1 Вопрос 1

1.1 Давление идеального газа

Выделим элемент объема (параллелепипед) с ребром $v_x \cdot \Delta t$ и боковой гранью ΔS.
Количество молекул в данном объеме

$$\Delta N = n \cdot \Delta V = n v_x \Delta S \Delta t \tag{1}$$

Изменение импульса, передаваемое стенке одной молекулой, будет $2p_x$. Суммарный импульс, переданный стенке молекулами, будет

$$\langle \Delta p_x^{\Sigma} \rangle = \Delta p_x \cdot \Delta N \cdot \frac{1}{2} \tag{2}$$

Суммарная сила, действующая на грань, будет

$$F_{\perp} = \frac{\langle \Delta p_x^{\Sigma} \rangle}{\Delta t} \tag{3}$$

И соответственно, суммарное давление на грань

$$p = \frac{F_{\perp}}{\Delta S} = \frac{\langle \Delta p_x^{\Sigma} \rangle}{\Delta t \Delta S} = n \langle v_x p_x \rangle \tag{4}$$

$$(\vec{v}, \vec{p}\,) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} = v_x p_x + v_y p_y + v_z p_z \tag{5}$$

Но так как выделенных направлений нет, то

$$(\vec{v}, \vec{p}\,) = 3 v_x p_x \tag{6}$$

Или

$$\langle v_x p_x \rangle = \frac{1}{3} \langle (\vec{v}, \vec{p}\,) \rangle \tag{7}$$

Но тогда

$$p = \frac{1}{3} n \langle (\vec{v}, \vec{p}\,) \rangle \tag{8}$$

Реально эта формула малопригодна, поэтому имеет смысл нерелятивистское приближение

$$(\vec{v}, \vec{p}\,) = m v^2 = 2 W_k \tag{9}$$

Где W_k – кинетическая энергия одной молекулы. Тогда

$$p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \langle (\vec{v}, \vec{p}\,) \rangle = \frac{2}{3} \frac{N W_k}{V} = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \tag{10}$$

Или иначе

$$pV = \frac{2}{3} U \tag{11}$$

Где U – полная внутренняя энергия идеального газа. Из эксперимента известно, что

$$pV = \nu R T = N k T \tag{12}$$

Тогда

$$p = \frac{2}{3} U \frac{1}{V} = N k T \frac{1}{V} = n k T \tag{13}$$

Окончательно

$$p = n k T \tag{14}$$

1.2 Давление фотонного газа

Без привязки к исследуемому объекту было уравнение

$$p = \frac{1}{3}n\langle(\vec{v},\vec{p})\rangle \tag{15}$$

Для фотонов

$$\vec{v} = \vec{c}, \quad \vec{p} = \frac{W}{\vec{c}} \tag{16}$$

Тогда

$$p = \frac{1}{3}\frac{N}{V}W\langle(\vec{c},\frac{1}{\vec{c}})\rangle = \frac{1}{3}\frac{U}{V} = \frac{1}{3}u \tag{17}$$

где $u = \frac{U}{V}$ – плотность энергий.

В курсе атомной физики известен закон Стефана-Больцмана:

$$u \sim T^4 \tag{18}$$

2 Вопрос 2

2.1 Биномиальное распределение. Распределение молекул по объему сосуда

Рассмотрим объем V, в котором выделим часть объема ΔV. Какова вероятность попадания $\Delta N \equiv m$ молекул в этот объем? Пусть вероятность попадания одной молекулы в выделенный объем p:

$$P(m \in \Delta V) = p \tag{19}$$

Тогда вероятность того, что она туда не попадет,

$$P(m \notin \Delta V) = 1 - p = q \tag{20}$$

Отметим каким-то образом m молекул, например, покрасим их. Вероятность попадания P_N^m **только** m в ΔV будет сложным событием:

1. покрашенные молекулы находятся **в** ΔV
2. остальные молекулы находятся **вне** ΔV

Т.е

$$P_N^m = p^m \cdot q^{N-m} \tag{21}$$

Мы покрасили строго определенную группу молекул. Ясно, что покрасить m молекул из N можно многими способами. Из комбинаторики известно, что такое количество способов есть количество сочетаний

$$C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!} \tag{22}$$

Тогда чтобы найти полную вероятность, нужно просуммировать все вероятности для разных способов окраски молекул. Их будет ровно C_N^m слагаемых, т.е. полная вероятность

$$P(\Delta N \in \Delta V \text{ and } N - \Delta N \notin \Delta V) = C_N^{\Delta N} \cdot p^{\Delta N} \cdot q^{N-\Delta N} \tag{23}$$

Это и есть биномиальное распределение.

2.2 Свойства биномиального распределения

Свойство 1. *Сумма вероятностей всех возможных значений биномиальной случайной величины равна единице:*

Доказательство. Запишем формулу бинома Ньютона:

$$(px+q)^N = \sum_{m=0}^{N} C_N^m p^m x^m q^{N-m} \tag{24}$$

Домножим сумму биномиального распределения на формальную единицу:

$$1 = x^m\Big|_{x=1} \tag{25}$$

$$P_{\text{full}} = \sum_{m=0}^{N} P_N^m = \sum_{m=0}^{N} C_N^m p^m q^{N-m} \quad \Bigg| \times x^m\Big|_{x=1} = \tag{26}$$

$$= (px+q)^N\Bigg|_{x=1} = (p+q)^N = 1^N = 1 \tag{27}$$

□

Свойство 2. *Матожидание биномиальной случайной величины* $\langle m \rangle = Np$

Доказательство. Запишем матожидание по определению:

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^{N} m P_N^m \tag{28}$$

Домножим на формальную единицу:

$$1 = x^{m-1}\Big|_{x=1} \tag{29}$$

$$\langle m \rangle = \sum_{m=0}^{N} m x^{m-1} C_N^m p^m q^{N-m}\Bigg|_{x=1} \tag{30}$$

Продифференцируем по x слева и справа выведенное ранее выражение P_{full}

$$\frac{d[P_{full}]}{dx} = \sum_{m=0}^{N} m x^{m-1} C_N^m p^m q^{N-m} = \frac{d}{dx}(px+q)^N = Np(px+q)^{N-1} \tag{31}$$

Сравним с выражением для матожидания:

$$\langle m \rangle = Np(px+q)^{N-1}\Bigg|_{x=1} = Np \tag{32}$$

□

Свойство 3. *Дисперсия биномиальной случайной величины* $D = Npq$

Доказательство. Введем индикатор случайного события ξ:

$$\langle \xi \rangle = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p \tag{33}$$

$$\langle \xi^2 \rangle = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) = p \tag{34}$$

Найдем дисперсию ξ:

$$D_\xi = \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle = [\langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2] = p - p^2 = p(1-p) = pq \tag{35}$$

Тогда

$$D = ND_\xi = Np(1-p) = Npq \tag{36}$$

□

2.3 Предельный переход к распределению Пуассона (закон редких событий)

Условия:

$$N \gg 1, \quad m \ll N \tag{37}$$

Запишем распределение Бернулли:

$$P_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!} p^m q^{N-m} \tag{38}$$

Как было доказано ранее,

$$\langle m \rangle = Np \quad \to \quad p = \frac{\langle m \rangle}{N} \tag{39}$$

Тогда

$$P_N^m = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (N-m) \cdot (N-m+1) \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N}{m! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (N-m)} \left(\frac{\langle m \rangle}{N}\right)^m \left(1 - \frac{\langle m \rangle}{N}\right)^{N-m} = \tag{40}$$

$$= \frac{(N-m+1) \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N}{m! N^m} \langle m \rangle^m \left(1 - \frac{\langle m \rangle}{N}\right)^{N-m} = \tag{41}$$

$$= \frac{(1 - \frac{m-1}{N}) \cdot \ldots \cdot (1 - \frac{1}{N}) \cdot 1}{m!} \langle m \rangle^m \left(1 - \frac{\langle m \rangle}{N}\right)^{N-m} \tag{42}$$

При наложенных условиях можно переписать выражение:

$$P_N^m = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} \left(1 - \frac{\langle m \rangle}{N}\right)^N = \tag{43}$$

$$= \frac{\langle m \rangle^m}{m!} \left[\left(1 - \frac{\langle m \rangle}{N}\right)^{\frac{N}{\langle m \rangle}}\right]^{\langle m \rangle} = \tag{44}$$

$$= \frac{\langle m \rangle^m}{m!} \exp(-\langle m \rangle) \tag{45}$$

2.4 Предельный переход к распределению Гаусса

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \tag{46}$$

$$P_N^m = C_N^m p^m q^{N-m} \tag{47}$$

$$C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!} = \frac{\left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}}{\left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m} \cdot \left(\frac{N-m}{e}\right)^{N-m} \sqrt{2\pi(N-m)}} \tag{48}$$

$$C_N^m = \frac{N^N}{m^m \cdot (N-m)^{N-m}} \sqrt{\frac{N}{2\pi m(N-m)}} \tag{49}$$

$$P_N^m = \frac{N^m \cdot N^{N-m}}{m^m \cdot (N-m)^{N-m}} \sqrt{\frac{N}{2\pi m(N-m)}} \cdot p^m q^{N-m} \tag{50}$$

$$P_N^m = \sqrt{\frac{N}{2\pi m(N-m)}} \left(\frac{Np}{m}\right)^m \left(\frac{Nq}{N-m}\right)^{N-m} \tag{51}$$

Сделаем замену $\xi = m - \langle m \rangle = m - Np$.

$$N - m = N - (Np + \xi) = N(1 - p) - \xi \tag{52}$$

Отсюда

$$N - m = Nq - \xi \tag{53}$$
$$m = Np + \xi \tag{54}$$

Тогда

$$P_N^m = \sqrt{\frac{N}{2\pi(Np+\xi)(Nq-\xi)}} \left(\frac{Np}{Np+\xi}\right)^{Np+\xi} \left(\frac{Nq}{Nq-\xi}\right)^{Nq-\xi} \tag{55}$$

$$P_N^m = \sqrt{\frac{N}{2\pi(Np+\xi)(Nq-\xi)}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\xi}{Np}\right)^{Np+\xi}\left(1-\frac{\xi}{Nq}\right)^{Nq-\xi}} \tag{56}$$

Прологарифмируем выражение под второй дробью:

$$\ln f = \ln\left(\left(1+\frac{\xi}{Np}\right)^{Np+\xi}\left(1-\frac{\xi}{Nq}\right)^{Nq-\xi}\right) = (Np+\xi)\ln\left(1+\frac{\xi}{Np}\right) + (Nq-\xi)\ln\left(1-\frac{\xi}{Nq}\right) \tag{57}$$

Разложим выражения под логарифмом в ряд Тейлора до второго члена:

$$\ln f \approx (Np+\xi)\left(\frac{\xi}{Np} - \frac{\xi^2}{2(Np)^2}\right) + (Nq-\xi)\left(-\frac{\xi}{Nq} - \frac{\xi^2}{2(Nq)^2}\right) = \tag{58}$$

$$= \xi + \frac{\xi^2}{Np} - \frac{\xi^2}{2Np} - \frac{\xi^3}{2(Np)^2} - \xi + \frac{\xi^2}{Nq} - \frac{\xi^2}{2Nq} + \frac{\xi^3}{2(Nq)^2} \approx \tag{59}$$

$$\approx \frac{\xi^2}{Np} - \frac{\xi^2}{2Np} + \frac{\xi^2}{Nq} - \frac{\xi^2}{2Nq} = \frac{\xi^2}{N}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - \frac{\xi^2}{2N}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{\xi^2}{2N}\left(\frac{q+p}{pq}\right) = \frac{\xi^2}{2Npq} \tag{60}$$

Тогда

$$f^{-1} = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2Npq}\right) \tag{61}$$

И

$$P_N^m = \sqrt{\frac{N}{2\pi(Np+\xi)(Nq-\xi)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2Npq}\right) \tag{62}$$

Т.к. ξ мало, то

$$Np + \xi \approx Np \tag{63}$$
$$Nq - \xi \approx Nq \tag{64}$$

И тогда

$$P_N^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2Npq}\right) \tag{65}$$

Введя обозначение $Npq = \sigma^2$ и сделав обратную замену $\xi = m - \langle m \rangle$, получим окончательную формулу:

$$P_N^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(m - \langle m \rangle)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{66}$$

Данное решение является качественным, и проведено при помощи ряда приближений, причем оперирующих пренебрежением одной величины (ξ) разных порядков. Корректное рассмотрение проводится в рамках центральной предельной теоремы и выходит за рамки программного курса.

3 Вопрос 3

3.1 Распределение молекул газа по скоростям. Распределения Максвелла

Рассмотрим газ в равновесном состоянии, без внешних воздействий.

Введем понятие пространства скоростей:

$$\vec{v}_i = \begin{bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{bmatrix} \tag{67}$$

Количество молекул, обладающих векторами скорости, лежащими в данном выделенном объеме скоростей, пропорционально всему количеству молекул и пропорционально выделенному объему скоростей:

$$dN = f(\vec{v}) N dv_x dv_y dv_z \tag{68}$$

Коэффициентом выступает *функция распределения (плотность вероятностей)*

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $$f(\vec{v}) = \phi(v_x)\phi(v_y)\phi(v_z)$$

2. $$f(\vec{v}) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Известно, что этим свойствам удовлетворяет функция:

$$f(\vec{v}) = A \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) \tag{69}$$

Уточним константу A из условия нормировки:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} A \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right) d\vec{v} = \int_{-\infty}^{+\infty} A \exp\left(-\frac{v_x^2}{2\sigma^2}\right) dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} A \exp\left(-\frac{v_y^2}{2\sigma^2}\right) dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} A \exp\left(-\frac{v_z^2}{2\sigma^2}\right) dv_z = \tag{70}$$

$$= A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A \exp\left(-\frac{v_z^2}{2\sigma^2}\right) dv_z \right)^3 \tag{71}$$

Используя интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-ax^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{72}$$

Где $a = \frac{1}{2\sigma^2}$:

$$A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A \exp\left(-\frac{v_z^2}{2\sigma^2}\right) dv_z \right)^3 = A(\sqrt{2\pi\sigma^2})^3 = 1 \tag{73}$$

Откуда

$$A = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{3/2} \tag{74}$$

Уточним значение σ^2.

$$\frac{m\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2}kT \quad \Rightarrow \quad \langle v^2 \rangle = 3\frac{kT}{m} \tag{75}$$

Причем

$$\langle v^2\rangle = 3\langle v_x^2\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle v_x^2\rangle = \frac{kT}{m} \tag{76}$$

Воспользуемся формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \tag{77}$$

По определению,

$$\langle v_x^2\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A^{\frac{1}{3}} v_x^2 \exp\left(-\frac{v_x^2}{2\sigma^2}\right) dv_x = \frac{1}{2} A^{\frac{1}{3}} \sqrt{8\pi\sigma^6} = \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi\sigma^6}{2\pi\sigma^2}\right)^{1/2} = \sigma^2 \tag{78}$$

Откуда

$$\sigma^2 = \frac{kT}{m} \tag{79}$$

И тогда окончательный вид **распределения Максвелла для вектора скорости**:

$$f(\vec{v}\,) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \tag{80}$$

Из сформулированного свойства

$$f(\vec{v}) = \phi(v_x)\phi(v_y)\phi(v_z)$$

следует **распределение Максвелла для проекции скорости**:

$$\phi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \tag{81}$$

Воспользовавшись тем, что функция распределения есть коэффициент в формуле

$$dN = Nf(\vec{v})\,dV_v, \tag{82}$$

найдем последнее распределение. Выделим в пространстве скоростей сферический слой. Если вектор попадает в него, можно говорить о том, что его модуль лежит между радиусами этого слоя:

$$v \in [v_0,\, v_0 + dv] \tag{83}$$

Тогда объем этого слоя

$$dV_v = 4\pi v^2 dv \tag{84}$$

Но тогда можно записать функцию распределения как

$$F(v) = 4\pi f(\vec{v}) v^2 \tag{85}$$

Окончательно получим **распределение Максвелла для модуля скорости**:

$$F(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \tag{86}$$

3.2 Наивероятнейшая, средняя и среднеквадратичная скорости

Наивероятнейшая скорость соответствует максимуму функции $F(v)$. Тогда

$$F' = (2v - v^2\frac{2mv}{2kT})\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\bigg|_{v=v_{\text{вер}}} = 0 \tag{87}$$

Откуда **наивероятнейшая скорость**

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{88}$$

Среднюю скорость найдем по определению:

$$\langle v\rangle = \int\limits_0^{+\infty} vF(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int\limits_0^{+\infty} v^3\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv \tag{89}$$

Воспользуемся табличным интегралом (выводится из интеграла Пуассона дифференцированием по константе):

$$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a^2} \tag{90}$$

В нашем случае $a = \frac{m}{2kT}$ И тогда

$$\langle v\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{91}$$

Мы нашли **среднюю скорость**:

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \tag{92}$$

Среднеквадратичную скорость также найдем по определению:

$$\langle v^2\rangle = \int\limits_0^{+\infty} v^2F(v)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int\limits_0^{+\infty} v^4\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv \tag{93}$$

Воспользуемся табличным интегралом:

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}} \tag{94}$$

Тогда

$$\langle v^2\rangle = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} = \frac{3kT}{m} \tag{95}$$

Отсюда **среднеквадратичная скорость**

$$v_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \tag{96}$$

4 Вопрос 4

4.1 Распределение Максвелла-Больцмана

Обратим внимание, что в распределении Максвелла есть кинетическая энергия:

$$f(\vec{v}) = A\exp\left(-\frac{mv^2}{2}\cdot\frac{1}{kT}\right) \tag{97}$$

Формально запишем новую функцию распределения, зависящую от полной механической энергии:

$$f^*(\vec{v},\vec{r}) = A\exp\left(-\left[\frac{mv^2}{2}+W_p\right]\cdot\frac{1}{kT}\right) = A\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right) \tag{98}$$

Рассмотрим элемент $\Delta\Gamma$ пространства Γ:

$$\Delta\Gamma = \Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot\Delta v_x\cdot\Delta v_y\cdot\Delta v_z \tag{99}$$

Тогда

$$dN = Nf^*(\vec{v},\vec{r})d\Gamma \tag{100}$$

И

$$\int\limits_{\Delta\Gamma} f^*(\vec{v},\vec{r})d\Gamma = 1 \tag{101}$$

Проинтегрируем f^* по скоростям:

$$g(\vec{r}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^* d^3\vec{v} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f^* dv_x dv_y dv_z = \tag{102}$$

$$= A\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv_x dv_y dv_z \exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right) = B\exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right) \tag{103}$$

Полученное распределение называется **распределением Больцмана**.

4.2 Вывод барометрической формулы

Рассмотрим модель однородного поля тяжести. На самом деле эта идеализация не так сильно влияет на модель, как еще одна, которую мы примем: пусть атмосфера будет изотермической.

Известно, что $W_p = mgh$ в нашей модели:

$$n(h) = B\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) \tag{104}$$

Пусть

$$n(h=0) = n_0, \quad p(h_0) = n_0 kT = p_0. \tag{105}$$

$$p = nkT \tag{106}$$

Тогда из первой формулы

$$n(h) = n_0\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) \tag{107}$$

Домножим на kT:

$$p(h) = n_0 kT\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = p_0\exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) \tag{108}$$

Величина

$$L = \frac{kT}{mg} \tag{109}$$

называется *эффективной толщиной атмосферы*. На этом расстоянии концентрация падает примерно в три раза, что в многих прикладных задачах считается отсутствием атмосферы вообще.

4.3 Опыт Перрена

В 1909 году Перрен провел опыт с частицами гуммигута (определенный сорт смолы тропических деревьев). Гуммигут примечателен тем, что его плотность очень близка к плотности воды.

Создав уравновешенную взвесь воды с частицами гуммигута диаметром $\varnothing \sim 0.1$ мкм, Перрен мог посчитать концентрацию на двух уровнях смеси (расстояние между уровнями было $\Delta h \sim 1$ мкм):

$$n_1 = n(h_1) = n_0 \exp\left(-\frac{mgh_1}{kT}\right) \tag{110}$$

$$n_2 = n(h_2) = n_0 \exp\left(-\frac{mgh_2}{kT}\right) \tag{111}$$

Откуда

$$\frac{n_1}{n_2} = \exp\left(-\frac{mg\Delta h}{kT}\right) \tag{112}$$

И

$$k = \frac{mg\Delta h}{T \ln \frac{n_1}{n_2}} \tag{113}$$

Тогда можно найти число Авогадро:

$$N_a = \frac{R}{k} = \frac{RT \ln \frac{n_1}{n_2}}{mg\Delta h} \tag{114}$$

5 Вопрос 5

5.1 Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы

Нам известно, что внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}NkT \tag{115}$$

Теорема о равнораспределении предполагает, что коэффициент $3N$ является количеством степеней свободы i, и на одну степень свободы **одной** молекулы приходится энергия

$$\varepsilon = \frac{kT}{2} \tag{116}$$

Соответственно, N молекул обладает $3N$ степенями свободы. Полная энергия

$$U = i\varepsilon \tag{117}$$

Эта теорема термодинамики, которую мы примем на веру.

5.2 Классическая теория теплоемкости газов

Теплоемкость определяется как

$$c = \frac{\delta Q}{dT}, \quad c \in (-\infty \ldots + \infty) \tag{118}$$

Для идеального газа при постоянном объеме ($V = const$):

$$\delta Q = dU = \frac{3}{2}\nu R dT \quad \Rightarrow \quad c_v = \frac{3}{2}\nu R \tag{119}$$

Полученное выражение не универсально и верно только для газа с одноатомными ($i = 3$) молекулами.

5.3 Теплоемкость кристаллов

Наша модель - кристаллическая решетка, где молекулы колеблются по гармоническому закону (гармонический осциллятор).

Необходимо найти, как и для идеального газа, энергию всех молекул. Для начала найдем энергию одной молекулы.

$$\langle W\rangle = \langle W_p\rangle + \langle W_k\rangle \tag{120}$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t) \tag{121}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t) \tag{122}$$

где $\kappa = m\omega^2$:

$$\langle W_k\rangle = \frac{m\langle\dot{x}^2\rangle}{2} = \frac{mA^2}{2}\omega^2\langle\sin^2(\omega t)\rangle \tag{123}$$

$$\langle W_p\rangle = \frac{\kappa\langle x^2\rangle}{2} = \frac{mA^2}{2}\omega^2\langle\cos^2(\omega t)\rangle \tag{124}$$

По определению,

$$\langle\sin^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \sin^2(\omega t)dt = \frac{1}{2} \tag{125}$$

аналогично

$$\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \frac{1}{2} \tag{126}$$

Тогда полная энергия одной молекулы

$$\langle W\rangle = \langle W_p\rangle + \langle W_k\rangle + \frac{\kappa A^2}{2} = 2\langle W_k\rangle \tag{127}$$

Но

$$\langle W_k\rangle = 3\varepsilon = \frac{3kT}{2} \tag{128}$$

Отсюда

$$\langle W\rangle = 3kT \tag{129}$$

А полная энергия

$$\langle W_{full}\rangle = 3\nu RT \tag{130}$$

И тогда **теплоемкость кристалла**

$$c_v = 3\nu R \tag{131}$$

5.4 Недостатки классической теории теплоемкости

Классическая теория не дает объяснения зависимости теплоемкости тел от температуры. Экспериментально установлено, что **при приближении к абсолютному нулю теплоемкости всех тел, в том числе и кристаллов, стремятся к нулю**.

При нагреве газа молекулы меняют количество степеней свободы.

Сначала «заморожены» вращательные степени свободы, и $i = 3$. Затем количество степеней свободы становится $i = 5$.

Однако по теореме о равномерном распределении энергии все степени свободы равноправны, и не могут «замораживаться»

При дальнейшем нагреве молекула теряет жесткость, и появляются колебательные степени свободы: $i = 7$.

В квантовой теории постулируется, что энергия дискретна:

$$E_n = n\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2} \tag{132}$$

Расхождение теплоемкости имеет квантовую природу.

6 Вопрос 6

6.1 Средняя длина свободного пробега молекул в газах

Допустим, что эффективный диаметр молекулы $\sigma \neq f(T)$. Чтобы найти длину свободного пробега, нам нужна некая модель.

Пусть молекула претерпевает M столкновений. Тогда пройденный ею путь

$$l_M = \sum_{i=1} M l_i \tag{133}$$

И тогда, по определению,

$$\langle l \rangle = \frac{l_M}{M} \tag{134}$$

Весь путь молекулы за M столкновений лежит в ломаной цилиндрической трубке диаметром 2σ и длиной l_M. Её объем почти точно равен

$$V = \pi\sigma^2 l_M = \pi\sigma^2 \langle l \rangle M \tag{135}$$

Так как молекула претерпевала столкновения со **всеми** молекулами в данном объеме, то

$$M = nV \tag{136}$$

Тогда

$$V = \pi\sigma^2 \langle l \rangle nV \tag{137}$$

Или

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\pi\sigma^2 n} \tag{138}$$

Это выражение *почти* верно. Мы учли движение всего одной молекулы, считая все остальные неподвижными. В жизни это выражение выглядит так:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n} \tag{139}$$

С учетом

$$p = nkT \tag{140}$$

Можно записать формулу в удобном для использования виде:

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p} \tag{141}$$

7 Вопрос 7

7.1 Диффузия в газах. Закон Фика, расчёт коэффициента диффузии

Диффузия вызвана **случайным** блужданием молекул примеси. Известен эмпирический закон (Фика):

$$\Delta m = -D\frac{dn}{dx}mS\Delta t \tag{142}$$

где m – масса всей примеси, n – концентрация примеси, Δm – перенесенная примесь.

Выберем ось $+x$. Мы рассмотрим два сечения одной площади S, перпендикулярные оси (и потоку примеси): сечение в точке $x - x_0$ и сечение в точке $x + x_0$.

В сечение x частицы могут попадать только двумя способами: либо в направлении $+x$ («туда») из сечения $x - x_0$, либо в обратном направлении из сечения $x + x_0$ («обратно»):

$$N_{\rightarrow} = \frac{1}{6}n(x - x_0)S\langle v\rangle\Delta t \tag{143}$$

$$N_{\leftarrow} = \frac{1}{6}n(x + x_0)S\langle v\rangle\Delta t \tag{144}$$

Понятно, что полное количество частиц, движущихся в выбранном направлении распространения примеси, будет

$$N = N_{\rightarrow} - N_{\leftarrow} \tag{145}$$

И

$$\Delta m = mN = \frac{1}{6}mS\langle v\rangle\Delta t[n(x - x_0) - n(x + x_0)] \tag{146}$$

Разложим функцию $n(z)$ в ряд Тейлора до второго члена (линеаризуем):

$$n(x - x_0) = n(x) + \frac{dn(x)}{dx}(x - x_0 - x) = n(x) - \frac{dn}{dx}x_0 \tag{147}$$

$$n(x + x_0) = n(x) + \frac{dn(x)}{dx}(x + x_0 - x) = n(x) + \frac{dn}{dx}x_0 \tag{148}$$

Тогда

$$n(x - x_0) - n(x + x_0) = -2\frac{dn}{dx}x_0 \tag{149}$$

Имеет смысл взять за x_0 длину свободного пробега, но тогда

$$\Delta m = -\frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle\frac{dn}{dx}mS\Delta t \tag{150}$$

Мы уточнили значение коэффициента диффузии:

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle \tag{151}$$

8 Вопрос 8

8.1 Внутреннее трение в газах. Формула Ньютона, расчет вязкости

Известна формула Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| S \tag{152}$$

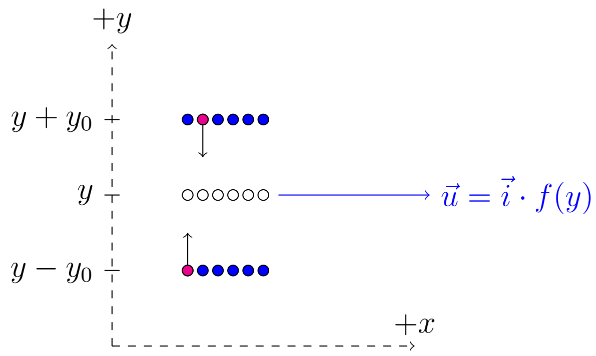

Рис. 1: Поток газа

Рассмотрим модель Перена: перенос импульса при переходе молекулы между слоями с разными скоростями.

$$F_{\text{тр}} = \left| \frac{dp_x}{dt} \right| \tag{153}$$

В отличии от предыдущей задачи, концентрацию мы будем считать постоянной, $n \neq f(y)$:

$$N_\uparrow = N_\downarrow = \frac{1}{6} nS\langle v\rangle \Delta t \tag{154}$$

$$p_\uparrow^{\text{мол}} = mu(y - y_0) \tag{155}$$
$$p_\downarrow^{\text{мол}} = mu(y + y_0) \tag{156}$$

Тогда

$$p_\uparrow = p_\uparrow^{\text{мол}} \cdot N_\uparrow = \frac{1}{6} mnS\langle v\rangle \Delta t \cdot u(y - y_0) \tag{157}$$
$$p_\downarrow = p_\downarrow^{\text{мол}} \cdot N_\downarrow = \frac{1}{6} mnS\langle v\rangle \Delta t \cdot u(y + y_0) \tag{158}$$

И

$$\left| \frac{dp_x}{dt} \right| = \left| \frac{p_\uparrow - p_\downarrow}{\Delta t} \right| = \frac{1}{6} mnS\langle v\rangle \Delta t \cdot |u(y - y_0) - u(y + y_0)| \tag{159}$$

Разложим функцию u в ряд Тейлора до второго члена (линеаризуем):

$$u(y - y_0) = u(y) + \frac{du(y)}{dy}(y - y_0 - y) = u(y) - \frac{du}{dy} y_0 \tag{160}$$

$$u(y + y_0) = u(y) + \frac{du(y)}{dy}(y + y_0 - y) = u(y) + \frac{du}{dy} y_0 \tag{161}$$

Тогда

$$u(y - y_0) - u(y + y_0) = -2\frac{dy}{dy} y_0 \tag{162}$$

Имеет смысл взять за y_0 длину свободного пробега, но тогда

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} mn\langle v\rangle\langle l\rangle \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| S \tag{163}$$

Где

$$mn = \rho \tag{164}$$

Мы уточнили значение коэффициента вязкости:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle \tag{165}$$

или

$$\eta = \rho D \tag{166}$$

9 Вопрос 9

9.1 Теплопроводность газов. Закон Фурье, расчет коэффициента теплопроводности

Пусть температура $T = f(x)$ и $\frac{dT}{dx} > 0$. Известен закон Фурье:

$$Q = -\varkappa \frac{dT}{dx} S\Delta t \tag{167}$$

Аналогично предыдущим задачам, перенос энергии осуществляется случайным блужданием:

$$N_\uparrow = N_\downarrow = \frac{1}{6} nS\langle v\rangle\Delta t \tag{168}$$

$$W_\uparrow^{\text{мол}} = W(x - x_0) \tag{169}$$

$$W_\downarrow^{\text{мол}} = W(x + x_0) \tag{170}$$

Тогда

$$W_\uparrow = W_\uparrow^{\text{мол}} \cdot N_\uparrow = \frac{1}{6} mnS\langle v\rangle\Delta t \cdot W(x - x_0) \tag{171}$$

$$W_\downarrow = W_\downarrow^{\text{мол}} \cdot N_\downarrow = \frac{1}{6} mnS\langle v\rangle\Delta t \cdot W(x + x_0) \tag{172}$$

И

$$Q = W_\uparrow - W_\downarrow = \frac{1}{6} nS\langle v\rangle\Delta t \cdot [W(x - x_0) - W(x + x_0)] \tag{173}$$

Разложим функцию W в ряд Тейлора до второго члена (линеаризуем):

$$W(x - x_0) = W(x) + \frac{dW(x)}{dx}(x - x_0 - x) = W(x) - \frac{dW}{dx} x_0 \tag{174}$$

$$W(x + x_0) = W(x) + \frac{dW(x)}{dx}(x + x_0 - x) = W(x) + \frac{dW}{dx} x_0 \tag{175}$$

Тогда

$$W(x - x_0) - W(x + x_0) = -2\frac{dW}{dx} x_0 = -ik\frac{dT}{dx} \tag{176}$$

Имеет смысл взять за x_0 длину свободного пробега, но тогда

$$Q = \frac{i}{6} nk \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{dT}{dx} S \Delta t \tag{177}$$

где

$$nk = \frac{N}{V} k = \frac{\nu R}{V} = \frac{\nu R \rho}{M} \tag{178}$$

Но тогда с учетом

$$c_v = \frac{i}{2} \nu R, \quad c_v^{\text{уд}} = \frac{i \nu R}{2M} \tag{179}$$

$$Q = -\frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle c_v^{\text{уд}} \frac{dT}{dx} S \Delta t \tag{180}$$

Отсюда получили коэффициент теплопроводности

$$\varkappa = \frac{1}{3} c_v^{\text{уд}} \eta \tag{181}$$

10 Вопрос 10

10.1 Вычисление среднего квадрата смещения броуновских частиц

Рассмотрим броуновское движение в дискретной модели. Каждый «шаг» частица будет совершать в случайном направлении, но на одно и тоже расстояние L и за одно и тоже время T:

$$\forall i |\vec{r}_i| = L \tag{182}$$

За N шагов частица переместится в точку с радиус-вектором

$$\vec{R}_N = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \ldots + \vec{r}_N \tag{183}$$

Понятно, что радиус-вектор перемещения (как и любой случайный вектор):

$$\langle \vec{R}_N \rangle = 0 \tag{184}$$

И имеет смысл искать

$$\langle R_N^2 \rangle = ? \tag{185}$$

$$\vec{R}_N = \vec{R}_{N-1} + \vec{r}_N \tag{186}$$

Будем обозначать $\vec{r}_N = \vec{l}$:

$$\vec{R}_N = \vec{R}_{N-1} + \vec{l} \tag{187}$$

Тогда

$$(\vec{R}_N)^2 = (\vec{R}_{N-1} + \vec{l})^2 = R_{N-1}^2 + l^2 + 2(\vec{R}_{N-1}, \vec{l}) \tag{188}$$

И

$$\langle (\vec{R}_N)^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + \langle l^2 \rangle + 2 \langle (\vec{R}_{N-1}, \vec{l}) \rangle \tag{189}$$

Откуда

$$\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + \langle l^2 \rangle \tag{190}$$

Получили рекуррентную формулу, откуда, очевидно,

$$\langle R_N^2 \rangle = N \langle l^2 \rangle \tag{191}$$

С другой стороны,

$$t_N = T \cdot N \tag{192}$$

Тогда

$$\langle R^2 \rangle \sim t \tag{193}$$

10.2 Формула Эйнштейна

Так как частота ударов $\nu \sim 10^{21}\,[c^{-1}]$, можно перейти к непрерывной модели:

$$m\vec{a} = -h\vec{v} + \vec{F} \tag{194}$$

Движение происходит под действием вязкого сопротивления и случайных толчков. Перейдем к проекциям:

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} + F_x \tag{195}$$

Первый шаг решения: Домножим на x и усредним:

$$m\langle x\ddot{x}\rangle = -h\langle x\dot{x}\rangle + \langle xF_x\rangle \tag{196}$$

$$\langle xF_x\rangle = \langle x\rangle\langle F_x\rangle = 0 \tag{197}$$

Откуда

$$m\langle x\ddot{x}\rangle = -h\langle x\dot{x}\rangle \tag{198}$$

Второй шаг решения (хитрые производные):

$$\langle x\dot{x}\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle \tag{199}$$

$$\frac{d(x\dot{x})}{dt} = \dot{x}^2 + x\ddot{x} \quad \to \quad \langle x\ddot{x}\rangle = \frac{d\langle x\dot{x}\rangle}{dt} - \langle \dot{x}^2\rangle \tag{200}$$

Тогда

$$m\frac{d\langle x\dot{x}\rangle}{dt} - m\langle\dot{x}^2\rangle = -h\langle x\dot{x}\rangle \tag{201}$$

$$m\langle\dot{x}^2\rangle 2 = \frac{1}{2}kT \quad \to \quad m\langle\dot{x}^2\rangle = kT \tag{202}$$

Тогда

$$m\frac{d\langle x\dot{x}\rangle}{dt} - kT + h\langle x\dot{x}\rangle = 0 \tag{203}$$

Третий шаг решения: обратимся к дискретной модели.

$$X_N = X_{N-1} \pm l \tag{204}$$

$$\dot{X}_N = \dot{X}_{N-1} \tag{205}$$

Тогда

$$\langle X_N\dot{X}_N\rangle = \langle (X_{N-1} \pm l)\dot{X}_{N-1}\rangle = \langle X_{N-1}\dot{X}_{N-1}\rangle \pm \langle l\dot{X}_{N-1}\rangle = \langle X_{N-1}\dot{X}_{N-1}\rangle \tag{206}$$

Значит,

$$\langle X_N\dot{X}_N\rangle = \mathrm{const} \quad \to \quad \langle x\dot{x}\rangle = \mathrm{const} \quad \to \quad m\frac{d\langle x\dot{x}\rangle}{dt} = 0 \tag{207}$$

Тогда

$$-kT + h\langle x\dot{x}\rangle = 0 \tag{208}$$

или

$$h\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = kT \quad \to \quad \frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = \frac{2kT}{h} \tag{209}$$

И окончательно

$$\langle r^2\rangle = 3\langle x^2\rangle = \frac{6kT}{h}\cdot t \tag{210}$$

Данное уравнение называется **формулой Энштейна**.