}^2} = \frac{z_0 R^2}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}$$



$$x_1 = \frac{x_0 R^2}{r_{OM_0}^2},\quad y_1 = \frac{y_0 R^2}{r_{OM_0}^2}$$

$$G(M, M_0) = \underbrace{\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{MM_0}}}_{\text{фунд. реш.}} + \underbrace{\frac{e}{r_{MM_1}}}_{\text{гармоним. вр, прост. } g(M, M_0)}$$

$\Delta g = 0,\ M \in W_0^R$

$G|_{S_0^R} = 0$

Подберем e, чтобы по пов-и заряды

74 Пусть $M^* \in S_0^R$

$G(M^*, M_0) = 0$

$\triangle OM^*M_0 \sim OM^*M_1$,

$\angle M^*OM_0$ - общий

$$\frac{r_{OM_0}}{r_{OM^*}} = \frac{r_{OM^*}}{r_{OM_1}} = \{\text{опр. } (1)\} = \frac{r_{M^*M_0}}{r_{M^*M_1}}$$

$r_{OM^*} = R$

$$r_{M^*M_1} = \frac{R}{r_{OM_0}} r_{M^*M_0} \quad (2)$$

$$G(M^*, M_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{M^*M_0}} + \frac{c}{r_{M^*M_1}} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{M^*M_0}} + \frac{c\, r_{OM_0}}{R\, r_{M^*M_0}} =$$

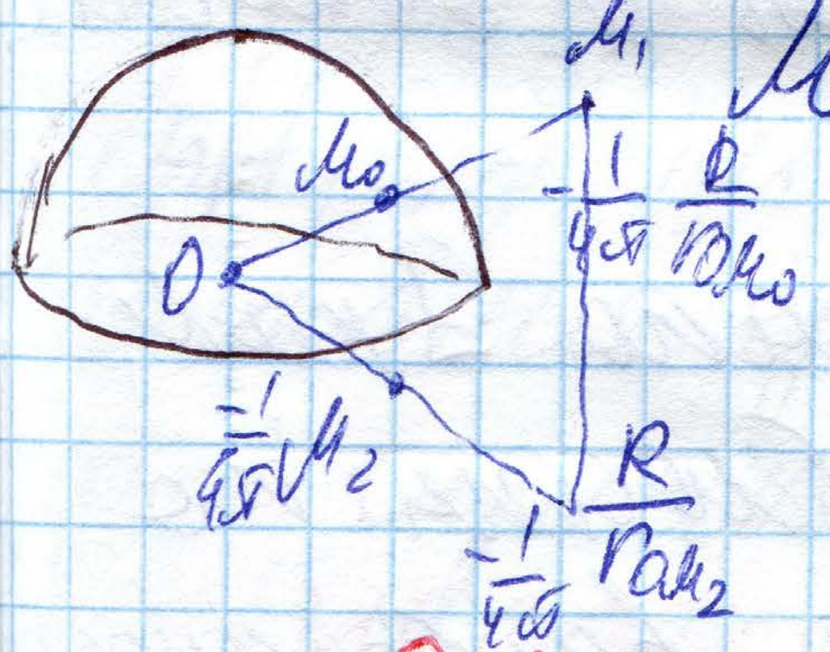
$$= \frac{1}{r_{M^*M_0}}\left(\frac{1}{4\pi} + \frac{c\, r_{OM_0}}{R}\right) = 0$$

$$c = -\frac{1}{4\pi}\frac{R}{r_{OM_0}}$$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{r_{OM_0}}\frac{1}{r_{MM_1}}\right) \quad (3)$$ - ф-я Грина для шара

Задача Дирихле?

Ф-я ГРИНА ВНЕ ПОЛУСФЕРЫ.



$M_0O = M_2O$

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{R}{r_{OM_0}}\frac{1}{r_{MM_1}} - \frac{1}{r_{MM_2}} - \frac{1}{r_{MM_3}}\right)$$

Ф-я ГРИНА НА ПЛОСКОСТИ

$n = 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$M(x,y)$, $M_0(x_0,y_0)$

$r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Опр $G(M,M_0)$ для ф-ии на плоскости называется ф-я 4-х переменных, которая в Q:

1) $G(M,M_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}}_{\text{фунд. решение ф-я Лапласа}} + g(M,M_0)$, $M \in Q$

ф-я 4-х переменных

длина окружности с $R=1$

$M \in Q$, M_0 - фиксир., $M_0 \in Q$

2) g - гармоническая в обл: $\Delta g = 0$, $M \in Q$

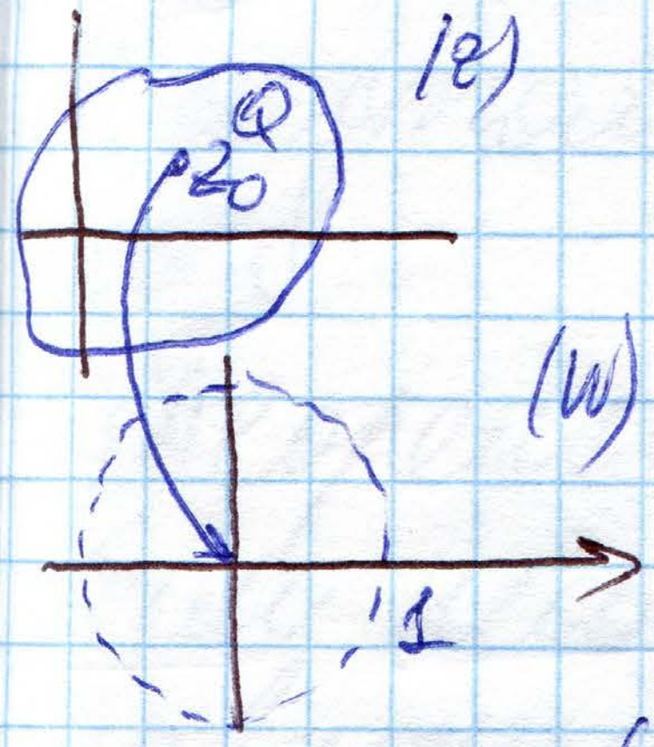
3) $G|_{\partial Q} = 0$ на границе.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ G С ПОМОЩЬЮ КОМФОРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть в $\mathbb{C}_z$ задана область Q, отличная от всей плоскости

Тогда по теореме Римана $\exists$ комфорное отображение области на единичную окружность и внутренность круга.

$w = w(z, z_0)$ - отобр. на внутр. ед. круга



Покажем что

$$G(x,y,x_0,y_0) = G(z,z_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|W(z,z_0)|}$$

$$W(z_0,z_0)=0$$

3):

$\partial Q \to |W|=1$ - преобр. в окружност

1): $G|_{\partial Q} = \frac{1}{2\pi}\ln 1 = 0$

$z=z_0$ - нуль 1-го порядка

$W(z,z_0)\neq 0,\ z\in Q$

$$G(M,M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0||f(z,z_0)|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|} - \overbrace{\frac{1}{2\pi}\ln|f(z,z_0)|}^{g(z,z_0)}$$

$\Rightarrow$ представление по 1) имеет место

2): $f(z,z_0)$ - аналитическая, в Q нигде не обращается в 0.

$\ln f(z,z_0)$ - тоже аналитическая в Q

$\ln|f(z,z_0)| + i\arg f(z,z_0)$

У аналит. ф-ии реальная часть есть ф-я гармоническая: $\Delta g=0$.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ С ПАРАМЕТРОМ

$n=3$, Q - огр. область, $Q\subset R^3$

$$u(M) = \iiint\limits_{Q} F(M,P)\,dV \quad (2)$$

$M(x,y,z)$

$P(\xi,\eta,\zeta)$

$dV = dV_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta$

$F\big|_{P=M} = \infty$

если $P \neq M$, то ф-я неограниченная

$$u(M_0) = \iiint\limits_{Q} F(M_0,P)\,dV_P \quad (1)$$

сх-ся если $\exists$ предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{Q-\Gamma_{M_0}^{\varepsilon}} F(M_0,P)\,dV_P = \iiint\limits_{Q} F(M_0,P)\,dV_P$$

$\Gamma_{M_0}^{\varepsilon}$ ← окрестность диаметра ε

Пусть (1) сх-ся, тогда св-во сх-ся интегрально,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, что $\left|\iiint\limits_{\Gamma_{M_0}^{\delta}} F(M_0,P)\,dV_P\right| < \varepsilon$

лишь только $d \le \delta$

<u>Опр</u> (1) сх-ся равномерно в т. M_0, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$, что $\left|\iiint\limits_{\Gamma_{M_0}^{\delta}} F(M,P)\,dV_P\right| \le \varepsilon$ лишь

только 1) $d \le \delta$

2) $r_{MM_0} \le \delta$

Неравенство выполняется для всех

M, отстоящих от M_0 не дальше чем на δ.

Теорема 1.

Если несобственный интеграл сх-ся равномерно в т. M_0, то он является ф-ей непрерывной в M_0.

Теорема 2.

1) Пусть подынтегральная ф-я F есть ф-я дифф-мая по координатам M (при всех $P \neq M$)

2) Интеграл сх-ся в т. M_0.

3) Интеграл от производной сх-ся равномерно в т. M_0

Тогда сам интеграл есть ф-я дифф-мая в т. M_0 и эту производную можно посчитать перестановкой

$$\frac{dJ}{dx}\Big|_{M=M_0} = \iiint_{Q} \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M=M_0} dV_P.$$

ОБЪЁМНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

7

Пусть есть дискретное кол-во точек

e_1 e_2 e_3 $\quad u(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_{MP_i}}$ - потенциал

P_1 P_2 P_n

$$\iiint_Q \rho(P)\, dV_P = e$$

dV_P ①

$\rho(P)$ - плотность распр. зар.

$$\iiint_Q \frac{\rho(P)\, dV_P}{r_{MP}} = u(M)$$ объёмный потенциал

$|\rho(P)| \le A$ ограничено и интегрируем

Свойства:

1) Непрерывен всюду

$u(M) \in C(\mathbb{R}^3)$

Док-во: а) в фиксированной точке $M_0 \notin Q$

$r_{MP} \neq 0$, интеграл не является несобственным. Подынтегральная ф-я непрерывна в т. M_0, сам интеграл непрерывен в т. M_0

б) $M_0 \in Q$, интеграл несобственный

Согласно теореме 1 достаточно доказать равн. сх-ть интеграла в (1) в M_0

80 $$\left|\iiint_{\sigma_{M_0}^{\delta}} \frac{\rho(P)\, dV_P}{r_{MP}}\right| \le A \iiint_{\sigma_{M_0}^{\delta}} \frac{dV_P}{r_{MP}} \le A \iiint_{U_M^{2\delta}} \frac{dV_P}{r_{MP}} = A\int_0^{2\delta} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, r^2 \times$$

$\times \sin\theta \cdot \frac{1}{r}$ =

$Ш_M^{2\delta}, T_{M_0}^{\delta} < Ш_M^{2\delta}$

шар с центром M радиуса 2δ

$\Leftrightarrow A \cdot 4\pi \frac{(2\delta)^2}{2} = \varepsilon$

2) Объёмный потенциал есть ф-я диф-мая всюду, и все производные можно вычислить перестановкой дифф. и инт.

$U(M) \in C^1(\mathbb{R}^3)$

Для (1) взять произв-ю по, док-ать равн. сх-ть в т. M_0 по теореме 2.

3) Объёмный потенциал есть ф-я гармоническая вне области $\bar{Q}$

$\Delta U = 0, M \in \bar{Q}$

$\int$ не несобств., ф-я диф-ма сколь угодно раз, все пр-ные считаются перестановкой

$\Delta U = \iiint\limits_Q \rho(P) \underbrace{\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)}_{=0} dV_P = 0$

4) $U(M) \to 0 \quad M \to \infty$

Док-во: $U(M) \underset{\text{теор. о среднем}}{=} \frac{1}{r_{MP}} \overbrace{\iiint\limits_Q \rho(P)\, dV_P}^{=e} = \frac{c}{r_{MP^*}} \to 0, M \to \infty$

P^* - средняя точка $\in \bar{Q}$

5) Пусть $\rho(P) \in C^1(Q)$, произвольные ограничения

$\Delta u = -4\pi\delta(M)$, $M \in Q$

Формально $\Delta u = \iiint\limits_Q \rho(P)\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)dV_P =$

$= -4\pi\iiint\limits_Q \rho(P)\delta(M,P)\,dV_P = -4\pi\delta(M)$, $M \in Q$

$\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) = -4\pi\delta(M,P)$

ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЪЁМНОГО ПОТЕНЦИАЛА

(1) $\Delta u = f(M)$, $M \in Q$

(2) $\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_{\partial Q} = F(M)$

Согласно св-ву 5) можно записать частное

$u_n(M) = \frac{-1}{4\pi}\iiint\limits_Q \frac{f(P)}{r_{MP}}dV_P$

$u(M) = u_n(M) + v(M)$

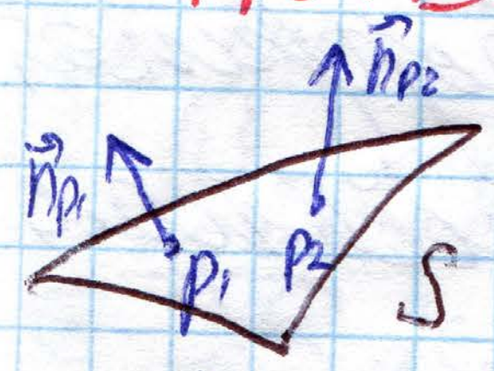
$\Delta v = 0$, $M \in Q$

$\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial n} + \beta v\right)\Big|_{\partial Q} = \left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_{\partial Q} - \left(\alpha\frac{\partial u_n}{\partial n} + \beta u_n\right)\Big|_{\partial Q} =$

$= F(M) - \left(\alpha\frac{\partial u_n}{\partial n} + \beta u_n\right)\Big|_{\partial Q} = \tilde{F}(M)$

С помощью объёмного потенциала задачу для неопр. ур-я сводится к задаче для однородного.

ПОТЕНЦИАЛ ПРОСТОГО СЛОЯ



У некоторой пов-ти S распределен заряд $\rho(p)$

$$u(M) = \iint\limits_S \frac{\rho(p)}{r_{Mp}}\, dS_p$$ – потенциал простого слоя

Поверхность S называется пов-ю Ляпунова, если:

1) В каждой точке пов-ти существует касательная плоскость к поверхности, тогда в ε каждой точки пов-ти можно ввести локальную систему координат. За плоскость ξ, η взять касательные, n за ось ξ.

2) Существует $d>0$, такая, что, если построить сферу с центром в $\forall$ точке пов-ти радиусом d, то вся пов-ть разделится на 2 части (внутр. и внеш.)

$\forall$ прямая, $\parallel$ нормали, внутри сферы пересекает пов-ть только один раз

– слишком большое d.

Запрещено пов-ть с частыми изгибами

Тогда в локальной системе координат можно записать ур-е в разрешённом виде: $\xi = F(\xi, \eta)$ - однозначная

3) $\gamma(\vec{n}_{p_1}, \vec{n}_{p_2}) \le A\, r^{\delta}_{p_1 p_2}$ $\quad \delta \le 1,\ A > 0$

Если точки близки

Λ - не может, Π - может

$$U(M) = \iint_S \frac{\rho(p)}{r_{Mr}}\, dS$$

S - поверхность Ляпунова

$\rho(p)$ - интеграл на S.

$|\rho(p)| \le A$.

$\boxed{1}$ $U(M) \in C(\mathbb{R}^3)$ потенциал простого поля непрерывен

Док-во: $M_0 \notin S$ $\Rightarrow$ интеграл непрерывен

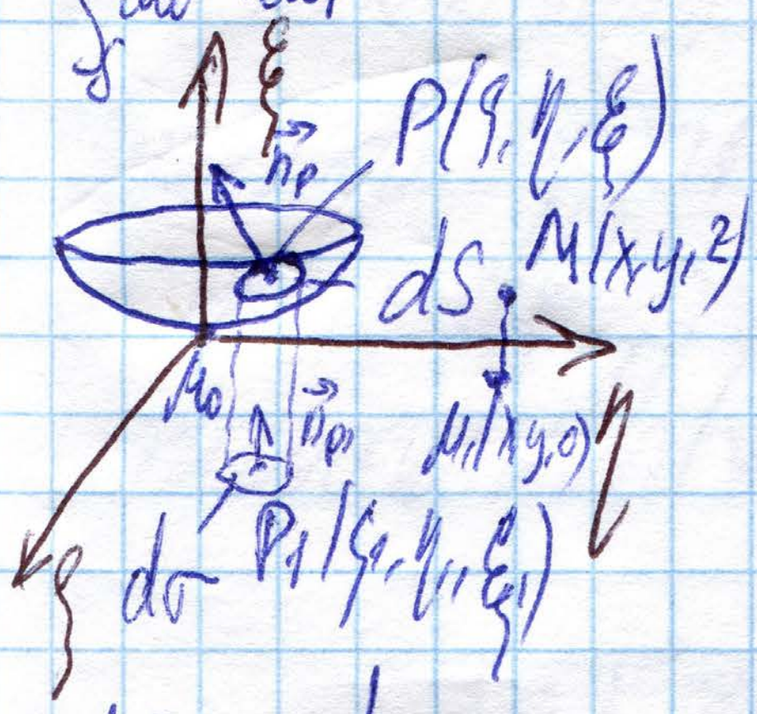
$r_{M_0 p}$

б) $M_0 \in S$ - интеграл несобств.

По теореме 1

$\boxed{81}$ Достаточно док-ать, что интеграл в т. M_0 равномерно сх-ся

$$\left|\iint\limits_{S_\delta^{M_0}} \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,dS\right| \qquad S_\delta^{M_0} \subset S,\ M_0 \in S_\delta^{M_0}$$



пов-ть Ляпунова

$$\left|\iint\limits_{S_\delta^{M_0}} \frac{\rho(P)}{r_{MP}}\,dS\right| \le A\iint\limits_{S_\delta^{M_0}} \frac{dS}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \le$$

$$\le A\iint\limits_{S_\delta^{M_0}} \frac{dS}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \ominus$$

$$dS = \frac{d\sigma}{\cos(\vec{n}_P,\vec{n}_{P_1})} = \frac{d\sigma}{\cos(\vec{n}_P,\vec{n}_{M_0})} \qquad S_\delta^{M_0} \to \Pi_{M_0}^\delta$$

$$\ominus\ A\iint\limits_{\Pi_{M_0}^\delta} \frac{d\sigma}{\cos(\vec{n}_P,\vec{n}_{M_0})\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \boxed{\le}$$

$d\sigma = d\xi\,d\eta$ с точностью до 2-го порядка

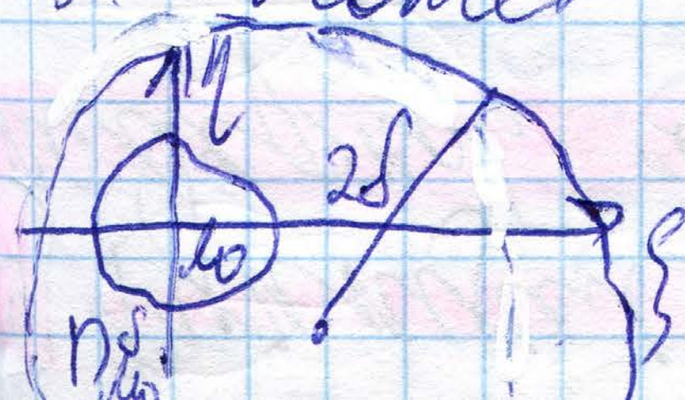
$\cos(\vec{n}_P,\vec{n}_{M_0}) \le A\,r_{PM_0}^\delta$

если P и M_0 близки, r мало, δ мало, δ выбираем так, чтобы $\cos(\vec{n}_P,\vec{n}_{P_1}) \ge \frac{1}{2}$

$$\boxed{\le}\ 2A\iint\limits_{\Pi_{M_0}^\delta} \frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \ \triangle$$

Пусть M - любая точка из $r_{MM_0} \le \delta$

M может быть на/вне пов-ти



$r_{MM_0} \le \delta$

$K_M^{2\delta}$ - круг

увеличим обл. интегрирования

$$\boxed{\leq}\ 2A\iint\limits_{K_M,\ 2\delta}\frac{d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = 2A\int\limits_{0}^{2\delta}dr\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\cdot\frac{1}{r}\cdot r = 2A\cdot 2\delta\cdot 2\pi = \varepsilon$$

интеграл равн. сх-ся, поэтому он непрерывен в т. M_0.

2] Потенциал простого слоя есть ф-я гармоническая вне пов-ти S.

$\Delta U = 0,\ M \notin S$

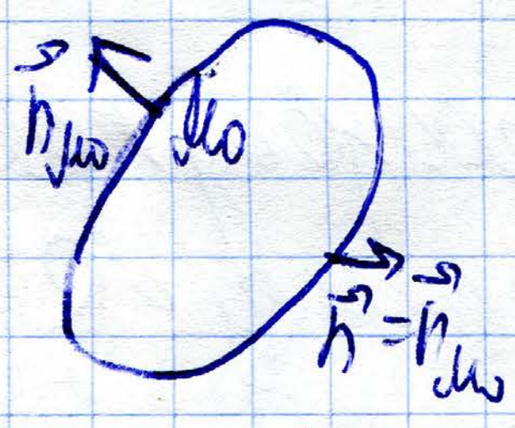
<u>Док-во:</u> $M \in S$, интеграл не является несобств., он дифф-м сколь угодно раз

$$\Delta U = \iint\limits_S \rho(P)\,\underbrace{\Delta\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)}_{=0}dS = 0$$

3] $U(M) \to 0,\ M \to \infty$

$$U(M) = \frac{1}{r_{MP^*}}\underbrace{\iint\limits_S \rho(P)\,dS}_{\text{е-заряд}},\quad P^* \in S$$

4] $S = \partial Q,\ M_0 \in \partial Q$



$$\frac{\partial U}{\partial n}(M) = \iint\limits_{\partial Q}\rho(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)dS\ \boxed{=}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) = -\frac{1}{r_{MP}^2}\frac{\partial}{\partial n}(r_{MP}) = -\frac{1}{r_{MP}}\left(\operatorname{grad} r_{MP}, \vec{n}\right) =$$

$$\operatorname{grad} r_{MP} = \left(\frac{\partial r_{MP}}{\partial x}, \frac{\partial r_{MP}}{\partial y}, \frac{\partial r_{MP}}{\partial z}\right) = \frac{\vec{r}_{MP}}{r_{MP}};\ (x-\xi, y-\eta, z-\zeta) = \vec{r}_M$$

$$\ominus -\frac{1}{r_{Mp}^3}(\vec{r}_{pM}, \vec{n}) = -\frac{1}{r_{Mp}^2}\cos(\vec{r}_{pM}, \vec{n}) = \frac{\cos(\vec{r}_{Mp}, \vec{n}_{M_0})}{r_{Mp}^2}$$

$$\boxed{=} \iint_{\partial Q} \rho(p)\frac{\cos(\vec{r}_{Mp}, \vec{n}_{M_0})}{r_{Mp}^2}, \quad M \notin S$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(M_0) = \iint_{\partial Q} \rho(p)\frac{\cos(\vec{r}_{M_0p}, \vec{n}_{M_0})}{r_{M_0p}^2}dS$$

$\frac{1}{r_{M_0p}^2}$ – неинтегрируемая особенность, но $\cos(\vec{r}_{M_0p}, \vec{n}_{M_0}) \xrightarrow[p\to M_0]{} \frac{\pi}{2}$ поглощается св-ом интеграла

$$\frac{\partial u}{\partial n}(M_0) = \iint_{\partial Q} \rho(p)\frac{\cos(\vec{r}_{M_0p}, \vec{n}_{M_0})}{r_{M_0p}}dS$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(M_0)_{внутр} = \lim_{M\to M_0}\frac{\partial u(M)}{\partial n}$$

Можно показать, что если $\rho(p) \in C(\partial Q)$, то такой $\lim \exists$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n_{нар}} = \lim_{\substack{M\to M_0\\ M\notin Q}}\frac{\partial u(M)}{\partial n} \text{ (стремится снаружи)}$$

Если $\rho(p)$ непрерывна по ∂Q, то производная по нормали при переходе через границу ∂Q терпит скачок 1-го рода.

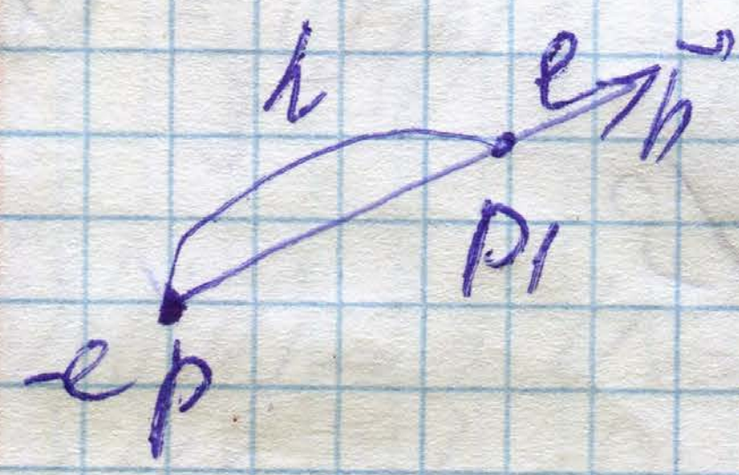
$\boxed{87}$ Справедливо:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial n_{внутр}} = \frac{\partial U(M_0)}{\partial n} + 2\pi\sigma(M_0) \quad (1) \qquad M_0 \in \partial Q$$

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial n_{наруж}} = \frac{\partial U(M_0)}{\partial n} - 2\pi\sigma(M_0) \quad (2) \qquad \vec{n} = \vec{n}_{M_0}$$

Вычитаем сначала (1) − (2) = $4\pi\sigma(M_0)$

Потенциал двойного слоя



Заряды образуют диполь

$\vec{n}$ - ось диполя

$$U(M) = \frac{e}{r_{MP_1}} - \frac{e}{r_{MP}} \boxed{=}$$

Теорема Лагранжа.

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \ \xi \in [a,b]$$

$$\boxed{=} \ e h \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)\Big|_{P=P^*}$$

момент диполя = ν Точечный диполь: фиксируем ν и $P_1 \to P$; $h \to 0$, $eh = \nu = const$ (так, чтобы момент)

$$U(M) = \nu \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) \qquad \nu = const$$

$\vec{n}$ - ось диполя

Плотность момента того ν

Предположим, оси диполей в

88

173

пойдет точно совпадает с выбранным положит. напр. нормали. Тогда

$$U(M) = \iint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dS$$ – потенциал двойного слоя

дифф-е по $\{\eta, \xi, \zeta\}$ (вложенная ф.) При этом можем делать операнов.

(1) $$U(M) = \iint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dS.$$

$$\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) = -\frac{1}{r_{MP}^2}\left(\operatorname{grad} r_{MP}, \vec{n}_P\right) =$$

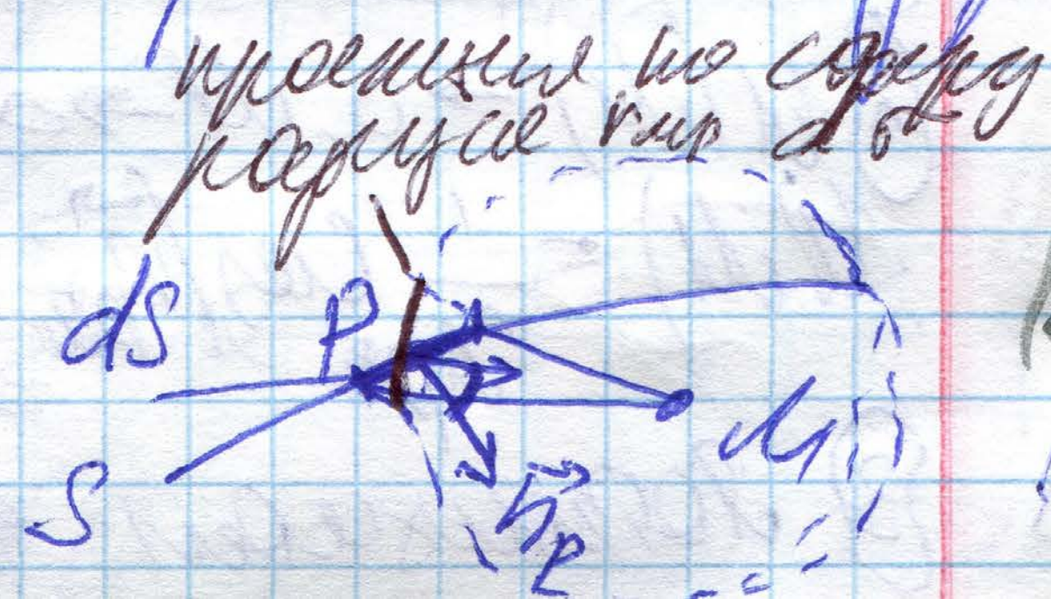
$$\operatorname{grad} r_{MP} = \left(\frac{\partial r_{MP}}{\partial \xi}, \frac{\partial r_{MP}}{\partial \eta}, \frac{\partial r_{MP}}{\partial \zeta}\right) = \frac{\vec{r}_{MP}}{r_{MP}}$$

$$= \frac{1}{r_{MP}^2} \cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)$$

(2) $$U(M) = \iint_S \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} dS$$

Телесный угол – часть пространства внутри конической пов-ти.

$d\sigma$ = эл. кусок пов-ти сферы радиуса r_{MP}



$d\sigma = \cos(\vec{r}_{pM}, \vec{n}_p)\, dS$

dS_1 - эл. кусок сферы единичного радиуса

$$dS_1 = \frac{d\sigma}{r_{Mp}^2} = \frac{\cos(\vec{r}_{pM}, \vec{n}_p)\, dS}{r_{Mp}^2}$$

От cos модуль, если угол тупой.

Телесный угол имеет знак „+", если из M видно нормаль. Если не видим, то угол отрицательный.

Дифференциал телесного угла $d\omega_{Mp}$, p - точка пробегает пов-ть S. дифф-ал телесного угла по ф-ле $dS_1 = \ldots$

$$d\omega_{Mp} = \frac{\cos(\vec{r}_{pM}, \vec{n}_p)\, dS}{r_{Mp}^2}$$

(3) $u(M) = \int\limits_S \nu(p)\, d\omega_{Mp}$

Свойства:

1. Определен всюду
2. $u(M) \to 0,\ M \to \infty$ полный момент

90

$$u(M) = \frac{1}{r_{Mp^*}} \cos(\vec{r}_{p^*M}, \vec{n}_{p^*}) \int\limits_S \nu(p)\, dS$$

175

3. Потенциал двойного слоя есть ф-л

гармоническая вне пов-ти S

$\Delta U = 0,\ M \notin S$

(1) → интеграл не использ.

Все производные считая непрерывной $\Delta U = \iint_S \nu(P) \Delta_M \left(\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right)\right) dS = \iint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \underbrace{\left(\Delta \frac{1}{r_{MP}}\right)}_{=0} dS = 0$

$M \neq P$.

$$U(M) = \iint_S \nu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dS \quad (1)$$

$$U(M) = \iint_S \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n})}{r^2_{MP}} dS \quad (2)$$

$$U(M) = \iint_S \nu(P)\, d\omega_{MP} \quad (3)$$

1.

2 $\Delta U = 0,\ M \notin S$

3. $U(M) \to 0,\ M \to \infty$

$$U(M) = \frac{1}{r^2_{MP}} \cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}) \iint_S \nu(P) dS \to 0,\ M \to \infty$$

4 $S = \partial Q$

$\nu(P) \equiv 1$

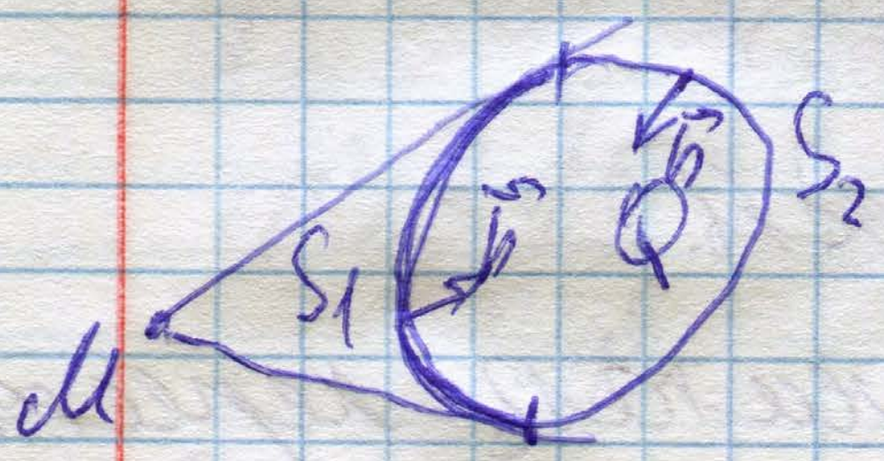
$$U(M) = \iint_{\partial Q} d\omega_{MP} = \iint_{\partial Q} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dS$$

$$\tilde{U}(M) = \iint_{\partial Q} d\omega_{MP} = \begin{cases} 4\pi, & M \in Q \\ 2\pi, & M \in \partial Q \\ 0, & M \notin \bar{Q} \end{cases}$$

$\bar{Q}$ - замкнутая область

n-внутр. нормаль

1. $M \notin \bar{Q}$

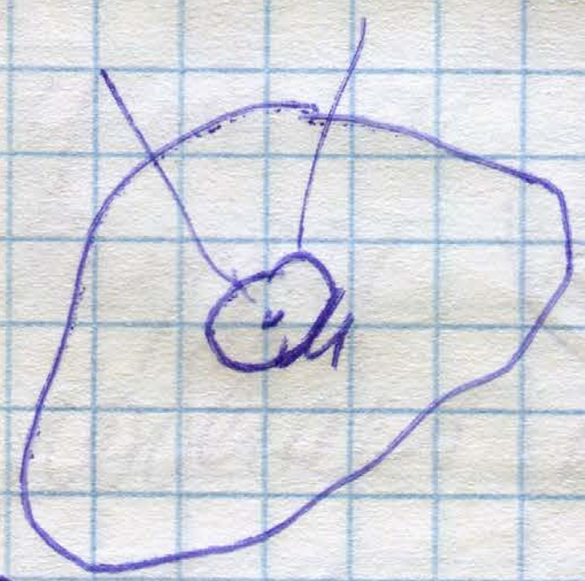


$\partial Q = S_1 + S_2$

$$\iint\limits_{\partial Q} du_{пр} = \underbrace{\iint\limits_{S_1} du_{пр}}_{<0} + \underbrace{\iint\limits_{S_2} du_{пр}}_{>0} = 0$$

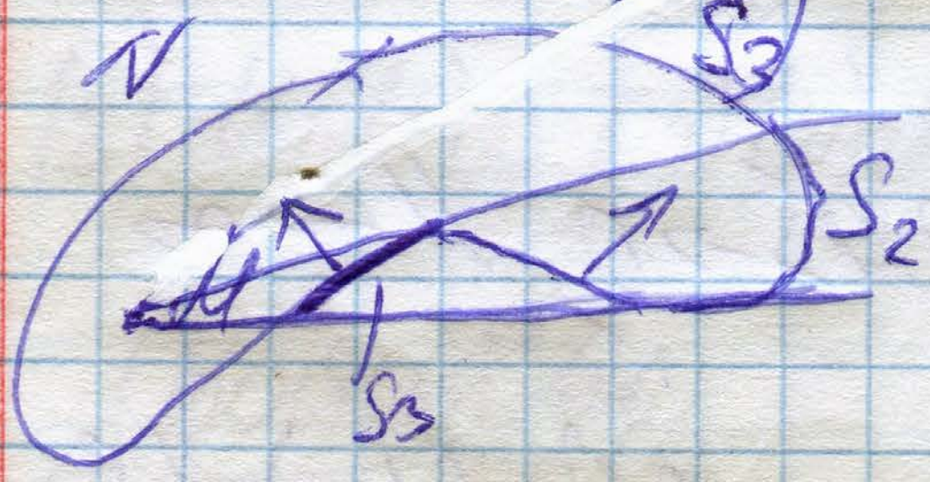
2. $M \in Q$

а) любой луч из M пересекает область только один раз



$$\iint\limits_{\partial Q} du_{пр} = 4\pi$$

б) любой луч пересекает границу не более 1 раз



$$\iint\limits_{\partial Q} du_{пр} = \underbrace{\iint\limits_{S_1} du_{пр}}_{>0} + \underbrace{\iint\limits_{S_2} du_{пр}}_{<0} + \iint\limits_{S_3} du_{пр} = 4\pi$$

случай а)

3) $M \in \partial Q$

$S = \partial Q$

$$\iint\limits_{\partial Q} du_{пр} = 2\pi$$

92

177

$u_{внутр}(M_0) = u(M_0) + 2\pi\rho(M_0),\ M_0 \in \partial Q$ (4)

$u_{нар}(M_0) = u(M_0) - 2\pi\rho(M_0),\ M_0 \in \partial Q$ (5)

где $u_{внутр}(M_0) = \lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in Q}} u(M)$, $u_{нар}(M_0) = \lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in Q}} u(M)$

Чтобы определить величину скачка нужно вычесть

$u_{внутр}(M_0) - u_{внеш}(M_0) = 4\pi\rho(M_0)$

$$u(M) = \underbrace{\int\limits_{\partial Q} (v(P) - v(M_0))\, d\omega_{MP}}_{u_1(M)} + v(M_0) \underbrace{\int\limits_{\partial Q} d\omega_{MP}}_{\text{см. Гаусса}}$$

$u_1(M)$ непрерывно в M_0

пусть пов-ть попадающий внутрь сферы

$$u_2(M) = \underbrace{\int\limits_{\partial Q - \gamma_{\delta M_0}} (v(P) - v(M_0))\, d\omega_{MP}}_{u_3(M)} + \int\limits_{\gamma_{\delta M_0}} (v(P) - v(M_0))\, d\omega_{MP}$$

93

$du_2(M)$ можно уменьшить гр. обл. по 2 сф-ам

$|u_2(M) - u_2(M_0)| \le \varepsilon,\ r_{MM_0} \le \delta$

178

Поэтому данная непрерывна в M_0

$$|u_3(M)| \le \int_{\overset{\frown}{PM_0}} |v(P)-v(M_0)|\,|du_{нр}| \le \varepsilon \int_{\overset{\frown}{PM_0}} |du_{нр}| \le \varepsilon \cdot 4\pi N$$

$|v(P)-v(M_0)| \le \varepsilon$, $r_{PM_0} \le \delta$

$u_1(M)-u_1(M_0) = u_2(M)-u_2(M_0)+u_3(M)-u_3(M)$

$|u_1(M)-u_1(M_0)| \le |u_2(M)-u_2(M_0)|+|u_3(M)|+|u_3(M_0)| \le$

$\le \varepsilon + 4\pi N\varepsilon + 4\pi N\varepsilon = \varepsilon(1+8\pi N) = \varepsilon_1$

$r_{MM_0} < \delta$ непрерывность доказана

1) Пусть $M \in Q$, $M \to M_0$

$u_{внутр}(M_0) = u_1(M_0)$

$u_{внутр}(M_0) = u_1(M_0) + v(M_0)\cdot 4\pi$ (7)

2) $M \to M_0$, $M \notin Q$

$u_{нар}(M_0) = u_1(M_0)$ (8)

3) $M = M_0$ $\quad u(M_0) = u_1(M_0) + v(M_0)\cdot 2\pi$ (9)

(7)-(9) => (4)

(8)-(9) => (5)

Кратные сверткам обыкновенных уравнениях.

94

179 Решение задачи

$$\underbrace{\varphi(x)}_{} + \int_a^x \underbrace{\varphi(t)K(x,t)}_{\text{ядро}}\,dt = \underbrace{f(x)}_{\text{пр. часть}}, \quad x \in [a,b]$$

уравнение Вольтерра 2-го рода

Если $f(x) \equiv 0$, то ур-е однородное.
Решить - это найти $\varphi(x)$.

$\int_a^x \varphi(t) K(x,t)\,dt = f(x)$ - ур-е I-го рода

$\varphi(x) + \int_a^b \varphi(t) K(x,t)\,dt = f(x)$ Фредгольма II рода
ядро

$\int_a^b \varphi(t) K(x,t)\,dt = f(x)$ I-го рода - некорректно поставленная задача

Сводится к решению системы линейных уравнений

$\varphi(M) + \iint_S \varphi(P) K(M,P)\,dS = f(M)$, $M \in S$ (v) интегрир. по пов-ти

Это ур-е Фредгольма II-го рода, если ядро: $\iint_S dS_M \iint_S dS_P |K(M,P)|^2 < \infty$

если K непрерывно, то заведомо выполнено ур-е (v) со слабой особенностью, если

$K(M,P) = \frac{A(M,P)}{r_{MP}^{\alpha}}$, где $|A(M,P)| \le const$, $0 < \alpha < 2$

95

Для ур-я со слабой особенностью также справедлива теорема Фредгольма

180

1 Теорема

Если однородное ур-е, соответствующее (v), имеет только тривиальное решение, то неоднородное ур-е разрешимо при $\forall$ правой части

Ур-е $\varphi(M) + \int_S \varphi(P) K(M,P)\, dS = g(M)$, $M \in S$

$K_2(M,P) = \overline{K(P,M)}$ — нез сопряж ур-е

2 Теорема

Однор ур-е, соотв.-ее (v) и однор ур-е, соотв-ее сопряженному, имеют одинаковое число линейно не зависимых решений

3 Теорема

Пусть однородное ур-е, соотв-ее (v) имеет нетривиальное решение. Тогда неоднородное ур-е разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть ур-я ортого-

96

181

Полное всех решений соответственного однородного ур-я

$\iint_S f(M)\psi_i(M)dS = 0, \; i=\overline{1,n}$

ψ_i - решение соотв. однор. уравнения

Есть случаи, когда неоднородное не имеет решений.

Внутренняя задача Неймана

$\Delta u = 0, \; M \in Q \quad (1)$

$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = \varphi(M) \quad (2)$

n - внешняя нормаль по отношению к Q.

Условие разрешимости задачи:

$\iiint_Q (\underbrace{u\Delta v - v\Delta u}_{=0})dV = \iint_{\partial Q}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\underbrace{\frac{\partial u}{\partial n}}_{=\varphi(P)}\right)dS$

$v \equiv 1$

u - решение (1), (2)

$\iint_{\partial Q} \varphi(M)dS = 0 \quad (3)$ - если не выполнено, задача не имеет решений.

$u(M) = \iint_{\partial Q} \rho(P)\frac{1}{r_{MP}}dS \quad (4)$

Подберем $\rho(P)$ так, чтобы выполнялось

Граничное условие (2)

2.1 $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(M_0)$

$M_0 \in \partial Q$, n - нормаль в т. M_0

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n_{внутр}} = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in Q}} \frac{\partial u}{\partial n}$$

2.2. $\frac{\partial u(M_0)}{\partial n_{внутр}} = \varphi(M_0), M_0 \in \partial Q$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n_{внутр}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial n} + 2\pi\delta(M_0), M_0 \in \partial Q \quad (5)$$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n} + 2\pi\delta(M_0) = \varphi(M_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(M_0) = \iint_{\partial Q} \rho(P) \cdot \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, n_{M_0})}{r_{MP}^2} dS$$

получаем интеграл. ур-ние

$$\rho(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\partial Q} \rho(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r_{MP}^2} dS_P = \frac{\varphi(M)}{2\pi} \quad (6)$$

$$k_1(M,P) = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r_{MP}^2}$$

$$\rho(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\partial Q} \rho(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r_{MP}^2} dS_P = 0 \quad (7)$$

укажем, что реш. приближенное

невырожено, есть нетрив. решение.

Количество линейно незав. решений, однород. ур-я и сопряж. ур-я одинаково (по теореме Фредгольма)

$$K_2(M,P) = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} = -K(M,P)$$

$\vec{n}_P$ - внешняя нормаль

$K(M,P)$ - ядро задачи Дирихле

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\partial Q} v(P)\frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2}\,dS_P \quad (8)$$

внутр

Докажем, что (8) имеет решение тождеств. const в т. ч. нетривиально

$$\iint_{\partial Q}(v(M)-v(P))\frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2}\,dS_P = 0$$

$$\max_{P\in\partial Q}|v(P)| = |v(M^+)|$$

$$\iint_{\partial Q}\underbrace{(v(M^+)-v(P))}_{\equiv 0}\frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_P)}{r_{MP}^2} = 0$$

$$v(M^+) - v(P) \equiv 0$$

$$v(P) \equiv v(M^+)$$

$v(P) \equiv const$, тогда (7) имеет тоже нетрив. решение $S_0 = S_0(M)$

$\to (4)$

$V(M) = \iint\limits_{\partial Q} \rho_0(M) \frac{1}{r_{MP}} dS_P$ (9) - реш. однор. ур-я

Задача для (9):

$$\begin{cases} \Delta V = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial n}\Big|_{\partial Q} = 0 \end{cases} \qquad V \equiv const$$

Можно показать что ф. реш. есть $\rho_0(M)$ можно выбрать так, что

$V(M) \equiv 1, M \in Q$ (10)

(6): используем 3 теорему Фредгольма

$$\iint\limits_{\partial Q} \frac{q(M)}{2\pi} const\, dS_M = 0$$

$\iint q(M) dS_M = 0$ предпол. что усл (3) выполнено

Тогда (6) разрешимо

$\rho(M) = \rho_{part}(M) + C\rho_0(M) \to (4)$

$$u(M) = \iint\limits_{\partial Q} \rho_{part} \frac{1}{r_{MP}} dS + C \iint\limits_{\partial Q} \rho_0(P) \frac{1}{r_{MP}} dS_P = 1, M \in Q$$

решение определяется до пост. величины

Внешняя задача решена

$\Delta u = 0, \ M \notin \bar{Q}$ (1)

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial Q} = \varphi(M)$ (2)

$\lim\limits_{M \to \infty} u(M) = 0$ (3)

(2) и (3) обеспеч. единств. задачи

n - внешняя к Q

$u(M) = \iint\limits_{\partial Q} \rho(P) \frac{1}{r_{MP}} dS_P$ (3)

1) $\Delta u = 0, \ M \notin \partial Q$

2) $u(M) \to 0, \ M \to \infty$

Подберем $\rho(P)$, чтобы выполнялось (2)

2.1 $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(M)$

$M_0 \in \partial Q, \ \vec{n}_{M_0}$ - внешняя к Q

2.2 $\frac{\partial u(M_0)}{\partial n_{пар}} = \varphi(M_0)$

Потенциал простого слоя терпит скачок при переходе через границу

$\frac{\partial u(M_0)}{\partial n_{пар}} = \frac{\partial u}{\partial n}(M_0) - 2\pi\rho(M_0)$

$$\iint_{\partial Q} \rho(P) \frac{\cos(\vec{r}_{M_0P}, \vec{n}_{M_0})}{r^2_{M_0P}} - 2\pi\rho(M_0) = \varphi(M_0)$$

$$\rho(M) - \frac{1}{2\pi}\iint_{\partial Q} \rho(P) \frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r^2_{MP}} = -\varphi(M)\frac{1}{2\pi}, \quad M \in \partial Q$$

$$K_3(M,P) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\vec{r}_{MP}, \vec{n}_M)}{r^2_{MP}}$$

$$K_4(M,P) = K_3(P,M) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r^2_{PM}} = K(M,P)$$

Для задачи Дирихле

В задаче Дирихле однор. ур-е имеет только трив. решение, тогда ур-е соотв. (4) имеет также только трив. решение и по т. 1 Фредгольма неодн. ур-е разрешимо при $\forall$ правой части

Если нашли решение (4) и $\Rightarrow$ (3), то найдем решение

31.05.18

Требуется решить ур-е Лапласа (внешняя задача Дирихле)

(1) $\Delta u = 0,\ M \in R^3 - \bar{Q}$

(2) $u|_{\partial Q} = \varphi(M)$

(3) $u(M) \to 0,\ M \to \infty$

(4) $u = \iint\limits_{\partial Q} \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r^2_{MP}} dS_P + \frac{L}{r_{M0}},\quad 0 \in Q$

ф-я удовлетворяет ур-ю Лапласа вдоль всей границы области

$\Delta u = 0,\ M \in \partial Q,\ M \neq 0$ - вдоль в этих точках решение ур-я Лапласа

$u \to 0$ при $M \to \infty$ как $\frac{L}{r_{M0}}$ (3) тоже выполнено

(1) и (3) выполнены автоматически.

Для (2):

$u_{нар}(M_0) = \varphi(M_0),\ M_0 \in \partial Q$ (2.1) - можно записать в таком виде

$u_{нар}(M_0) = \lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \notin \bar{Q}}} u(M)$

$u_{1нар}(M_0) = u_1(M_0) - 2\pi\nu(M_0)$

$u_1(M_0) - 2\pi\nu(M_0) + \frac{L}{r_{M_0 0}} = \varphi(M_0) \quad M \to M_0,\ M_0 \in \partial Q$

$\iint\limits_{\partial Q} \nu(P) \frac{\cos(\vec{r}_{PM}, \vec{n}_P)}{r^2_{MP}} dS_P - 2\pi\nu(M) + \frac{L}{r_{M0}} = \varphi(M),\ M \in \partial Q$

(5). $\nu(M) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\partial Q} \nu(P)\frac{\cos(\vec{r}_{PM},\vec{n}_P)}{r^2_{MP}}\,dS_P = -\frac{1}{2\pi}\left(\varphi(M) - \frac{\alpha}{r_{M0}}\right)$

Интегральное ур-е. Нужно найти ν, есть параметр α (неизвестен)

(6) $\nu(M) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\partial Q} \nu(P)\frac{\cos(\vec{r}_{PM},\vec{n}_P)}{r^2_{MP}}\,dS_P = 0$

нормал внутр.

Это уравнение встречалось в внутренней задаче Неймана.

Оно имеет нетривиальное решение

$\nu(P) = const$

Выпишем сопряженное

(7) $\rho(M) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\partial Q} \rho(P)\frac{\cos(\vec{r}_{MP},\vec{n}_M)}{r^2_{MP}}\,dS_P = 0$ ~~$\rho(M) = \rho(M)$~~

Союзные ур-я (6) и (7) имеют одинаковое число независимых решений.

У (7) 1 нетривиальное решение

Пусть $\rho_0(M)$

Применяем 3 теорему Фредгольма.

Если соотв. одн. ур-е имеет нетривиальное решение, то неоднородное

104

разрешимо только если пр. часть ортог. всем

(8) $\iint\limits_{\partial Q} \left(\varphi(M) - \frac{\alpha}{r_{M0}}\right) \cdot S_0(M)\, dS_M = 0 \quad 0 \in Q$

условие разрешимости (5)

$$\iint\limits_{\partial Q} \varphi(M) S_0(M)\, dS - \alpha \iint\limits_{\partial Q} \frac{1}{r_{M0}} S_0(M)\, dS = 0$$

$$\alpha = \frac{\iint\limits_{\partial Q} \varphi(M) S_0(M)\, dS}{\iint\limits_{\partial Q} \frac{1}{r_{M0}} S_0(M)\, dS}$$ выбираем α, чтобы выполнялось (8)

$$V(M) = C + V_{гост}(M)$$

решение однородного ур-я

подставляем в (4)

$$u(M) = \underbrace{C \iint\limits_{\partial Q} \frac{\cos(\vec{r_{PM}}, \vec{n_P})}{r_{MP}^2}\, dS}_{\text{интеграл Гаусса } (+)} + \iint\limits_{\partial Q} V_{гост}(P) \frac{\cos(\vec{r_{PM}}, \vec{n_P})}{r_{MP}^2}\, dS + \frac{\alpha}{r_{M0}}$$

интеграл рассматриваем вне Q.

(+) вне области Q равен 0.

Внешняя задача Дирихле разрешима всегда.